# Povijest matematike

F. M. Brückler

PMF-Matematički odsjek, 2022.

# Sadržaj


**1 Pramatematika** **5**

**2 Staroegipatska matematika** **7**

**3 Matematika u Mezopotamiji** **15**

**4 Antička grčka matematika** **21**
4.1 Jonsko razdoblje . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 21
4.2 Atensko razdoblje grčke matematike . . . . . . . . . . . . . . . . 29
4.3 Helenističko razdoblje grčke matematike . . . . . . . . . . . . . 48

**5 Starokineska i staroindijska matematika** **81**
5.1 Kineska matematika prije 13. stoljeća . . . . . . . . . . . . . . . 81
5.2 Indijska matematika prije 13. stoljeća . . . . . . . . . . . . . . . 89

**6 Matematika u Arapskom kalifatu** **95**

**7 Srednjevjekovna europska matematika** **109**

**8 Matematika u doba renesanse** **117**

**9 Razvoj matematike u 17. stoljeću** **139**

**10 Razvoj matematike u 18. stoljeću** **171**

**11 Razvoj matematike u 19. stoljeću** **189**

# Poglavlje 1

# Pramatematika

Počeci matematike vezani su uz brojanje, geometrijske uzorke i mjerenje. Točno vrijeme kad su ljudi počeli pokazivati znakove matematičkog razmišljanja nije pouzdano poznato, ali najranije sačuvane tragove matematike možemo naći u obliku zareza u kostima i kamenju (**rovaši**), te kao geometrijske ornamente na glinenim posudama iz kamenog doba. Dva najpoznatija izvora pra-matematike su rovaši nađeni u Africi:

- kost iz Lebomba (stara oko 43.000 godina, sadrži 29 zareza, no nije sa sigurnošću poznato što se njima brojalo);

- kost iz Išanga (stara oko 20.000 godina, sadrži nekoliko grupacija zareza i postoje mnoge teorije o njihovom mogućem smislu).

Nešto kasnije su se kao pomagala za bilježenje brojeva pojavili žetoni, te u južnoj Americi užad s čvorovima (*quipu*).

**Brojanje i brojke**, tj. izrazi i simboli za brojeve, vjerojatno su stari tek nekih 10.000 godina, a čini se da je njihov nastanak vezan za razvoj poljoprivrede i trgovine (razmjene). Prva pomagala za računanje bili su zasigurno prsti (prema Aristotelu, rasprostranjenost brojanja u skupinama po deset nije rezultat izbora, nego više anatomska slučajnost). Računanje se može dokazati tek prije ca. 4000 godina, tj. u doba starih civilizacija u Egiptu i Mezopotamiji.

# Poglavlje 2

# Staroegipatska matematika

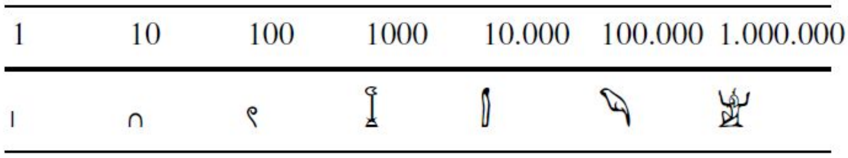
Da bi se moglo pričati o povijesti ikoje ljudske djelatnosti, pa tako i matematike, nužno je razmotriti povijesne izvore. Nadalje, važno je i znati glavne karakteristike razdoblja i kulture u kojoj se proučava određena djelatnost, u našem slučaju matematika. Najstariji sačuvani izvori o staroegipatskoj matematici potječu iz doba tzv. srednjeg carstva (ca. 2040.–1794.). Dva najvažnija među njima su

- **Rhindov papirus**, kojeg je napisao pisar Ahmes oko 1650. pr. Kr., te je to najstariji matematički tekst s poznatim imenom autora. Ime papirusa potječe od škotskog egiptologa A. H. Rhinda, koji ga je 1858. kupio u Luxoru, a danas se ovaj papirus čuva u *British Museum* u Londonu.

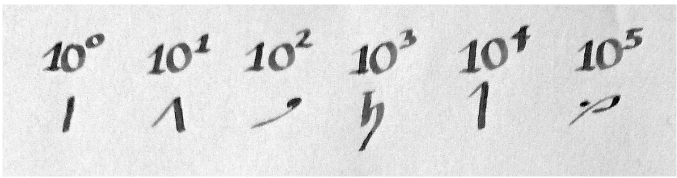
- **Moskovski papirus** potječe iz ca. 1850. g. pr. Kr. Ruski egiptolog V. S. Goleniščev ga je kupio u Tebi 1892. ili 1893. godine, a danas se nalazi u Puškinovom muzeuju u Moskvi.

Iz moderne perspektivne, ta dva papirusa su zbirke zadataka namijenjene školama državnih službenika. Uz njih poznati su i egipatski matematički kožni svitak iz istog doba, te kasniji papirus Kairo. Iz njih saznajemo da je staroegipatska matematika nastala iz praktičnih potreba državnih službenika: mjeriteljstvo, građevina, skladištenje, porezi, ...

No, više stoljeća prije nego su otkrili izradu papirusa, stari su Egipćani osmislili bilježenje brojeva koristeći dekadski, aditivan, nepozicijski **hijeroglifski brojevni sustav**. Znamenke tog sustava, tj. simboli koji su se koristili za zapisivanje brojeva u njemu, prikazane su slikom 2.1. Svaka znamenka uzima se onoliko koliko puta je potrebno da bi zbroj vrijednosti svih znamenki u brojci odgovarao iznosu broja kojeg prikazujemo. Primjerice, broj sedamnaest bi se u hijeroglifskom brojevnom sustavu mogao zapisati kao




Slika 2.1: Znamenke hijeroglifskog brojevnog sustava.




Slika 2.2: Jedna varijanta znamenki hijeratskog brojevnog sustava.

∩|||||||. No, i bilo koji drugi raspored jednog simbola ∩ i sedam simbola | predstavljao bi isti broj — sustav je, kao što smo rekli, bio nepozicijski. Same znamenke hijeroglifskog brojevnog sustava su, kao i svi drugi hijeroglifski znakovi, imale svoje simboličko značenje: Znamenka za 1 je, kao u gotovo svim starim civilizacijama, jednostavno crtica; znamenka za 10 predstavlja omču za vezanje nogu stoci (ili potkovu ili petnu kost); znamenka za 100 predstavlja namotano uže; znamenka za 1000 predstavlja lotos; znamenka za 10.000 predstavlja uzdignuti prst; znamenka za 100.000 predstavlja punoglavca; naposlijetku, znamenka za jedan milijun predstavlja egipatsko božanstvo svemira Huha (ili pak čovjeka u klečećem stavu).

Prilagođavanjem hijeroglifa pisanju na papirusu razvilo se hijeratsko pismo, kojim su pisani npr. Rhindov i Moskovski papirus. Brojevni sustav je ostao nepromijenje, ali su znamenke za hijeratske brojke poprimile malo drugačiji, jednostavniji, izgled, prikazan na slici 2.2. Kasnije se iz hijeratskog pisma razvilo demotsko pismo, odnosno iz hijeratskih demotske brojke.

Kao što je jasno iz navedenog, stari Egipćani znali su zapisivati prirodne brojeve. No, znali su i puno više. Uz Mezopotamiju, tu prvi put dokazivo susrećemo osnovne računske operacije (zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje i uz to drugi korijen, ali njega samo u najjednostavnijim slučajevima). Osim prirodnih brojeva bili su poznati i pozitivni razlomci. No, u starom Egiptu kao i ostalim starim kulturama brojevi se još nisu gledali kao apstraktni objekti.

S obzirom na to da je brojevni sustav bio nepozicijski, zbrajanje i oduzimanje bilo je jednostavno, bilo je dovoljno pregrupirati znamenke. Simbola

Slika 2.3: Simboli zbrajanja i oduzimanja iz Rhindovog papirusa.

koji bi odgovarali današnjim + i − još nije bilo, bar ne ustaljenih. U Rhindovom papirusu se ipak mogu vidjeti simboli sa slike 2.3 tog značenja, te se čini da su se bar povremeno koristili.

Zanimljivija je staroegipatska metoda množenja i dijeljenja. Iz moderne perspektive gledano, množenje i dijeljenje svodilo se na korištenje distributivnosti i binarnog zapisa jednog faktora, odnosno djelitelja. Objasnit ćemo te metode kroz sljedeća dva primjera.

**Primjer 1** *Pomnožimo* $25 \cdot 72$ *koristeći suvremene brojke, ali na staroegipatski način. Formira se tablica sa dva stupca, svaki odgovara po jednom od faktora. Prvi red u prvom stupcu sadrži broj* 1, *a prvi red u drugom stupcu sadrži drugi faktor, ovdje je to* 72. *Sad se redovi uzastopno udvostručuju sve dok broj u prvom stupcu ne premaši prvi faktor:*

| | |
|---:|---:|
| **1** | **72** |
| 2 | 144 |
| 4 | 288 |
| **8** | **576** |
| **16** | **1152** |
| 32 | . |

*Slijedi serija oduzimanja. Od prvog faktora oduzme se najveći broj u prvom stupcu koji je manji od njega:* $25 - 16 = 9$. *Pritom označimo (gore podebljano) pripadni broj u drugom stupcu. Od zadnje razlike oduzimamo sljedeći najveći broj u prvom stupcu, opet označavajući broj pokraj u drugom stupcu. Postupak ponavljamo sve dok razlika ne bude nula:* $25 - 16 = 9$, $9 - 8 = 1$, $1 - 1 = 0$. *Pritom su označeni brojevi* 1152, 576 *i* 72. *Stoga je* $25 \cdot 72 = 72 + 576 + 1152 = 1800$.

*Primijetimo da je ovdje umnožak zapravo računat kao* $25 \cdot 72 = (1 + 8 + 16) \cdot 72 = (2^4 + 2^3 + 2^0) \cdot 72 = (11001)_2 \cdot 72 = 1 \cdot 72 + 8 \cdot 72 + 16 \cdot 72$.

**Primjer 2** *Podijelimo* $184 : 17$ *na staroegipatski način, ali koristeći suvremene brojke. Opet se ispisuju dva stupca. Prvi odgovara djeljeniku* (184), *a drugi djelitelju* (17). *U prvom redu se zapisuju djelitelj i* 1. *Sad se kao i kod*


Slika 2.4: Jedan egipatski razlomak.

*množenja redovi uzastopno udvostručuju. Stajemo kad bismo u prvom stupcu premašili djeljenik:*

| | |
|---|---|
| 17 | 1 |
| 34 | **2** |
| 68 | 4 |
| 136 | **8** |
| 272 | . |

*Slijedi niz oduzimanja: Od djeljenika se u prvom stupcu zaredom oduzimaju najveći mogući brojevi, sve dok razlika ne padne ispod djelitelja. U našem slučaju to znači oduzimanja* $184 - 136 = 48$*,* $48 - 34 = 14 < 17$*.. Pri svakom oduzimanju se, kao i kod množenja, označava odgovarajući broj desnog stupca (podebljano). Ti označeni brojevi se zbroje* ($8 + 2 = 10$) *i to je količnik, tj.* $184 : 17 = 10$*. Posljednji rezultat oduzimanja, kod nas* 14*, je ostatak, dakle je* $184 : 17 = 10\frac{14}{17}$*.*

Iako su stari Egipćani poznavali razlomke, nisu ih kao mi danas zapisivali koristeći zapis brojnika i nazivnika. Svi (pozitivni) razlomci prikazivani su kao zbrojevi (različitih) jediničnih razlomaka (razlomaka s brojnikom 1),[1] Stoga danas rastav razlomka na zbroj (različitih) jediničnih razlomaka nazivamo **egipatski zapis razlomka**. Pritom se za razlomke iznosa većeg od 1 podrazumijeva da je prvo odvojen cijeli dio. U hijeroglifskoj i hijeratskoj notaciji zbrojevi jediničnih razlomaka su se zapisivali jednostavno nadopisivanjem, pri čemu je zapis jediničnog razlomka bio simbol usta povrh brojke koja predstavlja nazivnik. Primjerice, na slici 2.4 je egipatski zapis razlomka $\frac{2}{5}$. Rhindov papirus sadrži tablicu egipatskih zapisa razlomaka tipa $\frac{2}{2n+1}$. Do danas nije razjašnjena metoda kojom je dobivena, ali je očito da se izbjegava zapis tipa $\frac{2}{m} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m}$, tj. ponavljanje jediničnih razlomaka. Razlog takvog shvaćanja razlomaka je najvjerojatnije praktične prirode.

