Kolegij *Studentska natjecanja*, ak. god. 2022./2023.
http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/studnatj/

Tema br. 5:

Fourierova analiza na natjecanjima

Adrian Beker, Aleksandar Bulj

1 Fourierovi redovi - uvod i motivacija

Razmislimo li koje sve glatke 2π - periodične funkcije znamo, nakon nešto razmišljanja, došli bismo do funkcija $\sin(kx)$, $\cos(kx)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Nadalje, kako je linearna kombinacija 2π - periodičnih funkcija opet 2π - periodična, dobivamo vektorski prostor konačnih kombinacija trigonometrijskih funkcija koji ćemo označavati sa:

$$\mathcal{T} = \{\mathbb{1}\} \cup \{\sin(kx) : k \in \mathbb{N}\} \cup \{\cos(kx) : k \in \mathbb{N}\}.$$

Prirodno pitanje je je li konačnodimenzionalan i možemo li mu odrediti neku bazu? Nadalje, postoji li neka (neprekidna/glatka) 2π - periodična funkcija koja nije u tom prostoru?

Koristeći trigonometrijske identitete za prevođenje produkta u sumu, lako vidimo da vrijede sljedeći identiteti.

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \sin(kx)dx = \int_0^{2\pi} \cos(kx)dx = 0, \quad k \in \mathbb{N} \\
&\int_0^{2\pi} \sin(kx)\sin(lx)dx = \int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(lx)dx = 0, \quad k, l \in \mathbb{N},\ k \neq l \\
&\int_0^{2\pi} \sin(kx)\cos(lx)dx = 0, \quad k, l \in \mathbb{N} \\
&\int_0^{2\pi} \sin^2(kx)dx = \int_0^{2\pi} \cos^2(kx)dx = \pi, \quad k \in \mathbb{N}
\end{aligned} \tag{1}$$

Dakle, definiramo li skalarni produkt na skupu Riemann - integrabilnih funkcija na $[0, 2\pi]$ sa:

$$\langle f, g \rangle := \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx,$$

vidimo da su sve funkcije u $\mathcal{T}$ u parovima ortogonalne. Odatle odmah slijedi i linearna nezavisnost funkcija u $\mathcal{T}$. Naime, ako je $f(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{n}(a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx))$ konačna linearna kombinacija za koju vrijedi $f(x) = 0$ za sve $x \in [0, 2\pi]$, tada iz gornjih računa za $k \geq 1$ slijedi

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx \\
&= \int_0^{2\pi} \left(a_0 \cos(kx) + \sum_{j=1}^{n} (a_j \cos(jx)\cos(kx) + b_j \sin(jx)\cos(kx)) \right) dx \\
&= \pi a_k.
\end{aligned}$$

te analognim računom dobijemo da su svi koeficijenti jednaki 0.

Dakle, span($\mathcal{T}$) je beskonačno dimenzionalan vektorski prostor, a skup $\mathcal{T}$ čini ortogonalnu bazu. Navedene opservacije daju poprilično dobru karakterizaciju prostora span($\mathcal{T}$), ali prostor konačnih linearnih kombinacija možemo prirodno povezati prirodno sa poznatijim prostorom konačnih linearnih kombinacija - polinomima u jednoj varijabli.

Naime, iskoristimo li identitete:

$$\cos(kx) = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \quad \text{i} \quad \sin(kx) = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$

zaključujemo da svaku funkciju u span($\mathcal{T}$) možemo prikazati $\sum_{j=-n}^{n} c_j e^{ijx}$, odnosno u obliku $e^{-inx}P(e^{ix})$ za neki polinom P stupnja najviše $2n$. Dakle, "namatanjem" intervala $[0, 2\pi)$ na kružnicu, zaključujemo da je svaka funkcija iz span($\mathcal{T}$) jednaka vrijednosti na kružnici neke funkcije $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ oblika $f(z) = z^{-n}P(z)$ za neki $n \in \mathbb{N}$ i neki polinom P.

Time smo zapravo potpuno okarakterizirali navedeni vektorski prostor pa tako možemo i naći i funkcije koje se ne nalaze u span($\mathbb{T}$) (zadatak za zadaću), ali ostaje pitanje koje smo sve funkcije mogli dobiti da smo umjesto konačnih suma promatrali sume oblika:

$$a_0 + \sum_{k=0}^{\infty} a_n \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

Joseph Fourier (1768. - 1830.) mislio da se svaka funkcija može razviti u red gornjeg oblika, ali iako to nije istina, njegove opservacije su se pokazale toliko interesantnima i korisnima u raznim područjima matematike da su pokrenule cijelo područje matematike, koje je i danas aktivno - harmonijsku analizu.

1.1 Teorijski rezultati

Važna napomena. Budući da točkovni limes Riemann integrabilnih funkcija ne mora biti Riemann integrabilna funkcija i Riemannov integral nije u pravom smislu definiran za neograničene funkcije, za proučavanje Fourierovih redova esencijalan je bio razvoj Lebesguove mjere i Lebesgueovog integrala. Zbog toga u iskazima teorema koristimo L^p prostore, ali zbog primjerenosti predavanja mlađim studentima, **svaki $L^p([0,1])$ prostor ćemo tumačiti kao prostor Riemann integrabilnih funkcija** i tvrdnje dokazivati za njih.

