

LINEARNI MODELI 3

STATISTIČKI PRAKTIKUM 2

4. VJEŽBE

Neke varijable poticaja mogu biti kvalitativne po prirodi, primjerice boja očiju i sl. Takve varijable poticaja nekad zovemo *kategorijske varijable* ili *faktori*. Kako se ovakve varijable poticaja mogu ugraditi u naše modele?

Analiza kovarijance se bavi upravo takvim problemima gdje se pojavljuju kombinacije kvantitativnih i kvalitativnih varijabli poticaja.

Naša strategija je ugraditi kvalitativne varijable poticaja u model

$$Y = Xb + \varepsilon,$$

pri čemu ih moramo kodirati.

Primjer

- ▶ Y = promjena u razini kolesterola
- ▶ x = broj godina
- ▶ kvalitativna varijabla

$$d = \begin{cases} 0, & \text{ne uzima lijek} \\ 1, & \text{uzima lijek} \end{cases}$$

Ovisno o odnosu varijable poticaja x i kvalitativne varijable d biramo jedan od sljedećih linearnih modela;

1. Isti model za obje grupe

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$

> model1=lm(y~x)

2. Dva regresijska pravca s istim koeficijentom smjera

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 d + \varepsilon$$

> model2=lm(y~x+d) U modelu se javlja fiksni utjecaj lijeka.

3. Različiti pravci za svaku grupu

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 d + \beta_3 x \cdot d$$

> model3=lm(y~x*d) ili > model3=lm(y~x+d+x:d)

Utjecaj lijeka nije fiksni, već ovisi i o godinama.

U prvom slučaju je teško testirati utjecaj lijeka (imamo dva različita skupa podataka, svaki određuje svoj regresijski pravac). Drugi model efikasnije iskorištava sve podatke za procjenu zajedničkog koeficijenta smjera (uz pp. fiksnog utjecaja lijeka). Treći model uključuje interakciju između prediktora.

Interakcija vs. korelacija

- ▶ Korelacija - statistička ovisnost jedne varijable o drugoj
- ▶ Interakcija - utjecaj jedne varijable poticaja na zavisnu varijablu ovisi o drugoj varijabli poticaja

Između dvije varijable poticaja može postojati interakcija bez obzira na to postoji li između njih korelacija ili ne.

Kolinearnost

Koreliranost između prediktora - jedna varijabla može biti linearno predviđena pomoću ostalih (s određenom "točnošću").

Kolinearnost ne utječe na pouzdanost modela u cjelini (barem ne za dani skup podataka), nego na pojedine prediktore o kojima je riječ (procijenjeni parametri i p-vrijednosti mogu se značajno promijeniti ako napravimo male promjene u modelu ili podacima). Posljedica je da ne možemo procijeniti utjecaj prediktora na zavisnu varijablu. Matricu korelacija dobivamo na sljedeći način:

```
>summary(model, corr=T)
```

Primjer: *Dummy* varijabla s dva stupnja

Podaci za ovaj primjer se sastoje od visina x , dužina y i stila gradnje *style* srednjovjekovnih katedrala. Neke su romaničkog (r), a druge su gotičkog (g) stila. Podaci su upisani u `cathedral.txt`. Učitajmo podatke:

```
> k=read.table("cathedral.txt")
```

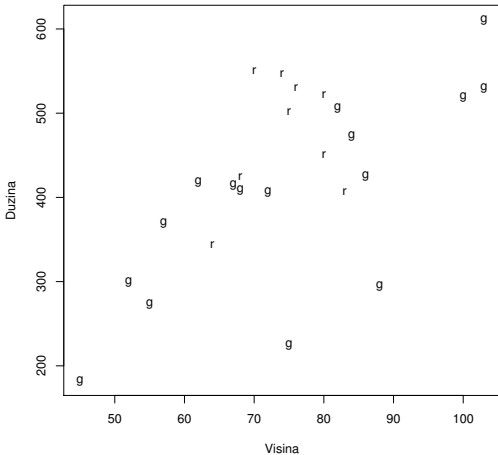
```
> k
```

	style	x	y
Durham	r	75	502
Gloucester	r	68	425

WinchesterG	g	103	530
Salisbury	g	84	473

Grafička analiza:

```
> plot(k$x,k$y,type="n",xlab="Visina",ylab="Duzina")  
> text(k$x,k$y,as.character(k$s))
```



Deskriptivna analiza:

```
> lapply(split(k,k$style),summary)
```

```
$g
```

style	x	y
g:16	Min. : 45.00	Min. :182.0
r: 0	1st Qu.: 60.75	1st Qu.:298.8
	Median : 73.50	Median :412.0
	Mean : 74.94	Mean :397.4
	3rd Qu.: 86.50	3rd Qu.:481.2
	Max. :103.00	Max. :611.0

```
$r
```

style	x	y
g:0	Min. :64.00	Min. :344.0
r:9	1st Qu.:70.00	1st Qu.:425.0
	Median :75.00	Median :502.0
	Mean :74.44	Mean :475.4
	3rd Qu.:80.00	3rd Qu.:530.0
	Max. :83.00	Max. :551.0