**Primjer 3** *Želimo li* 11 *kruhova podijeliti na* 16 *ljudi, najjednostavnije je prvo sve kruhove prepoloviti, čime smo dobili* 22 *polovice. Njih* 16 *damo svakome po jednu, preostalo je* 6 *polovica. Njih opet prepolovimo pa imamo 12*

[1] Specijalni simbol je imao samo razlomak $\frac{2}{3}$, prema nekim izvorima i $\frac{3}{4}$.

*četvrtina. Budući je* 12 *manje od* 16*, prepolovimo ih još jednom, pa imamo* 24 *osmine. Njih* 16 *opet jednu po jednu damo svakome. Preostalo je* 8 *osmina. Kad njih prepolovimo, dobit ćemo* 16 *šesnaestina i opet svakom damo po jednu. Dakle, svaka osoba je dobila* $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ *kruha.*

Prirodno se sad postavljaju pitanja: Može li se svaki pozitivan razlomak zapisati kao zbroj jediničnih? Kako bismo našli takav zapis? Je li takav zapis jedinstven? Na prva dva pitanja odgovara:

**Teorem 1 (Fibonacci)** *Svaki pozitivan razlomak posjeduje egipatski zapis.*

Tvrdnju iz teorema uključivo pripadne metode dobivanja egipatskog zapisa razlomka otkrio je te u svom djelu *Liber Abaci* opisao i (nesavršeno) dokazao znameniti srednjevjekovni matematičar Fibonacci (Leonardo iz Pise). Za potpun formalni dokaz potrebna je:

**Lema 1 (J. J. Sylvester)** *Neka je* $\frac{p}{q}$ *pozitivan razlomak manji od* $1$, $p \neq 1$. *Neka je* $\frac{1}{n}$ *najveći jedinični razlomak manji od* $\frac{p}{q}$. *Tada je* $\frac{p}{q} - \frac{1}{n} = \frac{r}{qn}$ *razlomak sa svojstvom* $r < p$.

*Dokaz Sylvesterove leme.* Imamo:

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{n} = \frac{pn - q}{qn}.$$

Pretpostavimo $r = pn - q \geq p$, odnosno $p(n-1) \geq q$. Budući da je $n > 1$, slijedi $\frac{p}{q} \geq \frac{1}{n-1} > \frac{1}{n}$, što je kontradikcija. ■

*Dokaz Fibonaccijevog teorema.* Ako sad krenemo od pozitivnog razlomka i uzastopno oduzimamo najveći jedinični razlomak manji od njega, Sylvestorova lema garantira da će se brojnici smanjivati, a zbog dobrog uređaja na skupu $\mathbb{N}$ slijedi da ne možemo nastaviti unedogled, pa je teorem dokazan. ■

**Primjer 4** *Zapišimo* $\frac{3}{7}$ *na egipatski način, koristeći Fibonaccijev algoritam:*

$$\frac{1}{2} > \frac{3}{7} > \frac{1}{3}; \quad \frac{3}{7} - \frac{1}{3} = \frac{2}{21};$$

$$\frac{1}{10} > \frac{2}{21} > \frac{1}{11}: \quad \frac{2}{21} - \frac{1}{11} = \frac{1}{231}.$$

*Dobili smo jedinični razlomak, dakle je*

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}.$$

No, vrijedi i:

**Teorem 2** *Svaki pozitivan razlomak ima beskonačno mnogo egipatskih zapisa.*

*Dokaz.* Neka je nađen jedan egipatski zapis razlomka $\frac{p}{q}$:

$$\frac{p}{q} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}.$$

Budući da je

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6},$$

dijeljenjem s jednim od nazivnika danog egipatskog zapisa, recimo s $k_n$, dobijemo

$$\frac{1}{k_n} = \frac{1}{2k_n} + \frac{1}{3k_n} + \frac{1}{6k_n}.$$

Ako to supstituiramo na mjesto $\frac{1}{k_n}$ u prvom egipatskom zapisu, dobili smo novi

$$\frac{p}{q} = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{k_i}\right) + \frac{1}{2k_n} + \frac{1}{3k_n} + \frac{1}{6k_n}.$$

Ponavljamo li prethodno (dijeljenje zapisa za 1 s bilo kojim od nazivnika u zapisu $\frac{p}{q}$ i supstitucijom u njega) dobit ćemo beskonačno mnogo egipatskih zapisa istog razlomka. ■

U Rhinodovom i Moskovskom papirusu nalazimo i zadatke koje bismo danas ubrojali u jednostavne (linearne i čisto kvadratne) jednadžbe, dakle u algebru. Tipičan primjer je sljedeći.

**Primjer 5 (RP31)** *Hrpa, njene dvije trećine, njena polovina i njena sedmina čine* 33. *Koliko sadrži hrpa?*

Vidimo da je termin „hrpa” odgovarao pojmu nepoznanice. Uz zadatke s „hrpama”, tipični su i zadaci s omjerima *pefsu*, koji su opisivali kvalitetu piva ili kruha (*pefsu* je omjer količina dobivenog kruha/piva i utrošenog žita), primjerice sljedeći.

**Zadatak 1 (RP77)** *Primjer razmjene piva za kruh. Recimo da ti je rečeno da* 10 des[2] *pive (s* pefsu 2*) treba zamijeniti za kruhove (s* pefsu 5*). Koliko kruhova će biti?*

[2]Tipična staroegipatska posuda za pivu imala je volumen 1 des, to je otprilike 2.4 L.

Rješenja svih zadataka u ovim papirusima, kao i općenito u starim civilizacijama, daju se kao konstatacije, bez objašnjenja i pokušaja generalizacije, a kamoli dokaza. Primjerice, rješenje zadatka RP77 iz prethodnog primjera dano je ovako: „Izračunaj količinu brašna u 10 des pive; to je 5 hekata.[3] Pomnoži 5 s 5, to je 25. Reci onda da za razmjenu treba 25 kruhova."

Stari su Grci otkriće geometrije pripisivali Egipćanima. Geometrijska znanja starih Egipćana svakako su bila impresivna. Znali su računati neke površine (trokut, pravokutnik, trapez, krug) i volumene (kocka, kvadar, valjak). Znali su i da je volumen valjka jednak umnošku površine baze i visine. Posebno je poznat 14. zadatak u Moskovskom papirusu s korektnim pravilom za izračunavanje volumena krnje uspravne kvadratne piramide.

Poznavali su i specijalni slučaj Pitagorinog poučka. Naime, starim Egipćanima je bila jako važna zemljopisna orijentacija hramova. Smjer sjever-jug utvrđivali su promatranjem točaka na horizontu gdje neka zvijezda izlazi i zalazi, a zatim se pomoću konopa s jednoliko razmaknutih 12 čvorova i pitagorejske trojke $(3, 4, 5)$ utvrđivao na prvi smjer okomiti smjer istok-zapad. No, tek papirus Kairo (iz ca. 300. pr. Kr.) navodi i pitagorejske trojke $(5, 12, 13)$ i $(20, 21, 29)$.

Ipak, najzanimljiviji je staroegipatski način računanja površine kruga. Čini se da je u doba kad su nastali Moskovski i Rhindov papirus već bio rasprostranjen postupak kakav je opisan, npr., u sljedećem zadatku.

**Primjer 6 (RP41)** *Koji je volumen valjkastog silosa za žito promjera* 9 *i visine* 10*?*

*Oduzmi* $\frac{1}{9}$ *od* 9*. Ostaje* 8*. Pomnoži* 8 *s* 8*, dobiješ* 64*. Pomnoži* 64 *s* 10*, to je* 640 *kubičnih kubita.*[4]

Vidimo: Stari Egipćani su procjenjivali površinu kruga promjera $d$ kao $\left(\frac{8}{9}d\right)^2$. S obzirom na to da je postupak bio šire poznat, čini se da su donekle primijetili proporcionalnost površine kruga i površine kvadrata nad polumjerom odnosno promjerom, no niti pojam proporcionalnosti niti staroegipatski pristup još ne dozvoljavaju da govorimo o poznavanju konstante koju danas zovemo $\pi$. No, ako usporedimo s modernim znanjima, vidimo da staroegipatska procjena površine kruga odgovara aproksimaciji

$$\pi \approx \frac{32}{9} \approx 3.16.$$

[3] Hekat je staroegipatska mjera volumena, iznosa otprilike 4.8 L.

[4] 1 kubit $\approx$ 52,3 cm.

# Poglavlje 3

# Matematika u Mezopotamiji

Na području Mezopotamije tijekom prva tri tisućljeća pr. Kr. izmijenili su se različiti dominantni narodi (Sumerani, Akađani, Babilonci, Asirci, Perzijanci), no od ca. 2500. pr. Kr. svi su koristili varijante klinastoga pisma te su iz tog razdoblja sačuvane mnoge glinene pločice, od kojih stotinjak imaju matematičke sadržaje (tablice, zadatke). Najviše takvih potječe iz starobabilonskog carstva (ca. 1900.–1600. pr. Kr.). Dvije najpoznatije su:

- YBC 7289 s vrlo dobrom aproksimacijom $\sqrt{2}$ i
- Plimpton 322 s tablicom pitagorejskih trojki.

Nedavno je otkrivena i jedna pločica na kojoj se može naći rani oblik primjene trapezne formule. Iz tih sačuvanih pločica saznajemo da je i sumerskobabilonska matematika bila praktično orijentirana (trgovina, građevina, nasljeđivanje, astronomija), a rješenja zadataka su se kao i u starom Egiptu davala se bez argumenata, dokaza ili generalizacije.

Često se čuje ili pročita da su Sumerani odnosno Babilonci koristili sustav s bazom 60, ali to baš i nije sasvim točno. Iz ranijih, arhaičnih piktograma su se, kao uostalom i samo klinasto pismo, razvile klinaste brojke. Sam pripadni brojevni sustav je uglavnom bio dekadski ili primarno seksagezimalni (sustav s bazom 60) i sekundarno dekadski. Dugo vremena ti sustavi bili su aditivni ili aditivno-multiplikativni, no njihov razvoj postigao je vrhunac negdje u doba treće urske dinastije (kraj 3. tisućljeća pr. Kr.) u Babilonu. Taj sustav poznat je kao (klasični) **babilonski brojevni sustav**. Bio je to prvi pozicijski brojevni sustav u povijesti. Radilo se o brojevnom sustavu s primarnom bazom 60 i sekundardnom bazom 10. Nedostatak znamenke nula u tom sustavu učinio ga je ne-apsolutno pozicijskim (npr. ne možemo bez konteksta razlikovati 102, 12 i 120), ali ga je već sama pozicionalnost učinila najmnoćnijim (u pogledu zahtjevnijih znanstvenih računa) među starim brojevnim sustavima te je iznimno dugo ostao u upotrebi u znanosti, posebice astronimiji, a i dan danas ga koristimo (računanje vremena; iznosi kutova u stupnjevima). Pedeset i devet znamenki tog sustava pisane su pomoću dva klina, horizontalnog (<) koji ima vrijednost deset i vertikalnog (V) koji ima vrijednost jedan, a sam oblik znamenki se formira po aditivnom principu. Primjerice, <<VVV bi bila seksagezimalna znamenka 23.

Jedna od prednosti ovog sustava u odnosu na moderni pozicijski dekadski sustav je da „više” razlomaka imaju konačan seksagezimalni zapis.

**Primjer 7** *Zapišimo razlomak* $\frac{17}{48}$ *seksagezimalno:*

$$\frac{17}{48} = 0 + \frac{a}{60} + \frac{b}{3600} + \dots.$$

*Množenje sa* 60 *daje*

$$21 + \frac{1}{4} = a + \frac{b}{60} + \dots,$$

*dakle je* $a = 21$*. Preostaje*

$$\frac{1}{4} = \frac{b}{60} + \dots,$$

*što opet pomnožimo sa* 60*. Dobijemo* $b = 15$*, dakle je* $\frac{17}{48} = \frac{21}{60} + \frac{15}{60^2} = (0;21;15)_{60}$*. U dekadskom sustavu isti razlomak nema konačan zapis:* $\frac{17}{48} = 0.3541\dot{6}$.

