

Vektorski prostori

Jordanova forma operatora

Lucija Relić

Prirodoslovno-matematički fakultet — Matematički odsjek
Sveučilište u Zagrebu

listopad 2024.

- Zadnji tjedan prije kolokvija bile su konzultacije, a ne redovne vježbe — termin nadoknade?
- podsjetnik: ovaj tjedan (5.12.) neće se održati predavanja

Zadatak 1.

Linearni operator $A \in L(\mathbb{C}^4)$ zadan je u kanonskoj bazi od \mathbb{C}^4 matricom

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nađite minimalni polinom i Jordanovu formu operatora A .

Zadatak 2.

Označimo s \mathcal{P}_3 vektorski prostor polinoma nad \mathbb{C} stupnja ≤ 3 u varijabli t . Kanonska baza prostora \mathcal{P}_3 je $\{1, t, t^2, t^3\}$. Linearni operator $A \in L(\mathcal{P}_3)$ definiran je sa

$$Ap(t) := 2p(0)(1-t) + p(1)(1+t) + \frac{1}{2}p''(0)(3t^2 - t^3) + \frac{1}{6}p'''(0)(t^2 + t^3).$$

Napišite matricu operatora A u kanonskoj bazi od \mathcal{P}_3 te mu nađite minimalni polinom i Jordanovu formu.

Zadatak 3.

Neka za operator $A \in L(V)$ vrijedi $k_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^3$. Kako sve može izgledati $\mu_A(\lambda)$? Možemo li za svak od mogućih rezultata za μ_A jednoznačno (do na poredak blokova) odrediti Jordanovu formu operatora A ?

Zadatak 4.

Koliko najviše elemenata može imati skup $\mathcal{S} \subseteq L(\mathbb{C}^3)$ takav da ta svaki $T \in \mathcal{S}$ vrijedi $\sigma(T) \subseteq \{2, 3\}$ i nikoja dva operatora nisu slični?

Zadatak 5.

Operator $A \in L(\mathbb{C}^7)$ u nekoj bazi (f) za \mathbb{C}^7 ima matricni prikaz

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & & & & & \\ & -3 & & & & & \\ & & -3 & & & & \\ & & & 1 & 1 & & \\ & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Nađite $\sigma(A + 3I)$, $k_A(\lambda)$, geometrijsku kratnost svojstvene vrijednosti 1, $\det(A^{-1}(A + 2I))$, $\mu_A(\lambda)$ i $\text{tr}(A + I)$.

Zadatak 6.

Odredite Jordanovu formu operatora $A \in L(\mathbb{C}^7)$ ako je poznato da vrijedi:

(a) $r(A) = 4$, $r(A^2) = 1$, $r(A^3) = 0$

(b) $\sigma(A) = \{-2, 2\}$, stupanj od μ_A je 2, $\text{tr}(A) = 6$

(c) $k_A(\lambda) = -(\lambda - 3)^3 \mu_A(\lambda)$, $(\mu_A(\lambda))^4 = -(\lambda + 3)^9 k_A(\lambda)$