Zbog ljepših normalizacija, koje ćemo uskoro vidjeti, u ovom odjeljku promatrat ćemo 1 - periodične funkcije umjesto 2π - periodičnih, ali svi rezultati se mogu analogno reformulirati i za 2π - periodične promatranjem $\tilde{f}(x) = f(2\pi x)$.

Kako je 1 - periodična funkcija potpuno definirana vrijednostima na $[0,1)$, često se periodične funkcije shvaćaju kao funkcije definirane na torusu $\mathbb{T}$, što je skup $[0,1)$ koji uz zbrajanje definirano sa $x \oplus y := \{x+y\}$ (gdje je $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$) čini grupu.

U želji za što manje apstrakcije, u daljnjem tekstu ćemo oznaku $\mathbb{T}$ koristiti u sljedećem kontekstu:

- $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ predstavlja 1 - periodičnu funkciju na $\mathbb{R}$ sa vrijednostima u $\mathbb{C}$.
- $\int_{\mathbb{T}} f$ označava integral 1 - periodične funkcije f po bilo kojem intervalu duljine 1. Naime, ako je f 1- periodična, tada za svaki $a \in \mathbb{R}$ vrijedi $\int_a^{1+a} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$ pa je definicija dobra.

U nastavku ćemo trebati integrale kompleksnih funkcija pa navedimo jednostavnu definiciju tog integrala.

Definicija 1. Nadalje, za $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ definiramo integral funkcije kao zbroj integrala realnog i kompleksnog dijela:

$$\int_0^1 f(x)dx := \int_0^1 \Re(f(x))dx + i \int_0^1 \Im(f(x))dx$$

Kako bismo mjerili sličnost funkcija, uvodimo sljedeće funkcije norme.

Definicija 2. Za $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ definiramo:

$$\|f\|_u = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

te ako je f integrabilna, za $1 \leq p < \infty$ definiramo:

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} := \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Radi kraćeg zapisa, kad se prostor po kojem integriramo podrazumijeva, pišemo samo $\|f\|_p$.

Za prvu funkciju se lako provjeri da zadovoljava svojstva norme, dok za drugu nejednakost trokuta nije očita. To je sadržaj sljedećeg teorema

Teorem 1 (Nejednakost Minkowskog)**.** *Za integrabilne funkcije* $f, g \in L^p([0,1])$ *vrijedi:*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Nastavljamo sa razvojem Fourierovih redova. Primijetimo da se uz definiciju

$$e_n(x) := e^{2\pi i n x}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

svi identiteti iz (1) mogu sažeti u

$$\langle e_m, e_n \rangle = \int_0^1 e^{2\pi i m x} e^{-2\pi i n x} dx = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \tag{2}$$

U prijevodu, koristeći kompleksne identitete, zaključujemo da je $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ je ortonormirana baza prostora konačnih linearnih kombinacija 1 - periodičnih trigonometrijskih funkcija $\{\sin(2\pi k x), \cos(2\pi k x) : k \in \mathbb{N}_0\}$. Zbog jednostavnog identiteta (2) ćemo u nastavku koristiti navedenu bazu umjesto trigonometrijskih funkcija.

Definicija 3. Za $f \in L^1(\mathbb{T})$ uvodimo oznaku

$$\widehat{f}(n) := \langle f, e_n \rangle = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx$$

za projekciju funkcije f na e_n.

Činjenicu da je e_n ortonormirana baza možemo zapisati na način da za svaku linearnu kombinaciju 1-periodičnih trigonometrijskih funkcija postoji dovoljno velik n takav da vrijedi

$$f = \sum_{j=-n}^{n} \langle f, e_j \rangle e_j = \sum_{j=-n}^{n} \widehat{f}(j) e_j.$$

Uvedimo oznake za parcijalne sume reda funkcija.

Definicija 4. Za $f \in L^1([0,1])$ definiramo sljedeće operatore parcijalnih suma

$$S_n[f](x) = \sum_{j=-n}^{n} \widehat{f}(j) e^{2\pi i j x}$$

i sljedeći operator prosjeka prvih parcijalnih suma

$$\sigma_n[f](x) := \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} S_j[f](x) = \sum_{|j| \leq n+1} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) \widehat{f}(j) e^{2\pi i j x}.$$

Uskoro će biti jasno zbog čega je drugi operator važan, ali vać po Cesaro - Stolzovom teoremu znamo da ako za neki $x \in [0,1]$ postoji $\lim_{n\to\infty} S_n[f](x)$, onda postoji i $\lim_{n\to\infty} \sigma_n[f](x)$ pa zaključujemo da je konvergenciju druge sume lakše (ili barem jednako teško) dokazati.

Uvedimo sljedeću važnu operaciju na funkcijama.

Definicija 5 (Konvolucija)**.** Za $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ definiramo funkciju $f * g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ sa

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{T}} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{T}} f(y)g(x-y)dy$$

Promotrimo sada ekvivalentne zapise gornjih operatora.

Lema 2. *Za $f \in L^1(\mathbb{T})$ vrijedi:*

$$S_n[f](x) = f * D_n(x) \quad i \quad \sigma_n[f](x) = f * F_n(x),$$

gdje su

$$D_n(x) = \frac{\sin((2n+1)\pi x)}{\sin(\pi x)} \quad i \quad F_n(x) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin((n+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}\right)^2 \tag{3}$$

funkcije koje nazivamo Dirichletovom i Fejerovom jezgrom.