Uz nedostatak znamenke nula, mana tog sustava je da je osnovna tablica množenja veličine $60 \times 60$ (zapravo, $59 \times 59$), no tom su problemu Babilonci doskočili korištenjem tablica kvadratanih brojeva i algebarskim postupcima koji su ekvivalentni formulama

$$a\,b = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2}, \quad \text{odnosno} \quad a\,b = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}.$$

**Primjer 8** *Pomnožimo sto sa sedamnaest na babilonski način. Broj sto u seksagezimalnom sustavu je* $1 \cdot 60 + 40 \cdot 1 = (1{,}40)_{60} =$ V <<<<*, a broj sedamnaest je znamenka sedamnaest, tj.* < VVVVVVV*.*

*Prvo zbrojimo ta dva broja:* $(1{,}40)_{60} + (17)_{60} = (1{,}57)_{60} =$ V <<<<< VVVVVVV*, što je naravno sto i sedamnaest. U tablici kvadrata nađemo da je kvadrat tog broja* VVV <<<< VVVVVVVV VVVVVVVVV $= (3{,}48{,}9)_{60}$ *(naših* 13.689*).*

*Ako želimo koristiti prvo pravilo, u tablici kvadrata nađemo i kvadrate naših faktora: kvadrat od sto je* VV <<<< VVVVVV <<<<$= (2{,}46{,}40)_{60}$

*(naših* 10.000*), a kvadrat od sedamnaest je* VVVV <<<< VVVVVVVVV = $(4{,}49)_{60}$ *(naših* 289*). Ta dva kvadrata oduzmemo od kvadrata zbroja:*

$$(3{,}48{,}9)_{60} - (2{,}46{,}40)_{60} - (4{,}49)_{60} = (56{,}40)_{60}.$$

*Prepolovimo, dobijemo* $(28{,}20)_{60}$ =<< VVVVVVVV <<*, što je točan rezultat:* $100 \cdot 17 = 1700 = 28 \cdot 60 + 20$.

*Ako pak koristimo drugo pravilo, onda oduzmemo naše faktore:* $(1{,}40)_{60} - (17)_{60} = (1{,}23)_{60}$ = V << VVV*. Njegov kvadrat se također očita iz tablice (*V <<<<< VVVV <<<< VVVVVVVVV*, tj.* $(1{,}54{,}49)_{60}$*). Oduzmemo kvadrat razlike od kvadrata zbroja:* $(3{,}48{,}9)_{60} - (1{,}54{,}49)_{60} = (1{,}53{,}20)_{60}$*. Četvrtina od toga je traženi umnožak* $(28{,}20)_{60}$ =<< VVVVVVVV <<*.*

Dijeljenje se svodilo na množenje s recipročnim brojem ($a/b = a \cdot \frac{1}{b}$), uz korištenje tablice recipročnih brojeva.

Mnoge babilonske pločice sadrže algebarske zadatke, točnije zadataka koji se iz moderne perspektive svode na linearne i kvadratne, pa čak i kubne jednadžbe i njihove sustave.

**Primjer 9 (BM 13901)** *„Skupio sam površinu i moje nasuprotno: To je 45′."*

*Pod površinom se ovdje misli na površinu kvadrata nepoznate duljine stranice, dakle naš* $x^2$*, dok je 'moje nasuprotno' sama ta stranica (*$x$*), dakle je ovo jednažba* $x^2 + x = \frac{45}{60}$*. Postupak rješavanja je*[1] *Uzmi 'projekciju' (koeficijent uz linearni član)* 1 *i prepolovi, to je* 30′*; zbroji* 15′ *(to je četvrtina od kvadrata projekcije) i* 45′ *(slobodni član), to je* 1*; dakle, rješenje je razlika od* 1 *i* 30′ *(ovaj* 1 *je stranica kvadrata površine* 1*), dakle* $\frac{30}{60} = \frac{1}{2}$*. Vidimo da se u osnovi radi o primjeni postupka za rješavanje kvadratne jedadžbe: (pozitivno) rješenje jednadžbe* $x^2 + bx = c$ *je* $\frac{\sqrt{b^2+4c}-b}{2}$.

**Primjer 10 (BM 13901)** *„Zbrojio sam površine obiju mojih strana i dobio* 25′25″*. Strana je* 2/3 *strane i* 5′*."*

*Vidimo da se ovdje radi o dva kvadrata, pa prva rečenica predstavlja jednadžbu* $x^2 + y^2 = \frac{61}{144}$*, dok druga predstavlja jednadžbu* $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{12}$*.*[2]

Naravno, geometrija je također bila razvijena u babilonsko doba. Na sačuvanim pločicama nalazimo mnoge geometrijske zadatke, posebice vezano

[1]Ovo je slobodni i skraćen prijevod prema J. Høyrup, *Lengths, Widths, Surfaces: A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin* (Springer, 2002), str. 50–52.

[2]Za postupak kojim se dobiva rješenje $x = \frac{1}{2} = 30'$, $y = \frac{5}{12} = 25'$ vidi J. Høyrup, *Lengths, Widths, Surfaces: A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin* (Springer, 2002), str. 73–74.

za građevinu (izgradnja nasipa i kanala, često trapeznog presjeka) i astronomiju. Zanimljiva je babilonska geometrijska terminologija: Pravokutnik je „ono što ima duljinu i širinu", trapez je „bikovo čelo", krug je „zakrivljenost", ... Naravno, kao i u isto doba Egipćani, Babilonci su znali računati površine kvadrata, pravokutnika, a znali su i da su obujmi prizme i valjka jednaki umnošku površine baze i visine. Evo jednog primjera geometrijskog zadatka vezanog za izgradnju kanala.

**Primjer 11 (VAT 7528)** *„Mali kanal.* 6 *kuša dug.* 2 *kuša gornja širina.* 1 *kuš donja širina.* $1\frac{1}{2}$ *kuš dubina.* $\frac{1}{3}$ sar *zemlje radni učinak.* 18 *ljudi. Dani su što? [...]* 11 *dana i* $\frac{1}{4}$ *su dani."*

*Vidljivo je da je ovdje presjek kanala oblika jednakokračnog trapeza. Jedinica* sar *može biti jedinica površine i volumena, ovdje volumena (kojeg dnevno iskopa jedan čovjek). Pritom je* $1\,\text{sar} = 1\,\text{nindan}^2\,\text{kuš}$*, gdje je* $1\,\text{nindan} = 12\,\text{kuš}$.[3]

*Volumen kanala ispada* $(1{,}7;30)_{60}\,\text{sar}$*. S druge strane,* 18 *ljudi dnevno iskopa* $6\,\text{sar}$*, dakle se cijeli kanal iskopa za* $(11;15)_{60}$ *dana.*

Izračuni površine i opsega kruga u babilonsko doba najčešće odgovaraju modernoj aproksimacinji $\pi \approx 3\frac{1}{8}$, ponekad $\pi \approx 3$.

**Primjer 12** *Jedna pločica iz razdoblja* $1900.--1600.$ *pr. Kr. interpretira se kao tvrdnja da je opseg pravilnog šesterokuta jednaka* $\frac{24}{25}$ *opsega tom šesterokutu opisane kružnice. Moderna analiza pokazuje: Budući da je stranica* $a_6$ *pravilnog šesterokuta upisanog u kružnicu jednak njezinom polumjeru* ($r = a_6$)*, slijedi da je opseg šesterokute* $O_6 = 6a_6 = 6r$*. Tablica tvrdi da je to približno isto što i* $\frac{24}{25}O = \frac{24}{25} \cdot 2r\pi$*, dakle je ovo ekvivalentno aproksimaciji* $\pi \approx \frac{25}{8}$.

Tablica Plimpton 322, datirana oko 1800. g. pr. Kr., sadrži **pitagorejskih trojki**, tj. trojke prirodnih brojeva $k$, $m$, $n$ takve da je $k^2+m^2 = n^2$. Zapravo, u toj je tablici u drugom stupcu kraća kateta $b$ trokuta, u trećem hipotenuza $c$, a u prvom stupcu su kvadrati omjera $c/a$.[4] Primjerice, u 14. redu te tablice nalaze se brojevi $(1;25{,}48{,}51{,}35{,}6{,}40)_{60} = \left(\frac{3229}{1771}\right)^2$, $(53{,}49)_{60} = 3229$ (hipotenuza) i $(29{,}31)_{60} = 1771$ (kraća kateta). Vidimo dakle da taj redak odgovara pitagorejskoj trojci $(1771, 2700, 3229)$.

Babilonci su poznavali i Pitagorin poučak u punoj općenitosti i koristili ga za rješavanje raznih geometrijskih zadataka. Pogledajmo tri primjera.

[3]Jedinica duljine kuš poznata je i pod nazivom kubit, a nindan se može prevesti sa štap i iznosio je oko 6 m.

[4]Prema nekim interpretacijama, ta se tablica može gledati kao začetak trigonometrije.

**Primjer 13** *4 je duljina i 5 dijagonala. Kolika je širina? Nije poznata. 4 puta 4 je 16. 5 puta 5 je 25. Oduzmeš 16 od 25 i ostaje 9. Što da uzmem da dobijem 9? 3 puta 3 je 9. 3 je širina.*

**Primjer 14** *Na jednoj starobabilonskoj pločici pronađenoj 1936. kod Suse nalazimo određivanje polumjera kružnice opisane jednakokračnom trokutu sa stranicama duljina 50, 50 i 60. U prvom se koraku nalazi visina 40 slično kao u gornjem primjeru, a onda se ponovno koristi Pitagorin poučak da bi se dobio polumjer* $(31{,}15)_{60}$.

**Primjer 15 (BM 85 196)** *„Greda duljine $30'$* kuš *je naslonjena na zid. Gornji kraj je skliznuo za $6'$* kuš. *Koliko je donji kraj udaljen od zida? ”*

*U rješenju se redom računa: Kvadrat od $30'$ je $15'$. Oduzme se $6'$ od $30'$ i dobije $24'$. To se kvadrira i dobije $9'36''$. To se oduzme od $15'$, ostaje $5'24''$. Naposlijetku je rješenje drugi korijen posljednjeg broja, tj. $18'$.*

Babilonci su poznavali i Talesov teorem i koristili ga u kombinaciji s Pitagorinim, npr. za određivanje visine kružnog odsječka nad tetivom poznate duljine u krugu poznatog promjera. Neki su pak zadaci rješavani koristeći proporcionalnost ekvivalentnu kotangensu.

Naposlijetku, u babilonsko doba možemo naći i začetke numeričke matematike, konkretno iterativnih metoda za izračunavanje aproksimativnih iznosa raznih jednadžbi. Kako sugerira pločica YBC 7289, za aproksimativno izračunavanje drugih korijena korištena je iterativna metoda danas poznata pod imenom **Heronova metoda**, jer ju je opisao starogrčki matematičar Heron Aleksandrijski u svom djelu *Metrica* (vj. 1. st. AD). Na navedenoj pločici nalazimo aproksimaciju $(1;24{,}51{,}10)_{60}$[5] duljine dijagonale kvadrata stranice 1. To je pak zaokružena vrijednost rezultata četvrtog koraka Heronove metode za računanje drugog korijena od 2. Podsjetimo se: U Heronovoj metodi, za koju je danas poznato da konvergira, krećemo od neke početne aproksimacije za $\sqrt{n}$ (npr. početne aproksimacije 1 za $\sqrt{2}$). Dalje iterativno računamo sljedeću aproksimaciju: U svakom koraku je nova aproksimacija pola zbroja prethodne aproksimacije s kvocijentom broja kojeg korjenujemo ($n$) i prethodne aproksimacije, tj.

$$a_{i+1} = \frac{1}{2}\left(a_i + \frac{n}{a_i}\right).$$

[5]To odgovara iznosu od $\sqrt{2}$ točnom na 11 decimala.

Konkretno, za izračun $\sqrt{2}$ imamo sljedeća prva četiri koraka:

| $i$ | $a_i$ | $a_{i+1} \approx \sqrt{n}$ | seksagezimalno | dekadski |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $\frac{3}{2}$ | $1;30$ | 1.5 |
| 2 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{17}{12}$ | $1;25$ | $1.41\dot{6}$ |
| 3 | $\frac{17}{12}$ | $\frac{577}{408}$ | $1;25{,}51{,}10(,35,\ldots) \approx 1;25{,}51{,}11$ | $1.13169642857\ldots$ |
| 4 | $\frac{577}{408}$ | $\frac{665857}{470832}$ | $1;25{,}51{,}10(,7,\ldots) \approx 1;25{,}51{,}10$ | $1.41421356237\ldots$ |

# Poglavlje 4

# Antička grčka matematika

## 4.1 Jonsko razdoblje

Početke grčke kulture i znanosti, kako je dobro poznato iz opće povijesti, nalazimo tijekom 8. st. pr. Kr. U to su doba Grci od Feničana preuzeli ideju alfabeta i razvili svoj **grčki alfabet** s 24 slova: A, $\alpha$; B, $\beta$; $\Gamma$, $\gamma$; $\Delta$, $\delta$; E, $\varepsilon$; Z, $\zeta$; H, $\eta$; $\Theta$, $\theta$; I, $\iota$; K, $\kappa$; $\Lambda$, $\lambda$; M, $\mu$; N, $\nu$; $\Xi$, $\xi$; O, $o$; $\Pi$, $\pi$; P, $\rho$; $\Sigma$, $\sigma$ ili $\varsigma$; T, $\tau$; Y, $\upsilon$; $\Phi$, $\varphi$; X, $\chi$; $\Psi$, $\psi$; $\Omega$, $\omega$. U to se doba počinju se razvijati i grčki gradovi-države, a na području Jonije (današnja jugozapadna Turska) se negdje krajem 7. st. pr. Kr. pojavljuju temelji filozofije i znanostvenog načina razmišljanja. Tu se, pod utjecajem egipatskog i babilonskog nasljeđa, počela razvijati i matematika, te je prvo razdoblje starogrčke matematike (otprilike od kraja 7. st. pr. Kr. pa do početka 5. st. pr. Kr.) poznato kao jonsko razdoblje. Iz tog doba nije sačuvan nikoji primarni izvor, no temeljem sekundarnih izvora saznajemo da se u to doba matematika počela formirati u znanost u kojoj se tvrdnje dokazuju. Najvažniji sekundarni izvor za ovo, a kasnija razdoblja je **Proklo** (5. st. A. D.), točnije njegovi komentari Euklidovih *Elemenata*.

