3. vježbe

Vektorski prostori - vježbe

Lucija Relić

Prirodoslovno-matematički fakultet — Matematički odsjek
Sveučilište u Zagrebu

listopad 2024.

Dualni prostor - Zadatak 4.

Neka je $\dim V = n \geq 3$ i neka su $f_1, f_2, f_3 \in V^*$ linearno nezavisni. Kolika je dimenzija vektorskog prostora $W = \{x \in V \mid f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = 0\}$?

Anihilator

Definicija

Neka je V n-dimenzionalni vektorski prostor, $W \leq V$. Tada skup

$$W^{\perp} = \{f \in V^* \mid f(x) = 0, \forall x \in W\}$$

zovemo anihilator potprostora W.

Zadatak 5. Dokažite $(W^{\perp})^{\perp} \cong W$.

Adjungirani operator

Definicija

Neka je $A \in L(V)$. Definiramo preslikavanje $A^* \colon W^* \to V^*$ s $A^*(g) = g \circ A$.

Zadatak 6. A^* je linearan operator.

Zadatak 7. $(AB)^* = B^* A^*$, za $B \colon V \to W$, $A \colon W \to U$.

Zadatak 8.

$A \in L(\mathbb{R}^4)$ ima u kanonskoj bazi (e) matricu $A(e) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Definiramo $e_1' := e_1$, $e_2' := e_1 + e_2$, $e_3' := e_1 + e_2 + e_3$, $e_4' := e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, $e_1'' := e_1$, $e_2'' := e_2$, $e_3'' := e_4$, $e_4'' := e_3$.

(a) $(e') = (e_1', e_2', e_3', e_4')$, $(e'') = (e_1'', e_2'', e_3'', e_4'')$ su baze od $\mathbb{R}^4$.

(b) Za vektor $x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^t$ odredite Ax u bazama (e), (e'), (e'').

(c) Nađite $A(e')$, $A(e'')$.

(d) Ako vektor $y \in \mathbb{R}^4$ u bazi (e') ima matricu $y(e') = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 & -8 \end{pmatrix}^t$, nađite Ay u bazama (e), (e'), (e'').

Spektar, svojstveni polinom i minimalni polinom

- svojstvena vrijednost operatora
- spektar operatora
- svojstveni potprostor operatora pridružen svojstvenoj vrijednosti
- geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti
- karakteristični polinom operatora
- algebarska kratnost svojstvene vrijednosti
- minimalni polinom operatora
- Hamilton-Cayleyev teorem

Zadatak 1.

Linearni operator $A \in L(V)$ u nekoj bazi (e) od V zadan je matricom

$$A(e) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nađite svojstvene vrijednosti od A te njihove algebarske i geometrijske kratnosti.

Zadatak 2. (Postupak za pronalaženje minimalnog polinoma)

Za operator $A \in L(\mathbb{R}^3)$ zadan matricom

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

nađite minimalni polinom μ_A.

Zadatak 3.

Odredite minimalni polinom operatora $A \in L(\mathbb{C}^3)$ zadanog na kanonskoj bazi (e) od $\mathbb{C}^3$ matričnim prikazom

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Je li operator dijagonalizabilan?

Zadatak 4.

Neka je V kompleksan n-dimenzionalan vektorski prostor, $n > 1$ i neka je $A \in L(V)$ takav da vrijedi $\mathrm{r}(A) = 1$, $\mathrm{tr}(A) + \det(A) = n$. Nađite k_A i μ_A.

Zadatak 5.

Operator A dan je matricom

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odredite parametre a i b ako je poznato da je A singularna matrica čije svojstvene vrijednosti imaju algebarsku kratnost 2.

Zadatak 6.

Neka je A linearan operator sa spektrom $\{-4, -1, 4, 6\}$. Odredite sve $\lambda \in \mathbb{Z}$ takve da je operator $A^2 - \lambda^2 I$ singularan.

Zadatak 7.

Neka je $A \in L(\mathbb{C}^4)$ (nad poljem $\mathbb{C}$) zadan matricom u nekoj bazi (f) sa

$$A(f) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Odredite minimalni polinom od A.
Odredite karakteristični polinom od A i ispitajte je li operator A dijagonalizabilan.
Izračunajte $A^{2026} - 4A^{2025} + 4A^{2024} + I$.