Dokaz. Zapišemo li po definiciji $\widehat{f}(n)$, tada vrijedi

$$S_n[f](x) = \sum_{j=-n}^{n} \int_0^1 f(y)e^{2\pi ij(x-y)}dx = \int_0^1 \sum_{j=-n}^{n} e^{2\pi ij(x-y)} f(y)dy$$

Izlučivanjem $e^{-2\pi inx}$ i korištenjem sume geometrijskog niza dobijemo:

$$\sum_{j=-n}^{n} e^{2\pi ijx} = e^{-2\pi inx}\frac{e^{2\pi i(2n+1)x}-1}{e^{2\pi ix}-1} = \frac{e^{2\pi i(n+\frac{1}{2})x} - e^{-2\pi i(n+\frac{1}{2})x}}{e^{i\pi x}-e^{-i\pi x}} = \frac{\sin((2n+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}$$

i time je dokazana prva jednakost.

Za drugu jednakost, koristeći gore izvedenu formulu za Dirichletovu jezgru i teleskopiranjem izraza:

$$\sin(t)\sin((2j+1)t) = \frac{\cos(2jt) - \cos((2j+2)t)}{2}$$

uz $t = \pi x$, dobivamo

$$\sum_{j=0}^{n} D_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\sin((2j+1)\pi x)}{\sin(\pi x)} = \frac{1-\cos((2n+2)\pi x)}{2\sin^2(\pi x)} = \left(\frac{\sin((n+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}\right)^2$$

pa vrijedi:

$$\sigma_n[f](x) = \frac{1}{n+1}\int_0^1 f(y)\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} D_n(x-y)dy = f * F_n(x),$$

što je i trebalo dokazati. □

Važno svojstvo konvolucije je to da u frekvencijskoj domeni predstavljaju množenje koeficijenata.

Lema 3. *Neka su $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Tada vrijedi $\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$*

Dokaz. Iz Fubinijevog teorema i zamjene varijabli $x - y \to z$ slijedi:

$$\begin{aligned}\widehat{f * g}(n) &= \int_{\mathbb{T}} f * g(x) e^{-2\pi i n x} dx = \int_{\mathbb{T}^2} f(x-y)g(y)dy e^{-2\pi i n x} dx \\ &= \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} f(x-y) e^{-2\pi i n (x-y)} dx g(y) e^{-2\pi i y} dy = \int_{\mathbb{T}} \widehat{f}(n) g(y) e^{-2\pi i y} dy \\ &= \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)\end{aligned}$$

□

Alternativni dokaz. Dokaz za konačne kombinacije elemenata baze možemo vidjeti i jednostavnije. Neka su $f(x) = \sum_{j=-m}^{m} a_j e^{2\pi i j x}$ i $g(x) = \sum_{k=-n}^{n} b_k e^{2\pi i k x}$. Tada korištenjem identiteta (2) vrijedi:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{T}} \sum_{j,k} a_j b_k e^{2\pi i j (x-y)} e^{2\pi i k y} dy = \sum_{k,j} a_j b_k e^{2\pi i j x} \int_{\mathbb{T}} e^{2\pi i (k-j) y} dy = \sum_{j} a_j b_j e^{2\pi i j x}.$$

Sada se iz desne strane iščitaju Fourierovi koeficijenti. □

Nastavimo sa tehničkom lemom o aproksimaciji integrabilnih funkcija neprekidnima. Navedena lema vrijedi za sve L^p norme za $p \in [1, \infty)$, ali predavač nije upoznat sa dokazom koji ne koristi neku varijantu Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji za $p > 1$.

Lema 4. *Neka je $f \in L^1(\mathbb{T})$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji neprekidna funkcija g takva da je $\|f - g\|_1 < \varepsilon$.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan, $M := \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Po definiciji gornje Darbouxove sume postoji particija $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1$ i funkcija $h(x) = \sum_{j=0}^{N-1} M_j \mathbb{1}_{[x_j, x_j+1)}$, gdje je $M_j := \sup_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x)$ koja odgovara nekoj gornjoj Darbouxovoj sumi za koju vrijedi

$$\int_0^1 h(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} < \int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 h(x)dx.$$

Po definiciji funkcije h vrijedi $f(x) \leq h(x)$ pa tvrdimo da možemo definirati funkciju g kao modifikaciju funkcije h tako spojimo visine M_{j-1} i M_j na malim okolinama točke x_j, a da integral ne povećamo za više od $\frac{\varepsilon}{2}$ ukupno.

To napravimo na sljedeći način Ako je $M_{j-1} < M_j$, onda možemo funkciju h na intervalu $[x_j - \delta_j, x_j]$ zamijeniti pravcem koji spaja točke $(x_j - \delta_j, M_{j-1})$ i (x_j, M_j), dok u slučaju $M_{j-1} > M_j$ modificiramo analogno funkciju desno od x_j. Konačno, moramo paziti i da je $g(0) = g(1)$ pa modificiramo funkciju h na okolini 0 ili 1 na isti način kao i ranije, samo za brojeve M_N i M_0.