Brojevi su se u to doba, sve negdje do 3. st. pr. Kr., zapisivali koristeći **akrofonski (atički) brojevni sustav**, koji je primarno dekadski i sekundardno kvinarni aditivni sustav (kao i kasniji, poznatiji, rimski brojevni sustav). Znamenke akrofonskog sustava su: I = 1 ($\mu\acute{o}\nu o\varsigma$); 𐅃 = 5 ($\pi\acute{\varepsilon}\nu\tau\varepsilon$); $\Delta$ = 10 ($\delta\acute{\varepsilon}\kappa\alpha$); 𐅄 = 50; H = 100 ($\acute{\varepsilon}\kappa\tau\acute{o}\nu$); 𐅅 = 500; X = 1000 ($\chi\acute{\iota}\lambda\iota o\iota$); 𐅆 = 5000; M = 10000 ($\mu\upsilon\rho\iota\acute{\alpha}\varsigma$); 𐅇 = 50000. Primjerice, broj kojeg danas zapisujemo kao 10539 u atičkom brojevnom sustavu bio bi M𐅅ΔΔΔ𐅃IIII.

Tradicionalno se prvim „pravim” matematičarem smatra **Tales iz Mileta** (oko 624–527. pr. Kr.). On je svakako prvi poimence poznat grčki filozof, znanstvenih i inžinjer, a matematička tradicija mu pripisuje prve dokaze. No, zapravo se ne zna je li išta dokazao, štoviše, ne zna se ni je li Tales išta pisao, a ako i jest, svi njegovi zapisi nestali su prije Aristotelovog doba (sred. 4. st. pr. Kr.). Talesu pripisani teoremi pripisuju mu se temeljem biografije koju je napisao Diogenes Laertius (2./3. st. A. D.) i Proklovih (5. st. A. D.) komentara Euklidovih *Elemenata* (u nastavku ih označavamo s EE). Prema Proklu, Tales je iz Egipta prenio geometrijska znanja u Grčku. Diogenes Laertius mu pripisuje Talesov teorem o kutu nad promjerom kružnice („Kut u polukrugu je pravi"),[1] a jer spominje i legendu o navodnom Talesovom određivanju visine piramide pripisuju mu se i Talesovi teoremi o proporcionalnosti. Proklo pak Talesu pripisuje sljedeća četiri teorema:

1. Svaki promjer raspolavlja krug.

2. Kutevi uz osnovicu jednakokračnog trokuta su jednaki.

3. Vršni kutevi su jednaki.

4. KSK-teorem o sukladnosti trokuta.

No, za svih navedenih šest teorema nipošto nije sigurno da ih je Tales dokazao, moguće je da se kod njega još radilo samo o empirijski utvrđenim činjenicama. Također, postoje i rasprave o točnom smislu tvrdnji (npr. vezano za 2. teorem kojeg mu je pripisao Proklo, u Proklovom tekstu nalazimo izraze koji su bliži značenju sličan nego jednak).

Najstariji pouzdano poznati matematički dokazi potječu od pitagorejaca, pripadnika škole koju je osnovao **Pitagora sa Samosa** (ca. 570.–490. pr. Kr.). O njegovom životu se vrlo malo pouzdano zna, štoviše nije sigurno je li ikoji od njemu pripisanih teorema sam otkrio i(li) dokazao. Rođen je na Samosu kao sin trgovca Mnezarha i Pitaide. S ocem je zasigurno imao prilike putovati, a bio je i dobro obrazovan. Na njegovo obrazovanje su bitno utjecali filozofi Ferekid, Tales i Talesov učenik Anaksimandar; posljednja dvojica su vjerojatno najzaslužniji za Pitagorin interes za matematiku. Oko 535. je otišao u Egipat, gdje je 525. pao u perzijsko zarobljeništvo i odveden u Babilon. Nekoliko godina kasnije vratio se na Samos i tamo osnovao svoju prvu školu, „polukrug". Iz ne pouzdano poznatih razloga je 518. (ili ranije) otišao u južnu Italiju, gdje je u grčkoj koloniji Krotonu osnova znanstveno-vjerski-mističku **pitagorejsku školu**. Njene članove danas nazivamo pitagorejcima, no sami su se nazivali $\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa o\iota$ ($\mu\acute{\alpha}\tau\eta\mu\alpha =$ znanje, ono što se uči). Pitagorejska škola je bila dijelom tajna zajednica pa mnogi podaci o njoj nisu pouzdani, a Pitagori su pripisivana božanska svojstva, te su to glavni razlozi zašto danas ne znamo tko je dokazao koji pitagorejski teorem. No, sigurno je

[1] Najstariji sačuvani dokaz ovog teorema nalazimo u Euklidovim *Elementima* (EEIII31).

da su pitagorejci počeli deduktivno dokazivati matematičke tvrdnje. Krajem 6. st. pr. Kr. je Pitagora zbog političko-ratnih sukoba u kojima su sudjelovali pitagorejci pobjegao u Metapont i vjerojatno ondje umro, no ne zna se kako i kada.

Prema pitagorejskoj filozofiji bit svijeta je u harmoniji brojeva. Za njih, a tako i kasnije za sve starogrčke matematičare, broj ($\acute{\alpha}\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$) je isključivo prirodan broj.[2] Pitagorejci su prvi koji su brojeve gledali kao samostalne, apstraktne objekte. Pridavana su im mistična značenja, ali su dokazani i prvi rezultati o njima. Ta aritmetika kakvu su razvijali pitagorejci i ostali klasični starogrčki matematičari poznata je kao **teorijska aritmetika**, a iz moderne perspektive možemo ju smatrati začetkom teorije brojeva. Za razliku od toga praktično računanje (logistika) u antičkoj Grčkoj nije smatrano matematičkom djelatnošću. Za logistiku su se u jonsko doba kao pomagala koristili kamenčići i prsti.

Pitagorejci su razvili četiri discipline kojima je kasnije, početkom srednjeg vijeka, Boethius dao zajednički naziv *quadrivium*:

- (teorijska) aritmetika: bavi se onim što se može prebrojati (kvantiteta, brojnost);
- **geometrija** ($\gamma\varepsilon\omega\mu\varepsilon\tau\rho\acute{\iota}\alpha$): bavi se onim što se može mjeriti (veličinama: duljina, površina, volumen, ali i trajanje, masa);
- glazba (harmonija): primjena aritmetike (aritmetika u vremenu)
- astronomija: primjena geometrije (raspored veličina u vremenu i prostoru)

O pitagorejskoj aritmetici saznajemo ne samo od Prokla, nego i od Aristotela (4. st. pr. Kr.) i Nikomaha iz Geraze (1. st. A. D). Mnogi pitagorejski aritmetički rezultati sačuvani su u VII., VIII. i IX. knjizi Euklidovih *Elemenata.* Pitagorejci su uveli razne klasifikacije (prirodnih) brojeva. Osnovna je podjela na parne i neparne brojeve: **Parni brojevi** su oni koji se mogu podijeliti na dva jednaka broja, a **neparnima** pri dijeljenju popola preostaje jedinica. Razlikovali su i **proste i složene brojeve**.[3] Razmatrali su i **savršene brojeve**, tj. brojeve koji su zbrojevi svih svojih pravih djelitelja, te kvadratne i kubne brojeve, tj. brojeve oblika $n^2$ i $n^3$. Kasnije, vjerojatno tek neopitagorejci u postklasično helenističko razdoblje (oko prijelaza era),

[2] Jedinica ili monada ($\mu\acute{o}\nu o\varsigma$) nije broj, nego osnova svih brojeva. Tako u drugoj definiciji EEVII piše: Broj je skup jedinica.

[3] U EEVII 11. i 13. definicija kažu: Prost broj je broj koji se može izmjeriti samo jedinicom. Složen broj je onaj koji se može izmjeriti brojem.

su razmatrani i razni $\boxed{\text{figurativni brojevi}}$ te prijateljski brojevi (dva broja su prijateljska ako je svaki od njih zbroj pravih djelitelja drugog, tj. savršeni su brojevi oni koji su prijateljski sami sebi). Pitagorejcima se pripisuje sljedeći poznati teorem:[4]

**Teorem 3 (EEIX36)** *Ako je proizvoljno mnogo brojeva počevši od jedinice razvijeno u dvostrukoj proporciji[5] sve dok im zbroj ne bude prost, te ako taj zbroj pomnožen sa zadnjim dade broj, taj broj je savršen.*

Suvremenim načinom rečeno: Ako je $p = 1+2+2^2+\ldots+2^m = 2^{m+1}-1$ prost broj, onda je $n = 2^m p$ savršen. Za Euklidov, vjerojatno zapravo pitagorejski, dokaz ove tvrdnje upućujemo na stranicu EEIX36.

Pitagorejci su se vezano za Pitagorin poučak (vidi niže) bavili i pitagorejski trojkama. Znali su da ih ima beskonačno mnogo, a pripisuje im se i dokaz teorema o primitivnim pitagorejskim trojkama, tj. o pitagorejskim trojkama u kojima su brojevi relativno prosti (teorem dajemo u suvremenoj formulaciji):

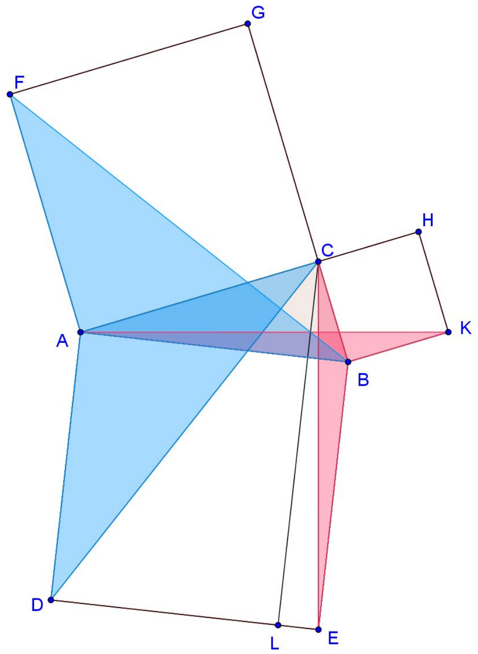
**Teorem 4 ($\boxed{\textbf{EEX29}}$,lema)** *Za svaka dva relativno prosta prirodna broja $m > n$, koji nisu oba neparni, $(2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$ je primitivna pitagorejska trojka i obrnuto, za svaku primitivnu pitagorejsku trojku $(a, b, c)$ postoje dva relativno prosta prirodna broja $m$ i $n$, koji nisu oba neparni, takvi da je $(a, b, c) = (2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$.*

Primijetimo da specijalno za $n = 1$ odmah vidimo da postoji beskonačno mnogo pitagorejskih trojki.

Pitagorejske trojke su naravno vezane za Pitagorin poučak. Iako ne znamo je li ga Pitagora osobno dokazao, čini se pouzdano da je neki pitagorejac prvi koji je taj teorem dokazao (kako smo već vidjeli, teorem je bio poznat još Babiloncima, ali ne i dokaz). Ne znamo točno kakav je bio pitagorejski dokaz tog poučka, ali budući da se većina sadržaja I. knjige EE pripisuje pitagorejcima, razumno je pretpostaviti da je tamo zapisan dokaz zapravo pitagorejski. Mi ćemo ovdje opisati Euklidov dokaz samo nužnosti u Pitagorinom poučku. U tom se dokazu vidi i osnovni princip tzv. **geometrijske algebre** starih Grka, a to je da su identitete koje danas interpretiramo algebarski antički Grci gledali i dokazivali čisto geometrijski, kao jednakost duljina, površina ili volumena, u ovom slučaju površina. Kad se u geometrijskoj algebri govori o jednakosti, kao npr. ovdje o jednakosti jednog kvadrata s druga dva, misli se na jednakost mjere (ovdje površine), a ne na sukladnost.

[4] Obrat (da ne postoje drugi parni savršeni brojevi osim onih gornjeg oblika) je dokazao tek Euler u 18. st.

[5] Tj. svaki sljedeći član je dvostruko veći od prethodnog.




