Vektorski prostori

9. vježbe

Lucija Relić

Prirodoslovno-matematički fakultet — Matematički odsjek
Sveučilište u Zagrebu

prosinac 2024.

Unitarni prostori

$\mathbb{K}$ = polje $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$, V vektorski prostor nad $\mathbb{K}$

- skalarni produkt na V: funkcija $(\cdot \mid \cdot)\colon V \times V \to \mathbb{K}$ sa svojstvima
  - linearnost u prvoj varijabli: $\forall v_1, v_2, w \in V$, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$
    $$(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \mid w) = \alpha_1 (v_1 \mid w) + \alpha_2 (v_2 \mid w)$$
  - hermitska komutativnost: $\forall v, w \in V$
    $$(v \mid w) = \overline{(w \mid v)}$$
  - pozitivna definitnost: $\forall v \in V$ je $(v \mid v) \geq 0$, te $\forall v \in V$
    $$(v \mid v) = 0 \iff v = 0$$
- unitarni prostor: uređeni par $(V, (\cdot \mid \cdot))$
- antilinearnost u drugoj varijabli

Primjeri unitarnih prostora

- $V = \mathbb{K}^n$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$ fiksni skalari, $v, w \in V$

$$(v \mid w) := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \overline{w_j}$$

- $V = C([a,b], \mathbb{K}) = \{f \colon [a,b] \to \mathbb{K} \mid f \text{neprekidna}\}$, $f, g \in V$

$$(f \mid g) := \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$$

- $V = M_n(\mathbb{K})$, $A, B \in V$

$$(A \mid B) := \mathrm{tr}(AB^*)$$

Norma

Neka je V unitarni prostor sa skalarnim produktom $(\cdot \mid \cdot)$, za $v \in V$ je

$$\|v\| := \sqrt{(v \mid v)}$$

norma (duljina) vektora v.
Funkcija $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}$ ima svojstva (aksiomi norme): $\forall v, w \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$

- $\|v\| \geq 0$
- $\|v\| = 0 \iff v = 0$
- $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$
- $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Svojstva

Za normu koja potječe od skalarnog produkta vrijedi i relacija paralelograma: $\forall v, w \in V$

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$$

Cauchy-Schwarz-Bunjakowskijeva nejednakost: za sve $v, w \in V$ vrijedi

$$|(v \mid w)| \leq \|v\| \cdot \|w\|,$$

pri čemu se jednakost postiže ako i samo ako su v i w kolinearni (linearno zavisni).

Zadatak 3.

Neka je V unitarni prostor nad $\mathbb{K} =$ polje $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Za vektore $x, y \in V$ dokažite da vrijedi

$$(x \mid y) = 0 \iff (\forall \alpha \in \mathbb{K}) \quad \|x\| \leq \|x + \alpha y\|.$$

Zadatak 4.

Neka za matricu $A \in M_n(\mathbb{C})$ vrijedi $AA^* = A^2$. Dokažite da je A hermitska matrica, tj. da vrijedi $A^* = A$.

Zadatak 5.

Provjerite jesu li sljedeći vektorski prostori unitarni uz sljedeća preslikavanja:

(a) $\mathbb{R}^3$ uz $((x_1, x_2, x_3) \mid (y_1, y_2, y_3)) = \sin(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)$

(b) $\mathbb{R}^3$ uz $((x_1, x_2, x_3) \mid (y_1, y_2, y_3)) = x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_3$

(c) $\mathbb{R}$ uz $(x \mid y) = xy + 2$

(d) $\mathbb{R}^2$ uz $((x_1, x_2) \mid (y_1, y_2)) = x_1^2 + y_1^2$

Gram-Schmidtov postupak ortonormiranja

Neka je V konačno-dimenzionalan unitaran prostor, $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ linearno nezavisan skup vektora u V. Definiramo vektore $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ induktivno na sljedeći način:

$$e_1 := \frac{a_1}{\|a_1\|}$$

$$b_{k+1} = a_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} (a_{k+1} \mid e_j) e_j, \qquad e_{k+1} := \frac{b_{k+1}}{\|b_{k+1}\|}$$

$$k = 1, \ldots, m-1$$

Tada je $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ ortonormirani skup vektora koji još ima svojstva:

$[\{e_1, \ldots, e_k\}] = [\{a_1, \ldots, a_k\}]$, za $k = 1, \ldots, m$

$(a_k \mid e_k) \geq 0$, za $k = 1, \ldots, m$

Zadatak 6.

Neka su $f_1, f_2, f_3 \in C([0,1], \mathbb{R})$, $f_1(t) = 1$, $f_2(t) = t$, $f_3(t) = t^2$ za svaki $t \in [0,1]$. Ortonormirajte skup (f_1, f_2, f_2).