Model:

```
> model = lm(y ~ x * style,k)
> summary(model)
```

Call:

```
lm(formula = y ~ x * style, data = k)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-172.68	-30.22	23.75	55.78	89.50

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	37.111	85.675	0.433	0.669317
x	4.808	1.112	4.322	0.000301 ***
styler	204.722	347.207	0.590	0.561733
x:styler	-1.669	4.641	-0.360	0.722657

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 79.11 on 21 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.5412, Adjusted R-squared: 0.4757

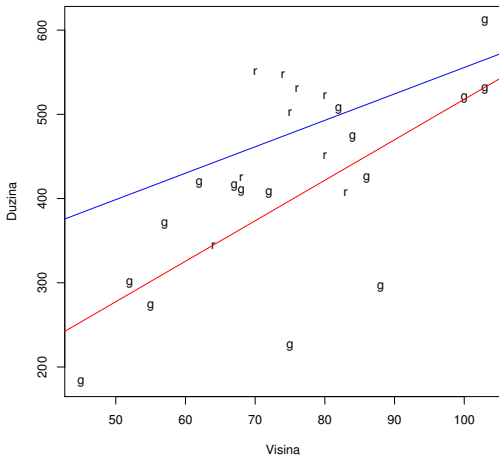
F-statistic: 8.257 on 3 and 21 DF, p-value: 0.0008072

Kako je kodirana varijabla `style` možemo vidjeti iz matrice modela **X**:

```
> model.matrix(model)
      (Intercept)    x styler x:styler
Durham           1  75      1      75
Canterbury       1  80      1      80
---
Old.St.Paul      1 103      0       0
Salisbury        1  84      0       0
```

Nacrtajmo pravce koji pripadaju modelu:

```
> abline(model$coef[-c(3,4)],col="red")  
> abline(model$coef[1]+model$coef[3],model$coef[2]+model$coef[4],col="blue")
```



Kako je koeficijent uz x:styler malen i nije značajan, model se može pojednostavniti.

```
> model1=lm(y~x+style,k)
> summary(model1)
```

Call:

```
lm(formula = y ~ x + style, data = k)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-172.67	-30.44	20.38	55.02	96.50

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	44.298	81.648	0.543	0.5929
x	4.712	1.058	4.452	0.0002 ***
styler	80.393	32.306	2.488	0.0209 *

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 77.53 on 22 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.5384, Adjusted R-squared: 0.4964

F-statistic: 12.83 on 2 and 22 DF, p-value: 0.0002028

Usporedba dvaju modela pokazuje opravdanost naše pretpostavke.

```
> anova(model1,model)
```

```
Analysis of Variance Table
```

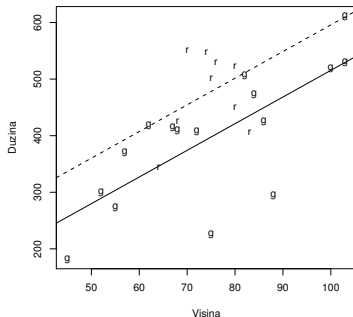
```
Model 1: y ~ x + style
```

```
Model 2: y ~ x + style + x:style
```

	Res.Df	RSS	Df	Sum of Sq	F	Pr(>F)
1	22	132223				
2	21	131413	1	810	0.1294	0.7227

Nacrtajmo sada dva pravca koji pripadaju ovim podacima.

```
> abline(g1$coef[-3])  
> abline(g1$coef[1]+g1$coef[3],g1$coef[2],lty=2)
```



Zaključak: za istu visinu Romaničke su katedrale duže 80.39 feet-a i za svako povećanje za 1 *foot*, oba tipa katedrale će biti oko 4.7 feet-a duže.

Gotičke katedrale su uzete za referentne jer slovo 'g' se nalazi ispred 'r' u abecedi. Slovo 'r' možemo napraviti referentnim.

```
> k$style = relevel(k$sty,ref="r")
> model1=lm(y~x+style,k)
> summary(model1)
```

```
Call:
lm(formula = y ~ x + style, data = k)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-172.67	-30.44	20.38	55.02	96.50

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	124.690	82.922	1.504	0.1469
x	4.712	1.058	4.452	0.0002 ***
styleg	-80.393	32.306	-2.488	0.0209 *

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 77.53 on 22 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.5384, Adjusted R-squared: 0.4964

F-statistic: 12.83 on 2 and 22 DF, p-value: 0.0002028

Kodiranje kvalitativnih varijabli

Kodiranje dvostupanjskih faktora nije jedinstveno, a još više je načina za kodiranje višestupanjskih faktora.

Za faktor koji ima k razina, potrebna nam je $k - 1$ *umjetna* varijabla za reprezentaciju. Jedan parametar se koristi da bi se ocijenio srednji efekt ili možda efekt nekog referentnog nivoa i $k - 1$ varijabla nam je potrebna kako bi pokrili preostale slučajeve. Postoje razne metode kodiranja, a mi ćemo se pozabaviti *tretirajućim kodiranjem*.

Tretirajuće kodiranje

Faktor koji ima 4 razine bit će kodiran sa 3 umjetne varijable

		Umjetne varijable		
		1	2	3
nivoi	1	0	0	0
	2	1	0	0
	3	0	1	0
	4	0	0	1

Ovakav način prvi nivo tretira kao standardni/referentni, a ostale uspoređuje u odnosu na njega.

Ovo je standardni način kodiranja umjetnih varijabli u R-u.

Zadatak

U datoteci `twins.txt` nalaze se podaci o rezultatima IQ testiranja za jednojajčane blizance. Jednog blizanca su odgajali stvarni roditelji, a drugog usvojitelji. Dostupni su i podaci o socijalnoj skupini kojoj pripadaju stvarni roditelji.

- (i) Grafički usporedite IQ posvojenog i IQ blizanca koji odrastao s biološkim roditeljima, pri tome naznačite socijalnu skupinu roditelja.
- (ii) Analizirajte ovisnost IQ posvojenog blizanca o IQ-u blizanca koji odrastao s biološkim roditeljima i socijalnom statusu roditelja. Izaberite najbolji model.
- (iii) Testirajte razlikuje li se IQ blizanaca?