Gore navedenim postupkom integral funkcije povećamo za sumu površina trokuta od kojih svaki ima površinu $\delta_j M$ pa odabirom dovoljno malog δ_j oko svake točke x_j, tako da vrijedi $\sum_j \delta_j M < \frac{\varepsilon}{2}$ dobivamo funkciju g za koju vrijedi $f(x) \le g(x)$ i

$$0 \le \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx = \int_0^1 (g(x) - f(x)) dx < \int_0^1 h(x) dx + \frac{\varepsilon}{2} - \int_0^1 f(x) dx < \varepsilon.$$

□

Lema 5 (Riemann - Lebesgueova lema)**.** *Za* $f \in L^1(\mathbb{T})$ *vrijedi* $\lim_{n\to\pm\infty} \widehat{f}(n) = 0$.

Dokaz. Dokažimo najprije tvrdnju za neprekidne funkcije. Zbog $e^{\pi i} = -1$ vrijedi

$$\widehat{f}(n) = \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-2\pi i n x} dx = -\int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-2\pi i n (x - \frac{1}{2n})} dx$$

pa uzimanjem prosjeka gornja dva integrala i korištenjem nejednakosti trokuta dobijemo

$$|\widehat{f}(n)| \le \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} \left| f(x) - f\left(x - \frac{1}{2n}\right) \right| dx.$$

Sa analize znamo da je neprekidna funkcija na kompaktnom skupu uniformno neprekidna. Prema tome, ako primijenimo tvrdnju na malo veći skup od $[0,1]$, npr. $[-1/2, 3/2]$, zaključujemo da za svaki dovoljno velik n i za svaki $x \in [0,1]$ vrijedi

$$|f(x) - f(x - \frac{1}{2n})| < \varepsilon$$

pa iz proizvoljnosti $\varepsilon > 0$ nakon integriranja slijedi tvrdnja.

Ako je sada f proizvoljna Riemann integrabilna funkcija, tada po prethodnoj lemi postoji neprekidna funkcija g takva da je $\int_{\mathbb{T}} |f - g| < \frac{\varepsilon}{2}$ pa vrijedi:

$$|\widehat{f}(n) - \widehat{g}(n)| = \left| \int_{\mathbb{T}} (f(x) - g(x)) e^{-2\pi i \xi x} dx \right| \le \int_{\mathbb{T}} |f(x) - g(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Odabirom proizvoljnog $\varepsilon > 0$ i korištenjem prethodnog dijela dokaza, znamo da je $\widehat{g}(n) < \frac{\varepsilon}{2}$ čim je n dovoljno velik. Iz nejednakosti trokuta i prethodne ocjene zaključujemo da čim je n dovoljno velik, vrijedi

$$|\widehat{f}(n)| < |\widehat{f}(n) - \widehat{g}(n)| + |\widehat{g}(n)| < \varepsilon.$$

Kako je $\varepsilon > 0$ proizvoljan, slijedi tvrdnja. □

Sljedeća lema ključni je rezultat ovog predavanja.

Teorem 6 (Fejerov teorem)**.** *Ako je funkcija* $f \in L^1(\mathbb{T})$ *neprekidna u točki* $x \in \mathbb{T}$*, tada* $\sigma_n[f](x) \to f(x)$*. Ako je dodatno* $f \in C(\mathbb{T})$*, tada je konvergencija uniformna, tj. vrijedi* $\sigma_n[f] \xrightarrow{u} f$*.*

Dokaz. Fejerova jezgra zadovoljava sljedećea svojstva:

(S1) $\int_0^1 F_n(x)dx = 1$.

(S2) $F_n(x) \geq 0$, za sve $x \in [0, 1]$

(S3) Za $\delta > 0$ vrijedi:
$$\lim_{n\to\infty} \int_{(-\delta,\delta)^c} F_n(x)dx = 0.$$

Prvo svojstvo slijedi iz jednadžbe (2) i definicije:
$$\int_0^1 F_n(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} D_j(x) \right) dx = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \int_0^1 D_j(x)dx = 1.$$

Drugo svojstvo slijedi iz (3), dok za treće svojstvo primijetimo da iz iste jednadžbe i ocjene $\sin(t) \geq \frac{\pi}{2}t$ za $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (koja je posljedica konkavnosti funkcije sinus na $[0, \frac{\pi}{2}]$) slijedi
$$F_n(x) \leq \frac{C}{(n+1)x^2}, x \in [0, \frac{1}{2}]$$

pa vrijedi:
$$\int_{(-\delta,\delta^c)} F_n(x)dx \leq \frac{2C}{n+1} \int_\delta^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^2}dt \leq \frac{C}{n+1} \left(\frac{1}{\delta} - 2 \right).$$
pa puštanjem $n \to \infty$ slijedi tvrdnja.

Za dokaz prve tvrdnje teorema odaberemo $\delta > 0$ tako da je $|f(x-y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ za sve $y \leq \delta$. Označimo i $M = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Tada vrijedi
$$\begin{aligned}
|\sigma_n[f](x) - f(x)| &= \left| \int_0^1 (f(x-y) - f(x))F_n(y)dy \right| \\
&\leq \int_{-\delta}^{\delta} |f(x-y) - f(x)|F_n(y)dy + \int_{(-\delta,\delta)^c} |f(x-y) - f(x)|F_n(y)dy \\
&\leq \varepsilon \int_0^1 F_n(y)dy + M \int_{(-\delta,\delta)^c} F_n(y)dy \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + M \int_{(-\delta,\delta)^c} F_n(y)dy
\end{aligned}$$

gdje smo u prvom redu koristili svojstvo S2, u drugom nejednakost trokuta i svojstvo S1. Konačno, koristeći svojstvo S3 zaključujemo da je posljednji izraz manji od ε čim je n dovoljno velik.