Slika 4.1: Ilustracija uz Euklidov dokaz nužnosti u Pitagorinom poučku.

**Teorem 5 (EEI47, EEI48)** *Trokut je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad njegovom najduljom stranicom jednak zbroju kvadrata nad njegovim kraćim stranicama.*

*Dokaz nužnosti.* Neka je dakle dan pravokutni trokut $\triangle ABC$ s pravim kutom pri vrhu $C$ (slika 4.1). Nad sve tri stranice konstruirani su i kvadrati $ACGF$, $BCHK$ i $ABED$. Nadalje, ucrtana je i visina $CL$ na hipotenuzu, od vrha $C$ do nasuprotne stranice kvadrata nad hipotenuzom. Ta visina dijeli kvadrat nad hipotenuzom na dva pravokutnika. Dokazujemo da je jedan od njih jednak (po površini) kvadratu nad jednom katetom. Zatim se analogno dokaže da je drugi jednak kvadratu nad drugom katetom, iz čega slijedi tvrdnja. Dokažimo recimo da je lijevi pravokutnik $ADLT$ jednak kvadratu $ACGF$: Ucrtajmo trokute $ADC$ i $ABF$. Ta dva trokuta imaju jednu zajedničku stranicu ($AB$), zatim još jednu stranicu jednake duljine ($|AF| = |AC|$ jer je $ACGF$ kvadrat), a i kut među tim dvjema stranicama je jednak ($\angle FAB$ je pravi kut uvećan za kut $\angle CAB$, a takav je i $\angle CAD$). Po SKS-teoremu[6] ta dva trokuta su ne samo u smislu geometrijske algebre jednaka, nego i suk-

[6]Ako je ovaj dokaz pitagorejski, to znači da su pitagorejci znali i SKS-teorem. Budući da se i on može naći u I. knjizi EE kao EEI4, to je vrlo vjerojatno.

ladna. Budući da trokut $\triangle ACD$ ima jednaku jednu stranicu i visinu na nju kao pravokutnik $ADLT$ (stranica $AD$ je zajednička, a visina je $DL$) slijedi da je taj trokut jednak pola pravokutnika.[7] S druge strane trokut $\triangle AFB$ ima s kvadratom $ACGF$ zajedničku stranicu $AF$ i visinu $AC$, dakle je taj trokut jednak pol tog kvadrata. Budući da su trokuti jednaki, slijedi da je kvadrat $ACGF$ jednak pravokutnik $ADLT$, što je i trebalo dokazati. ■

Kao što je rečeno, pitagorejcima se pripisuje veći dio sadržaja EEI, što uključuje razne propozicije iz elementarne planimetrije: konstrukcija paralele i okomice na pravac, bisekcija kuta i dužine, teoremi o sukladnosti trokuta, teorem da je zbroj ... Posebno, znali su da je zbroj kutova u svakom trokutu jednak 2 prava kuta, kao i generalizaciju: zbroj kutova u svakom četverokutu je 4 prava kuta, u svakom peterokutu je 6 pravih kutova i t. d., tj. suvremenim stilom iskazano: Zbroj kutova u svakom $n$-terokutu je $2n - 4$ prava kuta.

Poznat je i pitagorejski interes za pravilne mnogokute i pravilne poliedre. Sigurno su poznavali bar tri od pravilnih poliedara (kocku, pravilni oktaedar i pravilni dodekaedar), a moguće je da su poznavali i preostala dva. Pripisuje im se i poznavanje dokaza sljedećeg teorema [**?**]:

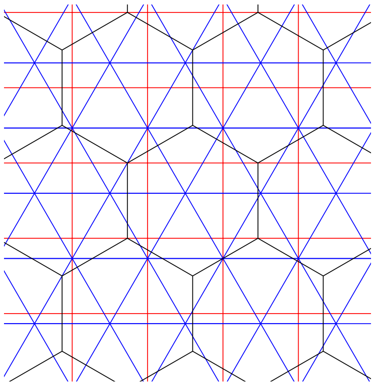
**Teorem 6** *Postoje samo tri pravilna popločavanja*[8] *ravnine: popločavanje jednakostraničnim trokutima, popločavanje kvadratima i popločavanje pravilnim šesterokutima (slika 4.2).*

*Dokaz.* Budući da je zbroj kutova u svakom $n$-terokutu $2n - 4$ prava kuta, znači da je u pravilnom $n$-terokutu svaki kut jednak $\alpha = \frac{2n-4}{n}$ pravih kuteva. U svakom vrhu pravilnog popločavanja sastaje se isti broj $m$ pravilnih $n$-terokuta, dakle je $m\alpha$ jednak četiri prava kuta. Stoga mora biti $m = 4\frac{n}{2n-4} = 2 + \frac{4}{n-2}$. Pritom su $m$ i $n$ prirodni brojevi veći od 1. Ako je $n = 3$ dobije se $m = 6$ (popločavanje jednakostraničnim trokutima), ako je $n = 4$ dobije se $m = 4$ (popločavanje kvadratima), ako je $n = 5$ $m$ nije cijeli, ako je $n = 6$ dobije se $m = 3$ (popločavanje pravilnim šesterokutima). Za $n > 6$ je $\frac{4}{n-2}$ manje od 1, dakle ne može biti cijeli broj. ■

Široj matematičkoj i općenito obrazovanoj populaciji je uz Pitagorin poučak vjerojatno najpoznatiji pitagorejski rezultat kojeg danas iskazujemo ovako: $\sqrt{2}$ je iracionalan broj. No, kako smo rekli, za pitagorejce samo prirodni brojevi su brojevi, čak ni razlomci (oni su za njih omjeri dva broja),

[7] I ovo se nalazi dokazano u EEI, propozicija 41: Ako paralelogram ima istu osnovicu kao trokut i ako se nalaze između istih paralela, onda je paralelogram dvostruki trokut.

[8] Popločavanje ravnine je prekrivanje ravnine bez rupa i preklapanja kopijama jednog ili više likova ('pločica'). Popločavanje je pravilno ako su sve pločice sukladni pravilni mnogokuti koji imaju zajedničke vrhove i ako se u svakom vrhu sastaje isti broj pločica.

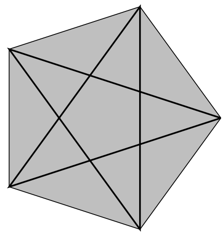


Slika 4.2: Tri pravilna popločavanja ravnine.

a kamoli brojevi koje danas zovemo iracionalnima za njih nisu bili brojevi. Pitagorejci su smatrali da se cijeli svijet može opisati prirodnim brojevima i njihovim odnosima (omjerima). Posebno je to značilo da im je osnovno uvjerenje bilo da su svake dvije *istovrsne* veličine (dva broja, dvije duljine, dvije površine, dva volumena, ...) **sumjerljive**, tj. da za svake dvije istovrsne veličine postoji njima istovrsna veličina (zajednička mjera) kojom se mogu obje izmjeriti. Dakle, pitagorejska pretpostavka (uvjerenje) o sumjerljivosti znači da su svake dvije istovrsne veličine višekratnici jedne te iste njima istovrsne veličine, koja im je zajednička mjera („mogu se njome izmjeriti”). Kad to zapišemo na suvremen način vidimo da su pitagorejci smatrali da za sve $a, b > 0$ postoji $m > 0$ te $k, l \in \mathbb{N}$ tako da je $a = k\,m$ i $b = l\,m$, odnosno da je $a : b = k : l$ — svake dvije pozitivne, istovrsne veličine imaju omjer kao prirodni brojevi. Možemo to i ovako iskazati: Postoji jedinica duljine (površine, volumena, vremena, mase, ...) takva da svaka duljina (površina, volumen, vremenski interval, masa, ...) kao mjeru ima racionalan broj.

Neki pitagorejac (navodno Hipasus iz Metaponta oko 450. g. pr. Kr.) je dokazao da dijagonala kvadrata nije sumjerljiva njegovoj stranici. To je naravno ekvivalentno suvremenom „$\sqrt{2}$ nije racionalan broj”, ali je konceptualno bitno drugačije. Također, iz već navedenih razloga takav dokaz je zasigurno bio čisto geometrijski, a ne kao današnji algebarsko-simbolički. Druge teorije sugeriraju da je prvi dokaz egzistencije nesumjerljivih veličina bio nesumjerljivost stranice i dijagonale pravilnog peterokuta jer je pravilni pentagram (slika 4.3) bio simbol pitagorejske škole. Omjer duljina dijagonale i stranice pravilnog peterokuta danas je poznat pod nazivom **omjer zlatnog reza**.[9] Pitagorejci su uočili da je taj omjer moguće definirati kao omjer

[9]Naziv 'omjer zlatnog reza' uveo je tek 1835. godine njemački matematičar Martin



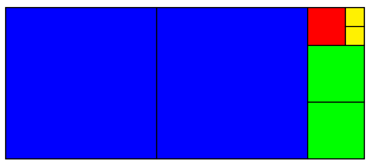
Slika 4.3: Pravilni pentagram

dviju duljina u kojem se dulja prema kraćoj odnosi kao kraća prema njihovoj razlici:

$$d : a = a : (d - a).$$

Bilo da je otkriće nesumjerljivih veličina vezano za kvadrat bilo za pravilni peterokut, gotovo sigurno [4] ono je proizašlo iz otkrića **Euklidovog algoritma** [**?**]. Najkasnije od egipatskog i sumerskog doba bilo je lako usporediti dvije istovrsne veličine (broja, mase, duljine, ...) ako je iznos jedne prirodni višekratnik iznosa druge. Primjerice, na sljedećoj slici ilustrirano je kako utvrđujemo da je dulja dužina 5 puta dulja od kraće:

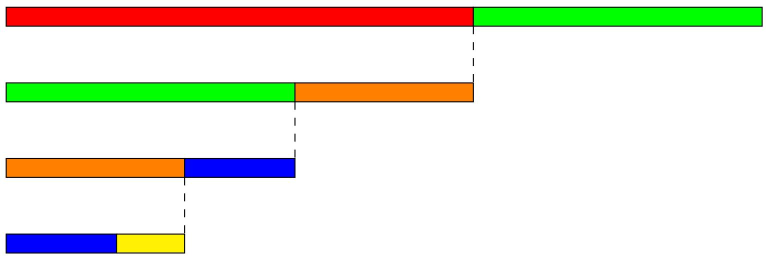
Pitagorejci (a možda čak i Egipćani ili Babilonci) su otkrili kako se snaći s „ostatkom”. Naime, ako veća veličina nije višekratnik prve (dakle, ako veću ne možemo izmjeriti manjom), onda ostatkom mjerimo manju. Ako opet ostane ostatak, onda prvi ostatak mjerimo drugim i t.d., sve dok u nekom trenu ne nađemo zajedničku mjeru dvaju zadnjih ostataka, koja je onda (najveća) zajednička mjera polaznih dviju veličina. Tako je na sljedećoj slici mali žuti kvadratić (najveća) zajednička mjera za čitav pravokutnik i za plavi kvadrat, odnosno duljina njegove stranice je (najveća) zajednička mjera za stranice polaznog pravokutnika.



Temeljna pitagorejska postavka o sumjerljivosti svake dvije veličine znači da za svake dvije veličine postupak Euklidovog algorimta staje u konačno

Ohm, brat znamenitijeg fizičara Georga Ohma.

mnogo koraka (to je dokazano u EEX2). No, ako uzmemo dvije duljine u omjeru zlatnog reza imat ćemo sljedeći niz koraka u Euklidovom algoritmu:[10]



Budući da je u svakom koraku omjer dulje prema kraćoj duljini isti

$$d : a = a : (d - a),$$

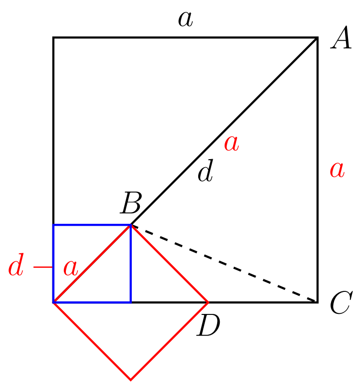
postupak se nastavlja u beskonačnost — ne postoji zajednička mjera crvene i zelene dužine, koje su u omjeru zlatnog reza. Dakle, postoje istovrsne veličine koje nisu sumjerljive (i omjer zlatnog reza $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ te stoga i $\sqrt{5}$ nisu racionalni brojevi).

