Vektorski prostori

8. vježbe

Lucija Relić

Prirodoslovno-matematički fakultet — Matematički odsjek
Sveučilište u Zagrebu

prosinac 2024.

Zadatak 4.

Koliko najviše elemenata može imati skup $\mathcal{S} \subseteq L(\mathbb{C}^3)$ takav da ta svaki $T \in \mathcal{S}$ vrijedi $\sigma(T) \subseteq \{2, 3\}$ i nikoja dva operatora nisu slični?

Zadatak 5.

Operator $A \in L(\mathbb{C}^7)$ u nekoj bazi (f) za $\mathbb{C}^7$ ima matrični prikaz

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & & & & & \\ & -3 & & & & & \\ & & -3 & & & & \\ & & & 1 & 1 & & \\ & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Nađite $\sigma(A+3I)$, $k_A(\lambda)$, geometrijsku kratnost svojstvene vrijednosti 1, $\det(A^{-1}(A+2I))$, $\mu_A(\lambda)$ i $\operatorname{tr}(A+I)$.

Zadatak 6.

Odredite Jordanovu formu operatora $A \in L(\mathbb{C}^7)$ ako je poznato da vrijedi:

(a) $\mathrm{r}(A) = 4$, $\mathrm{r}(A^2) = 1$, $\mathrm{r}(A^3) = 0$

(b) $\sigma(A) = \{-2, 2\}$, stupanj od μ_A je 2, $\mathrm{tr}(A) = 6$

(c) $k_A(\lambda) = -(\lambda - 3)^3 \mu_A(\lambda)$, $(\mu_A(\lambda))^4 = -(\lambda + 3)^9 k_A(\lambda)$

Unitarni prostori

$\mathbb{K}$ = polje $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$, V vektorski prostor nad $\mathbb{K}$

- skalarni produkt na V: funkcija $(\cdot \mid \cdot) \colon V \times V \to \mathbb{K}$ sa svojstvima
  - linearnost u prvoj varijabli: $\forall v_1, v_2, w \in V$, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$
  $$(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \mid w) = \alpha_1 (v_1 \mid w) + \alpha_2 (v_2 \mid w)$$
  - hermitska komutativnost: $\forall v, w \in V$
  $$(v \mid w) = \overline{(w \mid v)}$$
  - pozitivna definitnost: $\forall v \in V$ je $(v \mid v) \geq 0$, te $\forall v \in V$
  $$(v \mid v) = 0 \iff v = 0$$
- unitarni prostor: uređeni par $(V, (\cdot \mid \cdot))$
- antilinearnost u drugoj varijabli

Primjeri unitarnih prostora

- $V = \mathbb{K}^n$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$ fiksni skalari, $v, w \in V$

$$(v \mid w) := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \overline{w_j}$$

- $V = C([a,b], \mathbb{K}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{K} \mid f \,\text{neprekidna}\}$, $f, g \in V$

$$(f \mid g) := \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$$

- $V = M_n(\mathbb{K})$, $A, B \in V$

$$(A \mid B) := \operatorname{tr}(AB^*)$$

Norma

Neka je V unitarni prostor sa skalarnim produktom $(\cdot \mid \cdot)$, za $v \in V$ je

$$\|v\| := \sqrt{(v \mid v)}$$

norma (duljina) vektora v.
Funkcija $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}$ ima svojstva (aksiomi norme): $\forall v, w \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$

- $\|v\| \geq 0$
- $\|v\| = 0 \iff v = 0$
- $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$
- $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Svojstva

Za normu koja potječe od skalarnog produkta vrijedi i relacija paralelograma: $\forall v, w \in V$

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$$

Cauchy-Schwarz-Bunjakowskijeva nejednakost: za sve $v, w \in V$ vrijedi

$$|(v \mid w)| \leq \|v\| \cdot \|w\|,$$

pri čemu se jednakost postiže ako i samo ako su v i w kolinearni (linearno zavisni).

Zadatak 1.

Postoji li $a \in \mathbb{R}$ takav da je sa

$$((x_1, x_2, x_3) \mid (y_1, y_2, y_3)) = ax_1y_1 - ax_2y_2 + x_3y_3$$

definiran skalarni produkt na $\mathbb{R}^3$?

Zadatak 2.

Koristeći CSB nejednakost, dokažite da za sve $a, b \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}.$$