Dokaz druge tvrdnje je isti samo primijetimo da u slučaju neprekidne funkcije možemo odabrati $\delta > 0$ neovisno o x budući da je neprekidna funkcija na kompaktnom skupu $\mathbb{T}$ uniformno neprekidna. $\square$

Napomena. U prethodnom rezultatu nismo mogli promatrati promatrati $S_n[f]$ umjesto $\sigma_n[f]$ jer jezgra od S_n ne zadovoljava svojstva S2 i S3, a može se pokazati (ali iz) da postoji neprekidna funkcija čiji Fourierov red ne konvergira u proizvoljnoj točki, recimo $x = 0$.

Sljedeći teorem djelomično odgovara na početno pitanje o razvoju funkcija u beskonačnu sumu umjesto konačne.

Teorem 7 (Parsevalov teorem). *Neka je $f \in L^2(\mathbb{T})$, tada vrijedi*

$$\|f - S_n[f]\|_{L^2} \to 0.$$

Posebno, to znači

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2 = \int_0^1 |f(x)|^2 dx$$

Napomena. Dokaz koji prestavljamo dokazuje tvrdnju samo za $f \in C(\mathbb{T})$ umjesto za Riemann integrabilne funkcije jer svaki dokaz kojeg je autor svjestan općenitije funkcije zahtjeva neki oblik Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji.

Dokaz. Suma u drugom dijelu iskaza je suma pozitivnih brojeva pa ne ovisi o poretku sumiranja i limes postoji. Označimo

$$S := \lim_{n \to \infty} \sum_{j=-n}^{n} |\widehat{f}(j)|^2.$$

Iz ortonormiranosti funkcija e_j slijedi

$$\sum_{j=-n}^{n} |\widehat{f}(j)|^2 = \|S_n[f]\|_2^2 \quad \text{i} \quad \langle f - S_n[f], S_n[f] \rangle = 0$$

pa iz definicije od S i Pitagorinog poučka u obliku

$$\|f\|_2^2 = \|f - S_n[f]\|_2^2 + \|S_n[f]\|^2.$$

slijedi da su tvrdnje u iskazu teorema ekvivalentne.

Dokažimo da je $\lim_{n\to\infty} \|f - S_n[f]\|_2 = 0$. Iz nejednakosti trokuta vrijedi

$$\|f - S_n f\|_2 \leq \|f - \sigma_n[f]\|_2 + \|\sigma_n f - S_n[f]\|_2. \tag{4}$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan, i neka je n_0 t.d. je $S(n_0) =: \sum_{|j|>n_0} |\widehat{f}(j)|^2 < \frac{\varepsilon}{3}$. Iz Fejerovog teorema postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n > n_1$ vrijedi $\|f - \sigma_n[f]\|_u < \frac{\varepsilon}{3}$ pa slijedi

$$\|f - \sigma_n[f]\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x) - \sigma_n[f](x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|f - \sigma_n[f]\|_u \left(\int_0^1 1 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

S druge strane, za $n > n_0$ vrijedi

$$\|\sigma_n f - S_n f\|_2^2 = \sum_{|j| \le n} \frac{j^2}{n^2} |\widehat{f}(j)|^2 \le \sum_{|j| \le n_0} \frac{n_0^2}{n^2} |\widehat{f}(j)|^2 + \sum_{n_0 < |j| \le n} \frac{n^2}{n^2} |\widehat{f}(j)|^2 \le \frac{n_0^2}{n^2} S + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Biranjem dovoljno velikog n da je $\frac{n_0^2 S}{n^2} < \frac{\varepsilon}{3}$, iz prethodne ocjene i (4) dobivamo da za dovoljno velike $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\|f - S_n[f]\|_2 < \varepsilon,$$

što je i trebalo dokazati. □

Zapišemo li prethodni rezultat neformalno u obliku

$$f(x)" = " \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x},$$

to je zapravo rezultat koji smo htjeli na početku, ali uz **važnu napomenu** da konvergencija na desnoj strani nije točkovna nego u smislu da L^2 norma razlike konvergira u 0 .

Da bismo gornju konvergenciju u smislu norme zamijenili točkovnom, potrebno je zahtijevati nešto jači uvjet na glatkoću funkcije. Navodimo samo iskaz jer dokaz ne stignemo napraviti na ovom predavanju.

Teorem 8 (Dirichletov teorem). *Neka je $f \in L^1(\mathbb{T})$ takva da za svaki $x \in \mathbb{T}$ postoje $\lim_{t\to x-} f'(t)$ i $\lim_{t\to x+} f'(t)$. Tada za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{j=-n}^{n} \widehat{f}(j) e^{2\pi i j x} \to \frac{f(x+) + f(x-)}{2},$$

gdje je $f(x+) = \lim_{t\to x+}$ i $f(x-) = \lim_{t\to x-} f(t)$.