Zadatak 7.

Neka su $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^2$ takvi da je $\|v_1\| = 1$, $\|v_2\| = 2$ i $(v_1 \mid v_2) = \sqrt{3}$.
Ortonormirajte skup (v_1, v_2).

Ortogonalni komplement skupa

Za $S \subseteq V$ definiramo njegov *ortogonalni komplement* kao

$$S^{\perp} := \{v \in V \mid \{v\} \perp S\} = \{v \in V \mid (\forall w \in S)((v \mid w) = 0)\}.$$

Propozicija

Neka je V konačno-dimenzionalan unitarni prostor, $S \subseteq V$, $L \leq V$. Tada vrijedi:

(a) $S^{\perp} = [S]^{\perp}$, $\{0\}^{\perp} = V$, $V^{\perp} = \{0\}$

(b) $(L^{\perp})^{\perp} = L$, $(S^{\perp})^{\perp} = [S]$

(c) $V = L \oplus L^{\perp}$

(d) $\dim L^{\perp} = \dim V - \dim L$

Zadatak 8.

Neka je $M = [\{(0,0,1,1),(1,0,1,0)\}] \leq \mathbb{R}^4$. Nađite jednu ortonormiranu bazu za $M^\perp$ uz standardni skalarni produkt na $\mathbb{R}^4$.

V konačno-dimenzionalan unitaran prostor

(Pitagorin poučak) za $a_1, \dots, a_n$ u parovima ortogonalni:

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} a_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|a_j\|^2$$

(Teorem o najboljoj aproksimaciji) Neka je $\{e_1, \dots, e_n\} \subseteq V$ ON skup, za $x \in V$ neka je $y_0 := \sum_{j=1}^{n} (x \mid e_j) e_j$. Tada za svaki $y \in [\{e_1, \dots, e_n\}]$, $y \neq y_0$ vrijedi

$$\|x - y_0\| < \|x - y\|.$$

V konačno-dimenzionalan unitaran prostor

(Besselova nejednakost) $\{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq V$ ON skup, za svaki $x \in V$ vrijedi:

$$\sum_{j=1}^{n} |(x \mid e_j)|^2 \leq \|x\|^2$$

(Parsevalova jednakost) $\{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq V$ ONB, za svaki $x \in V$ vrijedi:

$$\sum_{j=1}^{n} |(x \mid e_j)|^2 = \|x\|^2$$

Zadatak 9.

Nađite najbolju aproksimaciju matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$$

u potprostoru od $M_2(\mathbb{C})$ koji čine matrice traga 0.

Linearni operatori na unitarnim prostorima

Teorem (Riesz)

Za svaki funkcional $f \in V'$ postoji jedinstveni vektor $a \in V$ takav da je

$$f(v) = (v \mid a), \quad \forall v \in V.$$

Teorem

Za svaki $A \in L(V, W)$ postoji jedinstveni $A^* \in L(W, V)$ takav da je

$$(Av \mid w)_W = (v \mid A^* w)_V, \quad \forall v \in V, \forall w \in W.$$

Operator A^* zovemo adjungiranim operatorom operatora A.

Pridruživanje $A \mapsto A^*$ ima svojstva:

- bijektivno je $L(V,W) \to L(W,V)$
- antilinearno
- $(AB)^* = B^*A^*$, $B \in L(V,W)$, $A \in L(W,U)$
- $(A^*)^* = A$, $A \in L(V,W)$
- $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$, $A \in L(V,W)$ bijekcija
- $I_V^* = I_V$

Za (e), (f) ONB od V i W te $A \in L(V,W)$ vrijedi

$$A^*(e,f) = (A(f,e))^* = \overline{(A(f,e))}^t.$$

Zadatak 1.

Na prostoru polinoma $\mathcal{P}_2$ realnih polinoma stupnja ≤ 2 uz skalarni produkt $(p \mid q) = \int_0^1 p(x)q(x)dx$ promotrimo linearni funkcional S zadan sa

$$Sp = \frac{1}{2}p(1) - \frac{1}{6}p'(1) + \frac{1}{24}p''(1), \quad p \in \mathcal{P}_2.$$

Odredite $s \in \mathcal{P}_2$ takav da je $Sp = (p \mid s)$ za svaki $p \in \mathcal{P}_2$.

Propozicija

Za svaki $A \in L(V, W)$ vrijedi $V = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A^*$ i $W = \operatorname{Ker} A^* \oplus \operatorname{Im} A$.

(DZ) Neka je V konačno-dimenzionalan unitarni prostor i $A \in L(V)$. Dokažite da vrijedi

$$\operatorname{Im}(AA^*) = \operatorname{Im} A.$$