Primijenimo taj način razmišljanja na dokaz nesumjerljivosti dijagonale i stranice kvadrata. Pogledajmo sliku 4.4. Dan je kvadrat (duljinu stranice označili smo s $a$, a dijagonale s $d$). Ucrtamo manji kvadrat (crveno) tako da mu stranica leži na dijagonali i da mu je stranica duljine $d-a$. Trokut $\triangle ABC$ je jednakokračan, iz čega (zbog jednakosti kutova s okomitim kracima) slijedi da je i $\triangle DBC$ jednakokračan, tj. $|CD| = d - a$. Stoga je dijagonala crvenog kvadrata duljine $a - (d - a) = 2a - d$. Sad bismo mogli na isti način u crveni kvadrat ucrtati kvadrat kojemu je stranica duljine njegove dijagonale minus njegove stranice, i tako u beskonačnost. Pritom je u svakom sljedećem koraku $a_{n+1} = d_n - a_n$ i $d_{n+1} = 2a_n - d_n$. Kad bi $a$ i $d$ bile sumjerljive, sa zajedničkom mjerom $m$, onda bi u svakom koraku $a_n$ i $d_n$ bile sumjerljive, istovremeno postajući proizvoljno male (dakle, u nekom trenu i manje od $m$), što je nemoguće. Zaključujemo da dijagonala i stranica kvadrata ne mogu biti sumjerljive.

## 4.2 Atensko razdoblje grčke matematike

U prvoj polovici 5. st. pr. Kr. kao centar grčke filozofske i znanstvene djelatnosti pomalo se počinje isticati Atena. Vrhunac tog razdoblja označen je Platonovim osnivanjem Akademije (ca. 387. pr. Kr.). Atensko razdoblje potrajalo je do doba osvajanja Aleksandra Makedonskog, dakle do potkraj

[10] Ovo se obično ilustrira tzv. Pitagorinom lutnjom.




Slika 4.4: Nesumjerljivost dijagonale i stranice kvadrata.

4. st. pr. Kr. U atenskom razdoblju starogrčka matematika u potpunosti poprima formu geometrijske algebre, a pojavljuju se i temelji infinitezimalnog načina razmišljanja te matematičke logike.

Tijekom atenskog razdoblja akrofonske brojke postepeno su zamijenjene **alfabetskim (miletskim) brojkama**, no i one potječu još iz jonskog razdoblja. Princip tog sustava sličan je brojevnim sustavima koje su koristili Feničani, a kasnije Židovi, Arapi, Hrvati (glagoljske brojke), ...: Slovima alfabeta, u ovom slučaju grčkog, pridružene su brojevne vrijednosti. Konkretno, grčki alfabetski sustav je dekadski sustav sa znamenkama (slovima) koja odgovaraju brojevima jedan do devet pomnoženim s jedan, deset, sto i tisuću, dakle se radi o dekadskom sustavu. Za to je potrebno 27 slova, a grčki alfabet ih ima 24, te su za grčke alfabetske brojke dodatno korištena tri arhaična slova: feničko slovo vau (digama) za 6, kopa za 90 i san (sampi) s vrijednošću 900. Dalje je alfabetski sustav znamenkasto aditivan, a tijekom atenskog razdoblja dodani su mu i neki principi multiplikativnog sustava (kod tisućica se stavlja crtica, *hasta*, dolje lijevo uz odgovarajući simbol jedinica). Do kraja atenskog razdoblja znamenke ovog sustava poprimile su formu prikazanu slikom 4.5. Uočimo da je korištenjem slova M (veliko $\mu$, od mirijada, tj. deset tisuća) sustav proširen i na više potencije od 10, no to se desilo, čini se, tek početkom sljedećeg, helenističkog razdoblja. Da bi se tekst razlikovao od brojki, alfabetske brojke obično su završavale apostrofom ili bivale natcrtane. Primjerice, $\overline{\rho\iota\alpha}$ ili $\rho\iota\alpha'$ je naš 111 [8].

Recimo prvo nešto o začecima matematičke analize, tj. **infinitezimalnog računa**, koji sežu u ovo razdoblje. Filozofu **Zenonu iz Eleje** (ca. 490.–430. pr. Kr.) Aristotel pripisuje četiri paradoksa kretanja, u kojima iz beskonačne djeljivosti prostora odnosno vremena Zenon dobiva prividno paradoksalni rezultat nemogućnosti kretanja. Zenonovi paradoksi su:

| × | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Α′<br>α′ | Β′<br>β′ | Γ′<br>γ′ | Δ′<br>δ′ | Ε′<br>ε′ | Ϛ′<br>ϛ′ | Ζ′<br>ζ′ | Η′<br>η′ | Θ′<br>ϑ′ |
| 10 | Ι′<br>ι′ | Κ′<br>ϰ′ | Λ′<br>λ′ | Μ′<br>μ′ | Ν′<br>ν′ | Ξ′<br>ξ′ | Ο′<br>ο′ | Π′<br>π′ | Ϙ′<br>ϙ′ |
| $10^2$ | Ρ′<br>ρ′ | Σ′<br>σ′ | Τ′<br>τ′ | ϒ′<br>υ′ | Φ′<br>φ′ | Χ′<br>χ′ | Ψ′<br>ψ′ | Ω′<br>ω′ | Ϡ′<br>ϡ′ |
| $10^3$ | ͵Α<br>͵α | ͵Β<br>͵β | ͵Γ<br>͵γ | ͵Δ<br>͵δ | ͵Ε<br>͵ε | ͵Ϛ<br>͵ϛ | ͵Ζ<br>͵ζ | ͵Η<br>͵η | ͵Θ<br>͵ϑ |
| $10^4$ | $\overset{\alpha}{\mathrm{M}}$ | $\overset{\beta}{\mathrm{M}}$ | $\overset{\gamma}{\mathrm{M}}$ | $\overset{\delta}{\mathrm{M}}$ | $\overset{\varepsilon}{\mathrm{M}}$ | $\overset{\text{ϛ}}{\mathrm{M}}$ | $\overset{\zeta}{\mathrm{M}}$ | $\overset{\eta}{\mathrm{M}}$ | $\overset{\vartheta}{\mathrm{M}}$ |

Slika 4.5: Znamenke klasičnog grčkog alfabetskog brojevnog sustava.

- *Dihotomija*: Kretanje je nemoguće jer se svaku udaljenost prvo treba prijeći do pola, a nakon toga pola ostatka i t.d. Ma koliko prijeđemo, uvijek će ostati razlika do cilja.
- *Ahil i kornjača*: Ahil je puno brži od kornjače. Dok Ahil dođe do prvotne pozicije kornjače, ona se pomakla. Dok dođe do te pozicije, ona je opet malo odmakla, i t.d. Dakle, Ahil neće nikad stići kornjaču.
- *Strijela*: Strijela je u svakom trenutku u nekoj poziciji koju se ne može razlikovati od mirovanja. Dakle, strijela se ne može gibati.
- *Stadion*: Imamo tri reda jednako velikih objekata, jednako mnogo njih. Jedan miruje, druga dva se istim brzinama kreću uzduž tog mirujućeg reda u suprotnim smjerovima. Zenon uspijeva argumentirati: Pola vremena je dvostruko vrijeme.

Sva četiri paradoksa po prvi put otvaraju pitanje prirode kontinuuma. Uz to, dihotomija te paradoks o Ahilu i kornjači se mogu smatrati prvim pokušajem razmatranja **limesa nizova** odnosno **sumacije redova**. Danas kad su ti pojmovi precizirani lako se pokaže da paradoksa tu nema, primjerice ne-paradoksalnost dihotomije objašnjavamo konvergencijom geometrijskog reda s kvocijentom $\frac{1}{2}$.

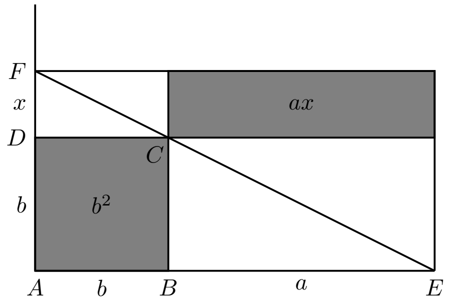
S druge strane, filozof **Demokrit iz Abdere** (ca. 460.–370. pr. Kr.), najpoznatiji po ideji nedjeljivih čestica „atoma" kao osnovnih jedinica materije, za nas je zanimljiv po ideji podjele stošca na beskonačno tanke diskove paralelne bazi. Tako je došao do dileme: Ako gledamo jedan takav disk, jesu li njegove osnovice jednake ili ne? Ako jesu, stožac je valjak, ako nisu, stožac je grbav. Naravno, ni tu dileme, znamo danas, nema, ali očigledno ovo njegovo razmatranje možemo smatrati prethodnikom ideje **integrala**.

Kao što smo već rekli, **geometrijska algebra** je matematički pristup starih Grka u kojem primjerice kvadrat nije broj odnosno potencija, nego geometrijski lik i ujedno njegova mjera (površina). Dva objekta su jednaka ako su jednaki po mjeri (iznosu, duljini, površini odnosno obujmu). Sam naziv nastao je tek u 19. stoljeću jer se danas tako dobiveni rezultati mogu interpretirati kao algebarske formule odnosno kao rješavanje algebarskih jednadžbi. Dakle, vrlo bitno je istaknuti: Nisu stari Grci jednadžbe rješavali geometrijski (jer u njih još nije bilo ideje jednadžbe), nego mi danas mnoge njihove rezultate interpretiramo i dokazujemo algebarski. Tijekom 5. st. pr. Kr. starogrčki matematičari su dodatno počeli zahtijevati da se **geometrijske konstrukcije** smiju provoditi isključivo (neoznačenim) ravnalom i šestarom. Stoga se za jednakost (brojeva, duljina, površina, odnosno volumena) tražilo i više od puke jednakosti mjere: morala se moći dokazati u konačno mnogo konstrukcijskih koraka ravnalom i šestarom. Kao razlog tog ograničenja mnogi autori navode da su se kao jedine dvije krivulje prisutne u stvarnome svijetu smatrali pravci i kružnice, koje su smatrane „savršenim” krivuljama jer „svaka dva njihova dijela” izgledaju podjednako. Kao primjer pristupa geometrijske algebre navodimo sljedeći, inspiriran propozicijama EEI42 i EEI44.

**Primjer 16** *Zadan je kvadrat* $\square ABCD$*, potrebno je konstruirati njemu jednak (naravno, po površini) pravokutnik kojemu je zadana jedna stranica. Ta zadana stranica se postavi kao nastavak* $\overline{BE}$ *stranice* $\overline{AB}$ *kao na slici 4.6, što je moguće ravnalom i šestarom (kako?). Zatim se konstruiraju pravci* $AD$ *i* $EC$ *te odredi njihovo sjecište* $F$*. Naposlijetku se* $EAF$ *dopuni do pravokutnika (konstruirajući paralele) i produlje dužine* $\overline{CD}$ *i* $\overline{BC}$ *do rubova tog pravokutnika. Budući da je* $\overline{EF}$ *dijagonala tog pravokutnika, ona ga raspolavlja. Također, vidljiva su dva para sukladnih trokuta. Stoga su sive površine jednake, tj. zadatak je riješen.*

*Ako ovu konstrukciju interpretiramo na moderni algebarski način vidimo da se zadane* $b^2$ *i* $a$ *traži* $x$ *takav da je* $a\,x = b^2$*, tj. iz moderne perspektive je ovo rješavanje linearne jednadžbe. Pritom uočimo da možemo izjednačavati samo istovrsne mjere, ovdje površine (*$a\,x$ *i* $b^2$*, a ne* $b$*). Taj* ***princip homogenosti*** *u jednadžbama opstat će još mnoga stoljeća, čak i nakon što u 9. st. arapski matematičari utemelje algebru.*

Vjerojatno najpoznatija matematička tema koja potječe iz atenskog razdoblja antičke grčke matematike su **tri klasična problema**. Početkom 5. st. pr. Kr. konstrukcije bisekcije kuta, podjele dužine na proizvoljan broj




Slika 4.6: Primjer geometrijske algebre (primjer 16).

jednakih dijelova, udvostručenja kvadrata i mnoge druge već su bile dobro poznate. Najvjerojatnije su pokušaji njihove generalizacije doveli do pojave triju znamenitih problema, koji su postali problemi upravo zbog uvjeta geometrijske algebre, odnosno konstruktibilnosti ravnalom i šestarom:

1. **Problem udvostručenja (duplikacije) kocke**: Za danu kocku treba ravnalom i šestarom konstruirati brid kocke dvostrukog volumena.

2. **Problem trisekcije kuta**: Dani kut treba ravnalom i šestarom podijeliti na trećine.

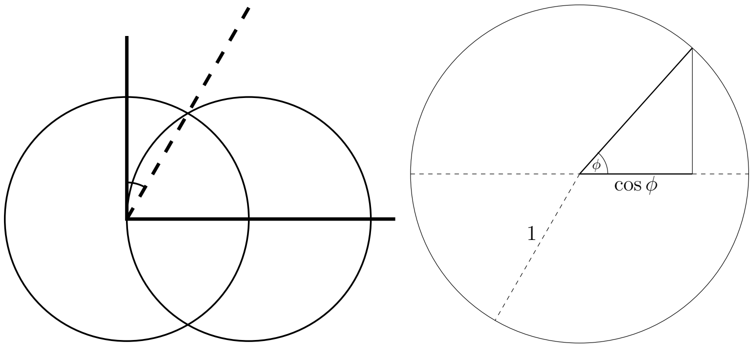
3. **Problem kvadrature kruga**: Ravnalom i šestarom treba konstruirati stranicu kvadrata iste površine kao dani krug.