Posebno ako je $f \in C^1(\mathbb{T})$, tada za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=-n}^{n} \widehat{f}(j) e^{2\pi i j x} = f(x).$$

1.2 Primjene

Kao prvu primjenu navodimo rezultat koji je dio rezultata o ekvidistribuiranosti niza $(\{k\alpha\})_{k\in\mathbb{N}}$ za iracionalan broj α.

Primjer 1. Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$ iracionalan broj i $f \in C^1([0,1])$. Dokažite da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\{k\alpha\}) = \int_0^1 f(x)dx$$

Rješenje. Dokažimo najprije tvrdnju funkcije f oblika $f(x) = e^{2\pi ijx}$, $j \in \mathbb{Z}$. Kada je $j = 0$, obje strane su jednake 1. Za $j \neq 0$ vrijedi $\int_0^1 f(x)dx = 0$ i zbog toga što je α iracionalan, vrijedi $e^{2\pi ij\alpha} \neq 1$ pa zaključujemo da vrijedi

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(\{k\alpha\})\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{n} e^{2\pi ijk\alpha}\right| = \left|\frac{1-e^{2\pi ij(n+1)\alpha}}{n(1-e^{ij\alpha})}\right| < \frac{2}{n|1-e^{2\pi ij\alpha}|} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Nadalje, po linearnosti obje strane jednakosti, tvrdnja vrijedi za sve funkcije f oblika $f(x) = \sum_{j=-N}^{N} a_j e^{2\pi ijx}$.

Proširimo tvrdnju sada na sve neprekidne funkcije. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Označimo $L_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(\{k\alpha\})$ i $I(f) = \int_0^1 f(x)dx$.

Po Fejerovom teoremu postoji $N_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $N > N_0$ vrijedi $\|f - \sigma_N[f]\|_u < \frac{\varepsilon}{2}$. Po nejednakosti trokuta za sumu i integral to iznači da za sve n i za sve $N > N_0$ vrijedi

$$|L_n(f - \sigma_N[f])| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{i} \quad |I(f - \sigma_N[f])| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Po prvom dijelu zadatka, budući da je Fejerova jezgra funkcija navedenog oblika, postoji n_0 takav da za sve $n > n_0$ vijedi $|L_n(\sigma_N[f]) - I(\sigma_N[f])| < \frac{\varepsilon}{2}$ pa koristeći nejednakost trokuta zaključujemo da za sve $n > n_0$ vrijedi:

$$|L_n(f) - I(f)| < |L_n(f - \sigma_N[f]) - I(f - \sigma_n[f])| + |L_n(\sigma_N[f]) - I(\sigma_N[f])| < \varepsilon.$$

□

Primjer 2 (Weierstrassov teorem o aproksimaciji)**.** Za neprekidnu funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ i proizvoljan $\varepsilon > 0$ postoji polinom p takav da je $\|p - f\|_u < \varepsilon$.

Dokaz. Promatranjem funkcije $f_1 : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ zadane s $f_1(x) := f(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x)$ možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je $[a, b] = [-1, 1]$.

Definirajmo sada funkciju $g : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ sa

$$g(x) := f(\cos(2\pi x)).$$

Ona je očito neprekidna, parna i 1 - periodična. Zbog parnosti funkcije g, vrijedi:

$$\widehat{g}(-n) = \int_{\mathbb{T}} g(x)e^{2\pi inx}dx = \big|x \mapsto -x\big| = \int_{\mathbb{T}} g(-x)e^{-2\pi inx}dx = \int_{\mathbb{T}} g(x)e^{-2\pi inx}dx = \widehat{g}(n),$$

a zbog toga što je g realna i prethodnog računa slijedi:

$$\overline{\widehat{g}(n)} = \overline{\int_{\mathbb{T}} g(x)e^{-2\pi inx}dx} = \int_{\mathbb{T}} \overline{g(x)e^{-2\pi inx}}dx = \int_{\mathbb{T}} g(x)e^{2\pi inx}dx = \widehat{g}(-n) = \widehat{g}(n)$$

pa zaključujemo da je $\widehat{g}(n) \in \mathbb{R}$ za sve $n \in \mathbb{Z}$.

Koristeći prethodne opservacije računamo slijedi

$$\begin{aligned}
\sigma_n[g](x) &= \sum_{j=-n}^{n}\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)\widehat{g}(j)e^{2\pi ijx} \\
&= \widehat{g}(0)+\sum_{j=1}^{n}\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)\widehat{g}(j)(e^{2\pi ijx}+e^{-2\pi ijx}) \\
&= \widehat{g}(0)+2\sum_{j=1}^{n}\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)\widehat{g}(j)\cos(2\pi jx).
\end{aligned}$$

Indukcijom po j se lako vidi da se se funkcija $\cos(jt)$ može zapisati kao polinom stupnja j u varijabli $\cos(t)$, a polinom T_j za koji vrijedi $\cos(jt) = T_j(\cos t)$ zove se Čebiševljev polinom 1. vrste pa iz gornjeg raspisa zaključujemo da postoji polinom p_n stupnja najviše n takav da je

$$\sigma_n[g](x) = p_n(\cos(2\pi x)).$$

Biranjem n dovoljno velikog slijedi da za svaki $x \in [0,1]$, iz teorema 6 slijedi da je

$$\sup_{x\in[0,1]} |g(x) - p(\cos(2\pi x))| < \varepsilon.$$

Prethodno znači posebno i da je $\sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]}|f(\cos(2\pi x)) - p(\cos(2\pi x))| < \varepsilon$ pa supstitucijom $y = \cos(2\pi x)$ slijedi $\sup_{y\in[-1,1]}|f(y) - p(y)| < \varepsilon$, što je i trebalo dokazati. □

Sljedeća primjena je dokaz poznatog identiteta.

