Vektorski prostori

vježbe

Lucija Relić

Prirodoslovno-matematički fakultet — Matematički odsjek
Sveučilište u Zagrebu

listopad 2024.

Nilpotentni operatori

Definicija

Neka je V *vektorski prostor. Za operator* $N \in L(V)$ *kažemo da je* ***nilpotentan indeksa*** p $(p \in \mathbb{N})$ *ako vrijedi* $N^p = 0$, $N^{p-1} \neq 0$.

Propozicija

Ako je $e \in V$ *takav da je* $N^{p-1}e \neq 0$, *onda je* $\{N^{p-1}e, \ldots, Ne, e\}$ *linearno nezavisan skup.*

Korolar

Neka je V *konačno-dimenzionalan vektorski prostor dimenzije* n. *Ako je* $N \in L(V)$ *nilpotentan indeksa* p, *onda je* $p \leq n$.

Korolar

Neka je V konačno-dimenzionalan vektorski prostor dimenzije n. Ako je $N \in L(V)$ nilpotentan indeksa $\operatorname{ind} N = n$ *i ako je $e \in V$ takav da je $N^{p-1}e \neq 0$, onda je $(N^{p-1}e, \ldots, Ne, e)$ baza prostora V. Zovemo je* ***ciklička baza za operator*** *N i u njoj N ima matricu*

$$N(e) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Propozicija / Zadatak

Ako je $N \in L(V)$ nilpotentan indeksa $\operatorname{ind} N = n = \dim V$ i ako je $A \in L(V)$ takav da je $AN = NA$, tada postoji polinom $p \in \mathbb{K}[\lambda]$ takav da je $A = p(N)$.

Propozicija

Neka je V konačno-dimenzionalan vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n.

(a) *Ako je $N \in L(V)$ nilpotentan indeksa p, tada je $k_N(\lambda) = (-1)^n \lambda^n$, $\mu_N(\lambda) = \lambda^p$, $\sigma(N) = \{0\}$.*

(b) *Ako je $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ i ako za $N \in L(V)$ vrijedi $\sigma(N) = \{0\}$, onda N mora biti nilpotentan.*

Zadatak 1.

Neka je V konačno-dimenzionalan vektorski prostor dimenzije $n > 1$. Ako je $A \in L(V)$ nilpotentan i $\operatorname{ind} A = n$, dokažite da ne može postojati $B \in L(V)$ za koji bi vrijedilo $B^2 = A$.

Zadatak 2.

Neka je V konačno-dimenzionalan vektorski prostor, $N \in L(V)$ nilpotentan, $\operatorname{ind} N = p$. Definiramo operator $T \in L(L(V))$ formulom $T(A) := NA - AN$, $A \in L(V)$. Dokažite da je T nilpotentan indeksa $\operatorname{ind} T \leq 2p - 1$.

Zadatak 3.

Neka operator $B \in L(V)$ ima u nekoj bazi $(e) = (e_1, e_2, e_3)$ od V matrični prikaz

$$B(e) = \begin{bmatrix} -3 & -5 & -9 \\ 9 & 3 & 9 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dokažite da je B nilpotentan operator indeksa 3 i nađite jednu cikličku bazu za operator B.

Zadatak 4.

Neka je V konačno-dimenzionalan vektorski prostor dimenzije n. Neka je $N \in L(V)$ nilpotentan, ind $N = n$ i neka je $A \in L(V)$, $AN = NA$. Dokažite da je $\det(A + N) = \det A$.

Zadatak 5.

Neka je V konačno-dimenzionalan vektorski prostor i $A \in L(V)$ nilpotentan. Odredite indeks nilpotentnosti operatora A ako je $\operatorname{ind} A^3 = 4$, $\operatorname{ind} A^2 = 5$.

Opći slučaj - isječak iz skripte za predavanja

Teorem 3.7. *Neka je $N \in L(V)$ nilpotentan operator indeksa p. Tada postoji dekompozicija*

$$V = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \cdots \dot{+} V_m, \quad p_i = \dim V_i, \tag{3.8}$$

takva da

a) $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_m \geq 1$ *i* $p = p_1$,
b) *za svaki* i, V_i *je* N*–invarijantan,*
c) *za svaki* i, $N_i \overset{def}{=} N|_{V_i}$ *je nilpotentan indeksa* p_i.

U gornjem rastavu (3.8) dimenzije p_i *prostora* V_i *su između* 1 *i* p, *te nadalje, za svaki* $1 \leq k \leq p$, *rastav (3.8) sadrži točno*[2]

$$r(N^{k+1}) + r(N^{k-1}) - 2r(N^k)$$

k*–dimenzionalnih potprostora; drugim riječima*

$$\#\{i; \ \ p_i = k\} = r(N^{k+1}) + r(N^{k-1}) - 2r(N^k).$$

Zadatak 6.

Operator $B \in L(\mathbb{C}^4)$ zadan je svojim matričnim prikazom u bazi (e) sa

$$B(e) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pokažite da je B nilpotentan, odredite mu indeks i Jordanovu klijetku.

Zadatak 7.

Operator $N \in L(\mathbb{C}^4)$ zadan je svojim matričnim prikazom u kanonskoj bazi (e) sa

$$N(e) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Pokažite da je N nilpotentan, odredite mu indeks, Jordanovu klijetku i jednu njegovu Jordanovu bazu.