Problem udvostručenja kocke danas formuliramo ovako: Za zadani $a > 0$ zadatak je ravnalom i šestarom konstruirati $x$ takav da je

$$x^3 = 2a^3.$$

O njegovoj prvoj pojavi govore dvije poznate legende. Jednu, po kojoj je ovaj problem poznat i kao delijski problem, navodi Teon iz Smirne (ca. 70.–130.) citirajući Eratostena, a to je da su građani Delosa u doba jedne epidemije potražili savjet proročišta u Delfima kako da se riješe jedne epidemije te im je rečeno da konstruiraju dvostruko veći oltar od postojećeg kockastog oltara posvećenog bogu Apolonu. Drugu pak navodi Eutokije Askalonski (ca. 480.–540.) u komentaru Arhimedova teksta *O kugli i valjku*, a to je da je kretski kralj Minos htio udvostručiti grob pjesnika Glaukusa.

Za razliku od toga, o problemu trisekcije kuta nema nikakvih, čak niti legendarnih, podataka o njegovom nastanku. Bio je manje popularan od druga dva klasična problema, vjerojatno zato što je za neke kutove rješiv




Slika 4.7: Pravi kut se može trisektirati ravnalom i šestarom, a konstrukcija kuta ekvivalentna je konstrukciji njegova kosinusa.

ravnalom i šestarom. Kako se on uklapa u našu definiciju geometrijske algebre? Uočimo prvo da ga je dovoljno razmatrati samo za šiljaste kutove, jer se pravi kut može trisektirati ravnalom i šestarom koristeći konstrukciju jednakostraničnog trokuta (slika 4.7 lijevo). Nadalje, šiljasti kut $\phi$ (primjerice, trećina zadanog kuta $\alpha$) može se konstruirati ako i samo ako se može konstruirati $\cos\phi$.[11] To se lako uoči iz definicije sinusa i kosinusa u jediničnoj kružnici (vidi sliku 4.7 desno). Ako je zadan $\alpha$, iz $\cos(3\phi) = 4\cos^3\phi - 3\cos\phi$ uz supstitucije $3\phi = \alpha$ i $x = \cos\phi$ vidimo da je problem trisekcije kuta ekvivalentan konstrukciji rješenja kubne jednadžbe

$$4x^3 - 3x = \cos\alpha.$$

Naposlijetku, problem kvadrature kruga danas interpretiramo ovako: Za zadani $r > 0$ treba ravnalom i šestarom konstruirati $x$ takav da je

$$x^2 = r^2\pi.$$

Za ovaj problem postoji konkretno ime uz koje se veže njegova prva pojava. Bio je to navodno **Anaksagora iz Klazomene** (ca. 499.–428. pr. Kr.), Periklov prijatelj koji je završio u zatvoru zbog tvrdnje da Sunce nije bog te se navodno u zatvoru počeo baviti ovim problemom. Prvi zanimljivi pokušaj rješavanja ovog problema pripisuje se sofistu **Antifontu** (ca. 480.–411. pr. Kr.). On je navodno predložio upisivanje pravilnih mnogokuta u krug, počevši od kvadrata, preko osmerokuta redom uz udvostručavanje broja stranica. Smatrao je da će se ostatak do površine kruga iscrpsti kad dođemo

[11] Alternativno $\sin\phi$. Oprez: U ovo doba još nije postojala trigonometrija, tako da je ovo moderna analiza problema, a ne starogrčki pristup.

do dovoljno velikog broja stranica. Naravno, tu je počinio matematičku grešku, koju danas izražavamo ovako: Ako se svaki član nekog niza može konstruirati ravnalom i šestarom, to ne znači da se i limes tog niza može konstruirati. U svakom slučaju ovaj problem je brzo postao iznimno popularan, na što primjerice ukazuje činjenica da ga Aristofan spominje u komediji *Ptice* (414. pr. Kr.).

Zašto su ova tri problema toliko važna? Danas znamo da oni nisu rješivi (naravno, poštujući uvjet konstrukcije rješenja ravnalom i šestarom). No, pokušaji rješenja tih problema, posebno u antičko grčko doba, ali i kasnije, doveli su do mnogih novih matematičkih otkrića. Sad ćemo navesti samo neke od najvažnijih iz ovog, atenskog, razdoblja, no još ćemo se s njima susresti i kasnije.

Prvi značajni matematičar atenskog razdoblja bio je **Hipokrat s Hiosa** (ca. 470. – 410. pr. Kr.). On je navodno bio trgovac brodovima iz Jonije, ali je izgubio imovinu (jedni navode gusare, drugi nepoštene carinike) te je dvadesetak godina, otprilike 450.–430. pr. Kr., proveo u Ateni čekajući odštetu. Za to je vrijeme učio filozofiju i matematiku, te je postao najznačajniji matematičar u 5. st. pr. Kr.[12] Hipokrat s Hiosa je dao je prve značajne doprinose rješavanju sva tri klasična problema. Napisao je danas izgubljeno djelo *Elementi geometrije*, koje je vjerojatno bilo osnova za prve četiri knjige Euklidovih *Elemenata*. Znao je, a možda i dokazao, da se površine krugova odnose se kao kvadrati nad njihovim polumjerima[13] Pripisuje mu se uvođenje slova kao oznaka u geometrijskim dijagramima.

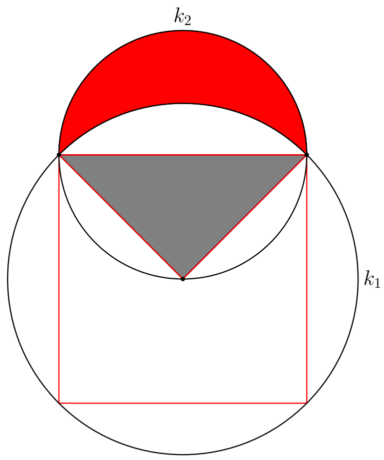
Hipokrat je zabilježen kao prva osoba koja je točno odredila kvadraturu nekog lika obrubljenog krivuljama. Pri pokušaju rješavanja problema kvadrature kruga Hipokrat je naime otkrio da se određeni mjesecoliki likovi omeđeni dvjema kružnicama mogu kvadrirati ravnalom i šestarom. Ti se likovi danas nazivaju **Hipokratovi mjeseci**. Geometrijski gledano, mjesec je lik omeđen lukovima dviju ekscentričnih kružnica različitih polumjera. Ako se takav mjesec može kvadrirati ravnalom i šestarom, nazivamo ga Hipokratovim. Sam Hipokrat je otkrio, do na sličnost, tri tipa takvih mjeseca, a danas je poznato da ih ima pet.[14] Mi ćemo ovdje opisati samo prvi tip, a za preostale i dokaz da ih ima točno pet upućujemo na ovaj link.

Prvi Hipokratov mjesec je mjesec omeđen kružnicom $k_1$ kojoj je polumjer kateta pravokutnog jednakokračnog trokuta, a središte u vrhu s pravim kutom, te kružnicom $k_2$ čiji promjer je hipotenuza tog trokuta, tj. kružnicom opisanom tom trokutu (slika 4.8). Kvadrat nad hipotenuzom (promjerom

[12] Ne valja ga miješati sa suvremenikom i imenjakom, liječnikom Hipokratom s Kosa.

[13] Najstariji sačuvani dokaz nalazimo u EEXII2, pomoću metode ekshaustije.

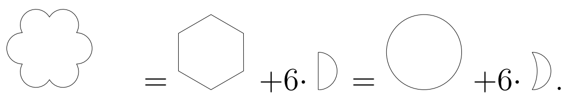
[14] Preostala dva su otkrivena u 18. st. (M. J. Wallenius), a u 20. st. je dokazano da nema drugih (N. G. Čebotarev, A. V. Dorodnov).

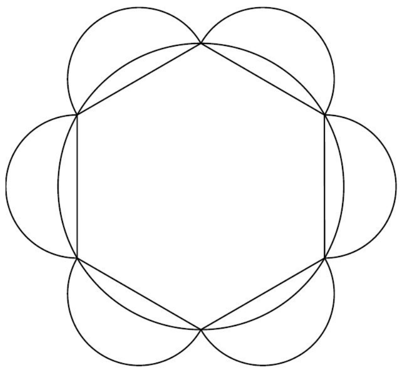



Slika 4.8: Prvi Hipokratov mjesec.

od $k_2$) je prema Pitagorinom poučku dvostruki kvadrat nad katetom trokuta (polumjerom od $k_1$). Budući da je polumjer pola promjera, to znači da je kvadrat nad hipotenuzom pola kvadrata nad promjerom kruga omeđenog s $k_1$. Budući da se površine krugova odnose kao kvadrati nad njihovim promjerima, što je, kako smo rekli, Hipokrat znao, slijedi da se površina kruga nad hipotenuzom prema površini kruga omeđenog s $k_1$ isto odnosi kao $1 : 2$, pa se tako odnose i odgovarajući polukrugovi. Stoga polukrug nad hipotenuzom ima jednaku površinu kao isječak koji je četvrtina kruga omeđenog s $k_1$. Površina mjeseca (crveno na slici 4.8) je očito zbroj površina trokuta i polukruga nad hipotenuzom umanjena za spomenuti isječak u krugu omeđenom s $k_1$, pa slijedi da prvi Hipokratov mjesec ima istu površinu kao trokut kojim je određen. Budući da se trokut (kao i svaki drugi uglati lik, što ćemo kasnije i pokazati) može kvadrirati ravnalom i šestarom, opisani mjesec je stvarno Hipokratov mjesec.

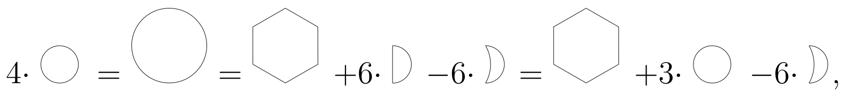
Prema više izvora, Hipokrat je bio svijestan da svojim otkrićem mjeseca koji se mogu kvadrirati ravnalom i šestarom nije riješio problem kvadrature kruga. No, neki navode sljedeće krivo zaključivanje kao, možda, njegovo. Pogledajmo pravilni šesterokut s opisanom kružnicom i ucrtanim polukružnicama nad svim njegovim stranicama (slika 4.9). Polumjer kružnice jednako je dug kao stranice pravilnog šesterokuta (tj. promjeri malih polukružnica), pa se površine malih i velikih krugova se odnose $4 : 1$. Stoga vrijedi sljedeći „geometrijski račun": Prvo uočimo da je



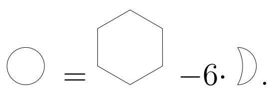


Slika 4.9: Veza mjesecâ i kvadrature kruga.

Stoga je

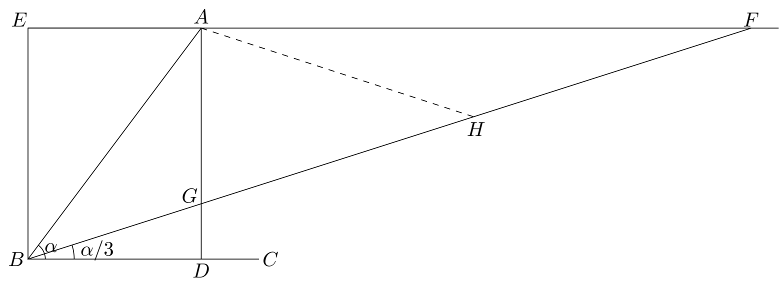


pa je



Dakle, kad bi se mjeseci sa slike 4.9 mogli kvadrirati, mogao bi se kvadrirati i (mali) krug, no danas znamo da ti mjeseci *nisu* Hipokratovi mjeseci.