Primjer 3 (Basel problem)**.** Dokažite da je $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Rješenje. Neka je f definirana kao 1-periodično proširenje funkcije $x \mapsto |x|\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$. Tada je $\widehat{f}(0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|x|dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} xdx = \frac{1}{4}$. Nadalje, budući da je f parna funkcija, to je funkcija $x \mapsto f(x)\sin(2\pi nx)$ neparna pa je njen integral po simetričnom intervalu oko 0 jednak 0. Korištenjem navedene opservacije i parcijalne integracije, slijedi:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(n) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|x|e^{-2\pi inx}dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|x|\cos(2\pi nx) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} x\cos(2\pi nx)dx \\
&= x\frac{\sin(2\pi nx)}{\pi n}\bigg|_{x=0}^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\pi n}\int_0^{\frac{1}{2}}\sin(2\pi nx)dx \\
&= \frac{-1+\cos(\pi n)}{2\pi^2 n^2} = -\frac{1}{\pi^2 n^2}\mathbb{1}_{2\mathbb{Z}+1}(n)
\end{aligned}$$

Budući da funkcija zadovoljava uvjete Dirichletovog teorema, primjenom teorema u točki $x = 0$ dobijemo da je $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, ali kako taj teorem nismo dokazali, zbog potpunosti dokaza u nastavku koristimo Fejerov teorem i Cesaro - Stolzov toerem za dokaz navedene tvrdnje.

Koristeći Fejerov teorem za $x = 0$, znamo da je

$$0 = f(x) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n[f](0) = \frac{1}{4} - \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi^2} \sum_{j=0}^{n} \left(1 - \frac{2j+1}{2n+1}\right) \frac{1}{\pi^2(2j+1)^2},$$

odnosno ekvivalentno:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \left(1 - \frac{2j+1}{2n+1}\right) \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Označimo li $N = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2}$ (znamo da limes postoji jer je suma pozitivnih članova), iz Cesaro-Stolzovog teorema i prethodnog računa slijedi:

$$\frac{\pi^2}{8} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=0}^{n}(2n-2j)\frac{1}{(2j+1)^2}}{2n+1} \overset{C-S}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(2j+1)^2} = N.$$

Konačno, opservacijom da je

$$S := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j)^2} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{S}{4} + N,$$

slijedi da je $S = \frac{4}{3}N = \frac{\pi^2}{6}$.

$\square$

Primjer 4 (Putnam 2020, A6)**.** Neka je

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{n + \frac{1}{2} - k}{(n+1)(2k+1)}\right) \sin((2k+1)x).$$

Odredite najmanji $M > 0$ tako da za sve $n \in \mathbb{N}$ i $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $|f_n(x)| \leq M$.

Rješenje. Primijetimo da je navedeni izraz zapravo $2n+1$-va Cesraova suma Fourierovog reda $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$. Odredimo funkciju f kojoj je to Fourierov red. Po neparnosti je dovoljno odrediti za $x \in [0, \pi]$. Računamo za $0 < x < \pi$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1} = \int_0^x \sum_{k=0}^{n} \cos((2k+1)t)dt = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\sin(2(n+1)t)}{\sin t} dt \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}\right) \sin(2(n+1)t)dt + \frac{1}{2} \int_0^{(2n+1)x} \frac{\sin(u)}{u} du \end{aligned}$$

Kako je funkcija $t \mapsto (\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t})\mathbb{1}_{[0,x]}(t)$ Riemann integrabilna, po Riemann-lebesgueovoj lemi prvi integral ide u 0, a drugo je poznati integral i jednak je $\frac{\pi}{4}$ (dokaz za zadaću). Dakle, tražena funkcija je $f(x) = \frac{\pi}{4}\mathbb{1}_{(0,\pi)} - \frac{\pi}{4}\mathbb{1}_{(-\pi,0)}$. Sada koristeći svojstva S1 i S2 Fejerove jezgre i ocjenu $|f| \leq \frac{\pi}{4}$, zaključujemo:

$$|f_n(x)| = \left|\int_0^{2\pi} f(x-y)F_{2n+1}(y)dy\right| \leq \int_0^{2\pi} |f(x-y)|F_{2n+1}(y)dy \leq \int_0^{2\pi} \frac{\pi}{4}F_{2n+1}(x)dx = \frac{\pi}{4}.$$

Konačno, budući da je f neprekidna u svim točkama $x \neq k\pi$, iz Fejerovog teorema slijedi da $f_n(x) \to \pm\frac{\pi}{4}$ pa zaključujemo da je $M = \frac{\pi}{4}$ optimalna ocjena.

Napomena. Alternativno rješenje može se naći na `https://kskedlaya.org/putnam-archive/2020s.pdf` □

Primjene završavamo teškim problemom sa IMC-a kojega navedene godine nitko nije riješio, a poznavanje osnovnih pojmova iz Fourierovih redova značajno pomaže u rješenju zadatka.

