Osnove teorije vjerojatnosti

Zadaci vježba

PMF-MO, Sveučilište u Zagrebu

zimski semestar – 2023

Zadatak 1. Neka je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ te $\mathcal{F} = \sigma\{\{1\}, \{1, 3, 5\}\}$. Odredite sve elemente od $\mathcal{F}$. Provjerite da li su sljedeća preslikavanja sl. varijable na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

A. $X_a(\omega) = \omega$

B. $X_b(\omega) = 6 \cdot \mathbb{1}_\omega$ paran

C. $X_c(\omega) = 2 - \mathbb{1}_{\{3,4\}}(\omega)$

D. $X_d(\omega) = \left[\sin((\pi/6) \cdot \mathbb{1}_{\{2,3,4,5,6\}}(\omega)\right]$

E. $X_e(\omega) = \mathbb{1}_{\{1,2\}}(\omega) + \mathbb{1}_{\{4,6\}}(\omega)$

F. $X_f(\omega) = \mathbb{1}_{\{1,2\}}(\omega) \cdot \mathbb{1}_{\{4,6\}}(\omega)$

Zadatak 2. Precizno dokažite za $A, B \in \mathcal{F}$ vrijedi $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Zadatak 3. Precizno dokažite da je za $\mathcal{F}$-izmjerive sl. varijable $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ i preslikavanje $(X + Y^2)(\omega) = X(\omega) + Y^2(\omega)$ $\mathcal{F}$-izmjerivo (uputa: smijete koristiti tvrdnju o izmjerivosti neprekidnih preslikavanja).

Zadatak 4. Ako su A_1, A_2, A_3 nezavisni dogadjaji, pokažite iz definicije da to vrijedi i za A_1^c, A_2, A_3.

Zadatak 5. Postoji li funkcija distribucije F sa svojstvom $F(q) - F(q-) > 0$ za svaki racionalan broj $q \in (0, 1)$?

Zadatak 6. Ako je $n \in \mathbb{N}$ broj kuglica u nekoj posudi, $r \leq n$ broj crvenih kuglica (neka su preostale bijele), pretpostavite da nasumično izvlačimo $m \leq n$ kuglica i da sl. varijabla X modelira broj crvenih kuglica u tako dobivenom uzorku. Odredite razdiobu sl. varijable X.

Zadatak 7. Ako je $X \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$, odredite $F^{\leftarrow}(u)$ za $u \in (0, 1)$.

Zadatak 8. Ako je $X \sim Ber(p)$, $p \in (0,1)$, odredite neku funkciju φ takvu da

$$Y := \varphi(X) \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}.$$

Zadatak 9. Odredite primjer funkcije distribucije F koja ima prekid u svakoj točki $k \in \mathbb{Z}$.

Zadatak 10. Neka su $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ sl. varijable takve da za neke nizove (a_n), (b_n) vrijedi $\mathbb{P}(X \in \{a_n\}) = \mathbb{P}(Y \in \{b_n\}) = 1$. Pokažite da su X i Y nezavisne akko

$$\mathbb{P}(X = a_i, Y = b_j) = \mathbb{P}(X = a_i)\mathbb{P}(Y = b_j)$$

za sve i, j.

Zadatak 11. Promotrite mjeru $\nu = \frac{1}{4}\delta_1 + \frac{1}{4}\delta_2 + \frac{1}{4}\delta_3 + \frac{1}{4}\delta_4$ na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, odredite integral $\int f d\nu$ za funkciju $f(x) = x^2$.

Zadatak 12. Ako su $f \geq g$ izmjerive, nenegativne i integrabilne u odn. na mjeru μ funkcije sa $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$. Ako je $\int (f - g) d\mu = 0$, dokažite precizno $\mu(f \neq g) = 0$.

Zadatak 13. Ako su $X \sim U(0,1)$ i $Y \sim Poi(\lambda)$ sl. varijable na istom vj. prostoru, provjerite je li moguće da vrijedi $\sigma(X) = \sigma(Y)$.

Zadatak 14. Niz sl. varijabli (X_n) na istom vj. prostoru je *uniformno integrabilan* ako vrijedi

$$\lim_{K\to\infty} \sup_n \mathbb{E}|X_n| \mathbb{1}_{|X_n|>K} = 0\,.$$

Dokažite ako je $|X_n| \leq Y$ za sve n i za neku sl. varijablu Y, takvu da $\mathbb{E}Y < \infty$, (X_n) je unif. integrabilan niz.