Primjer 5 (IMC 2009, Day 1 P4)**.** Neka je $p(z) = a_0 + \cdots + a_n z^n$ kompleksni polinom, neka je $1 \geq c_0 \geq \cdots \geq c_n \geq 0$ konveksan niz (takav da vrijedi $c_k \leq \frac{c_{k-1}+c_{k+1}}{2}$ za $k = 1, \ldots, n-1$) i neka je polinom q zadan s:

$$q(z) = c_0a_0 + c_1a_1z + \cdots + c_na_nz^n.$$

Dokažite da je

$$\sup_{z:|z|\leq 1} |q(z)| \leq \sup_{z:|z|\leq 1} |p(z)|.$$

Rješenje. Zapišemo li $z = re^{2\pi it}$, vrijedi

$$p(re^{2\pi it}) = \sum_{k=0}^{n} a_k r^k e^{2\pi ikt}, \quad q(re^{2\pi it}) = \sum_{k=0}^{n} c_k a_k r^k e^{2\pi ikt}.$$

Primijeitmo li sada da za fiksan r vrijedi da je k-ti Fourierov koeficijent desne sume, jednak k-tom koeficijentu lijeve sume pomnoženom sa c_k i sjetimo li se da se množenje koeficijenata dobije promatranjem konvolucije funkcija (a za konvoluciju samo smo rekli da je "uprosječivanje" funkcije), to nam sugerira sljedeću jaču formulaciju.

Dokazat ćemo da za svaki $r \in [0,1]$ vrijedi

$$\sup_{t\in[0,1]} |q(re^{2\pi it})| \leq \sup_{t\in[0,1]} |p(re^{2\pi it})|.$$

Primijetimo još da je dovoljno gornju tvrdnju dokazati samo za $r = 1$ zbog supstitucije $\tilde{a_k} := r^k a_k$. Prema tome, označimo li

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{2\pi ikt}, \quad g(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k a_k e^{2\pi ikt},$$

treba dokazati da je $\|g\|_u \leq \|f\|_u$.

Za funkciju K s kojom trebamo konvoluirati f da bi vrijedilo $\widehat{f * K}(k) = c_k \widehat{f}(k)$ za $k \geq 0$ očito vrijedi $\widehat{K}(k) = c_k$, $k \geq 0$. Međutim, htjeli bismo da K bude realna i, po mogućnosti, nenegativna funkcija da možemo primijeniti nejednakost trokuta za integrale pa onda ima smisla definirati i $\widehat{K}(k) = c_{-k}$ za $k < 0$. Na taj način dobijemo funkciju

$$K(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(e^{2\pi ikt} + e^{-2\pi ikt}) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k(e^{2\pi ikt} + e^{-2\pi ikt}).$$

Ukoliko je $c_k = 1$ za sve k, navedena jezgra je samo D_n i ona nije nenegativna, ali vrijedi $f * D_n = D_n$ pa nam to sugerira da je dobro odvojiti taj izraz.

Skica veličine koeficijenata sugerira nam da postoji niz $(\alpha_k)_{k=0}^{n-1}$ nenegativnih realnih brojeva takav da je $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k = 1 - c_n$. Prema tome, postoji rastav

$$K(t) = c_n D_n(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k F_k(t).$$

Koristeći svojstva Fejerove jezgre S1 i S2, za svaki k vrijedi

$$\|f * F_k\|_u \leq \int_0^1 |f(x-y)| F_k(y) dy \leq \|f\|_u \int_0^1 F_k(y) dy = \|f\|_u.$$

Konačno, tražena nejednakost sada slijedi iz:

$$\|g\|_u = \|f * K\|_u \leq c_n \|f * D_n\|_u + \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \|f * F_n\|_u = c_n \|f\|_u + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \|f\|_u = 1.$$

Napomena 1. Rastav se formalno, uz oznaku $d_0(t) = 1$, $d_j(t) = e^{2\pi ijt} + e^{-2\pi ijt}$ i opservaciju da je $\sum_{j=0}^{k} d_j(t) = D_k(t)$ može dobiti dvostrukom primjenom Abelove sumacije na način:

$$\begin{aligned}
K(t) &= \sum_{k=0}^{n} c_k d_k(t) = c_n \left(\sum_{k=0}^{n} d_k(t) \right) + \sum_{k=0}^{n-1} (c_k - c_{k+1}) \sum_{j=0}^{k} d_k(t) \\
&= c_n D_n(t) + \sum_{k=0}^{n-1} (c_k - c_{k+1}) D_k(t) \\
&= c_n D_n(t) + (c_{n-1} - c_n) \left(\sum_{k=0}^{n-1} D_k(t) \right) + \sum_{k=0}^{n-2} (c_k - 2c_{k+1} + c_{k+2}) \sum_{j=0}^{k} D_j(t) \\
&= c_n D_n(t) + (c_{n-1} - c_n) n F_{n-1}(t) + \sum_{k=0}^{n-2} (c_k - 2c_{k+1} + c_{k+2})(k+1) F_k(t)
\end{aligned}$$

Napomena 2. Student koji zna kompleksnu analizu uočit će da je navedena "jača" formulacija zadatka zbog principa maksimuma modula za holomorfne funkcije zapravo ekvivalentna polaznom zadatku i mogli smo odmah reći da je dovoljno promotriti supremum po z takvima da je $|z| = 1$, ali kako nismo dokazali taj teorem, nismo ga koristili u dokazu. $\square$