Vezano za trisekciju kuta, Hipokrat je otkrio sljedeću u praksi lako provedivu „mehaničku" trisekciju kuta. Neka je zadan kut $\alpha = \angle ABC$ kojeg treba podijeliti na trećine (slika 4.10). Prvo konstruiramo okomicu iz $A$ na krak $BC$, neka joj je nožište $D$. Zatim $ADB$ dopunimo do pravokutnika $ADBE$ i produljimo dužinu $\overline{EA}$ na strani od $A$. Sljedeći korak nije provediv ravnalom i šestarom, ali u praksi jest izvediv: Na tom produljenju $AE$ nađe se točka $F$ takva da je $|FG| = 2|AB|$, gdje je $G = BF \cap AD$. U tom slučaju je $\angle FBC = \frac{\alpha}{3}$. Naime, po konstrukciji je $|AB| = |HF| = |HG|$, dakle je $\triangle AFH$ jednakokračan ($AH$ je težišnica u pravokutnom trokutu $\triangle GAF$ pa ga dijeli na dva jednakokračna trokuta) i posljedično $\triangle ABH$ jednakokračni trokut. Stoga je $\angle FAH = \angle AFH = \phi$ te je kao vanjski kut trokuta $\triangle AFH$ kut $\angle AHB = 2\phi$, ali je i $\angle ABF = \angle AHB = 2\phi$. Naposlijetku, uočimo da je $AB$ transverzala (presječnica) paralelnih pravaca $EA$ i $BC$. Stoga je $\angle FBC = \angle AFB = \phi$. Dakle, $\alpha = \angle ABC = \angle ABF + \angle FBC = 2\phi + \phi = 3\phi$, dakle je $\phi$ rješenje problema.




Slika 4.10: Hipokratova trisekcija kuta.

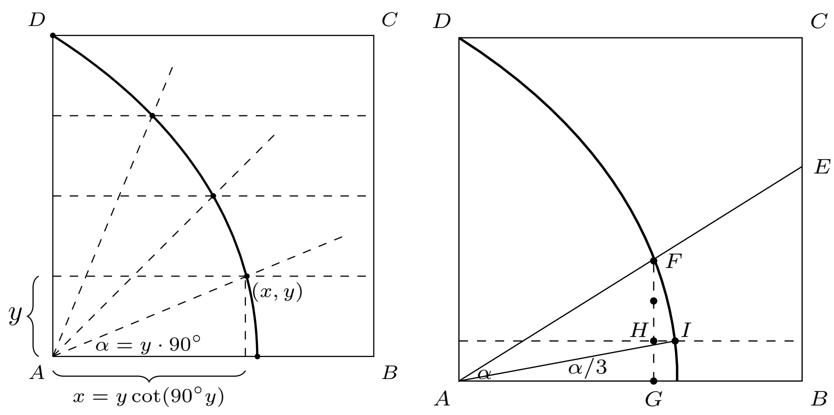
Hipokratov doprinos problemu udvostručenja kocke možda se čini najjednostavnijim od njegovih doprinosa trima klasičnim problemima, no pokazao se najvažnijim. Prvo definirajmo: **Srednje geometrijske proporcionale** između *istovrsnih*[15] veličina $a$ i $b$ su njima istovrsne veličine $x$ i $y$ takve da je

$$a : x = x : y = y : b.$$

Hipokrat je uočio da se kocka brida $a$ može udvostručiti ako se mogu konstruirati srednje geometrijske proporcionale između $a$ i $2a$. Mi to danas lako algebarski potvrđujemo: Iz $a : x = x : y = y : (2a)$ slijedi $2a\,x = y^2$ i $a\,y = x^2$ pa je $x^3 = 2a^3$. Nakon Hipokrata svi pokušaji rješenja ovog problema usmjereni su na određivanje srednjih geometrijskih proporcionala između $a$ i $2a$.

Istaknimo još trojicu matematičara iz 5. st. pr. Kr. Prvi od njih zapravo nije bio matematičar, nego državnik i filozof sofist **Hipija iz Elide** (ca. 460.–400. pr. Kr.). Za život je zarađivao putujući i držeći predavanja iz poezije, gramatike, povijesti, politike, arheologije, matematike i astronomije. Platon ga je kasnije opisao kao umišljenog i arogantnog čovjeka širokog, ali površnog znanja. Jedini bitni matematički doprinos mu je otkriće krivulje **kvadratise** (**trisektrise**), koja se može iskoristiti i za kvadraturu kruga i trisekciju kuta (zapravo, za podjelu kuta na bilo koji broj jednakih dijelova), ali se sama ne može konstruirati ravnalom i šestarom. Prema Papusu Aleksandrijskom (ca. 290.–350.), Hipijina kvadratisa nastaje dinamički. Polazište je kvadrat $\square ABCD$ (slika 4.11 lijevo). Zamislimo da u stranica $\overline{DC}$ pada jednoliko (stalnom brzinom) na stranicu $\overline{AB}$. U istom trenutku kad stranica $\overline{DC}$ počne padati, stranica $\overline{AD}$ počinje jednoliko rotirati oko $A$ do pozicije $\overline{AB}$, u koju stiže u istom trenutku kad i $\overline{DC}$. U tom slučaju se u svakom trenutku pozicije stranica $\overline{DC}$ i $\overline{AD}$ sijeku u po jednoj točki (na slici 4.11 lijevo istaknute su

[15]Pod istovrsnim veličinama mislimo na veličine iste fizikalne dimenzije.




Slika 4.11: Hipijina kvadratisa (trisektrisa).

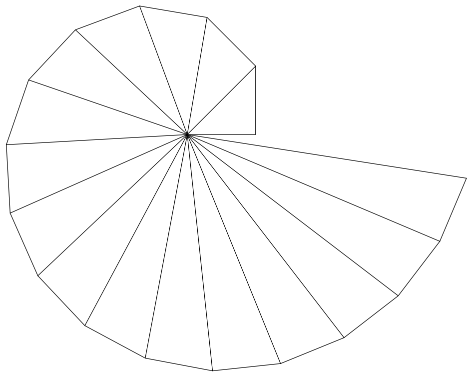
pozicije nakon četvrtine, polovine i tri četvrtine ukupnog vremena gibanja stranica). Dobivene točke čine krivulju kvadratisu (trisektrisu).[16]

Opišimo kako iskoristiti kvadratisu, tj. trisektrisu, za trisekciju kuta. Neka je zadan kut $\alpha$, kojeg unesemo u kvadrat kao $\angle BAE$ (slika 4.11 desno). Neka je $F$ presjek kvadratise i kraka $AE$ (tu točku ne možemo konstruirati ravnalom i šestarom). Iz $F$ povućemo okomicu na $AB$, njeno nožište neka je $G$. Dužinu $\overline{FG}$ podijelimo na tri jednaka dijela, neka je $|FH| : |HG| = 2 : 1$. Kroz točku $H$ povućemo paralelu s $AB$ i odredimo njeno sjecište $I$ s kvadratisom (ni točku $I$ ne možemo konstruirati ravnalom i šestarom). Onda je $\angle IAB = \frac{\alpha}{3}$, što slijedi direktno iz definicije kvadratise (u istom vremenu padajuća stranica prijeđe trećinu puta kao rotirajuća trećinu kuta).

Hipijin suvremenik bio je **Teodor iz Kirene** (ca. 465.–398. pr. Kr.). Poznat je po tome što je bio učitelj Platona i Teeteta. Iz Platonovog dijaloga *Teetet* saznajemo da je Teodor dokazao o „stranicama kvadrata od tri kvadratne jedinice i od pet kvadratnih jedinica, da one nisu izmjerive jediničnom duljinom. Tako je prošao sve kvadratne korijene pojedinačno do kvadrata od sedamnaest kvadratnih jedinica, na kojem je stao." Vidimo dakle da iz moderne perspektive Platon Teodoru pripisuje dokaz iracionalnosti $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ i $\sqrt{17}$. Uočljivo je da ne spominje kvadrat površine dvije kvadratne jedinice — očigledno je nesumjerljivost stranice i dijagonale kvadrata u to doba već bila opće poznata.[17] Razlog

[16] Ako bismo ju gledali iz moderne perspektive, kao smještenu u Kartezijev koordinatni sustav s ishodištem u točki $A$ i koordinatnim osima na pravcima $AB$ i $AD$, onda se dio krivulje u prvom kvadrantu sastoji od točaka $(x, y) = (y\text{ctg}\,(90°y), y)$.

[17] Primijetimo da je stranica kvadrata površine dvije kvadratne jedinice isto što i dijagonala kvadrata površine jedne kvadratne jedinice.

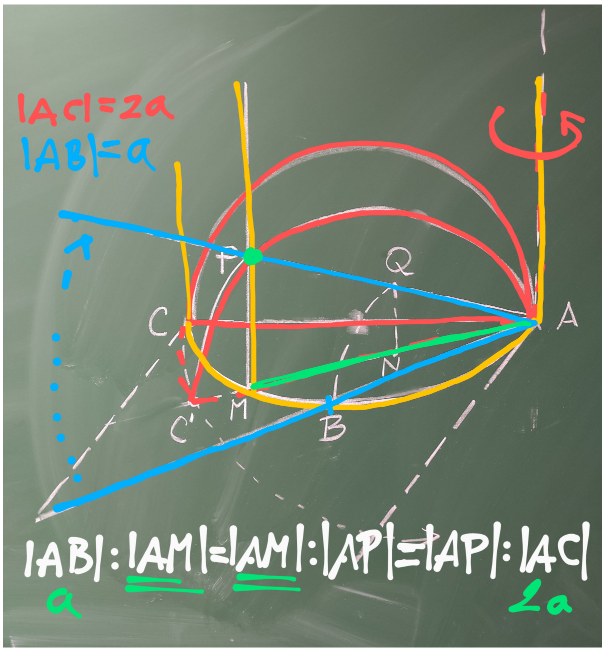


Slika 4.12: Teodorova spirala.

zašto je stao na kvadratu sa 17 kvadratnih jedinica nije poznat, ali jedna od popularnijih teorija je da je u pozadini **Teodorova spirala**. Ona nastaje tako da krenemo jednakokračnog pravokutnog trokuta koji je pola jediničnog kvadrata (dakle, hipotenuza mu je duljine $\sqrt{2}$). Sad se iterativno konstruiraju pravokutni trokuti tako da hipotenuza prethodnog postaje dulja kateta sljedećeg, a kraća kateta im je svima 1 (dakle, hipotenuze su redom duljina $sqrt3$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, ...), kao na slici 4.12. Pravokutni trokut hipozenuze duljine $\sqrt{17}$ je u takvoj konstrukciji zadnji koji se još ne preklapa ni s kojim od ranijih.

Sljedeći kojeg valja istaknuti je **Arhita iz Tarenta** (ca. 428.–350. pr. Kr.). On je bio vođa ostatka pitagorejske škole svog doba, koja je nakon ranijih političkih sukoba smanjena i svedena na zajednicu u gradu Tarentu. Arhita je bio Platonov prijatelj te je utjecao na Platona. Najpoznatiji je po doprinosu problemu udvostručenja kocke na temelju Hipokratove ideje. Arhita je našao srednje geometrijske proporcionale između $a$ i $2a$ korištenjem presjeka cilindra, konusa i torusa. Budući da u to doba koordinatni sustavi još nisu postojali (uvedeni su tek u 17. st., o tome kasnije), njegova je konstrukcija čisto geometrijska i vrlo impresivna te ćemo ju ukratko opisati.

Neka su $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ dužine između kojih želimo naći srednje geometrijske proporcionale (dakle, duljine su im $a$ i $2a$, slika 4.13). Arhita zamišlja tri plohe opisane na sljedeći način. Prva je polucilindar promjera $\overline{AC}$ (žuto na slici 4.13). Nad $\overline{AC}$ (u ravnini okomitoj na osnovicu cilindra) konstruira se polukružnica, a njenom rotacijom oko izvodnice cilindra koja prolazi kroz $A$ dobije se druga ploha, polutorus (crveno na slici 4.13). Naposlijetku, ako je $B$ odabrana na kružnici koja je osnovica cilindra (a tako da je $|AB| = \frac{1}{2}|AC|$) i ako je $D$ presjek tangente na tu kružnicu povučene u $C$ s pravcem $AB$, rota-




Slika 4.13: Arhitina duplikacija kocke.

cijom trokuta $\triangle ACD$ oko pravca $AC$ dobije se konus (plavo na slici 4.13).[18] Neka je $P$ točka presjeka tih triju ploha. Ona postoji jer polutorus siječe polucilindar duž neke krivulje, a ta krivulja onda negdje probada konus. Točka $P$ se nalazi istovremeno na nekoj rotiranoj poziciji crvene polukružnice koja je generirala polutorus (neka je $\overline{AC'}$ odgovarajući promjer i $M$ ortogonalna projekcija $P$ na ravninu osnovice cilindra) i na nekoj rotiranoj poziciji plave izvodnice čijom rotacijom je nastao konus (neka je $Q$ točka na toj izvodnici u kojoj se našla točka $B$ i $N$ njezina ortogonalna projekcija na ravninu osnovice cilindra). Iz te konstrukcije Arhita dalje razmatranjem geometrijskih odnosa izvodi da je

$$|AB| : |AM| = |AM| : |AP| = |AP| : |AC|,$$

tj. $|AM|$ je rješenje problema duplikacije kocke brida $|AB|$.

Spomenuli smo Platonov dijalog *Teetet*. On nosi ime po matematičaru **Teetetu iz Atene** (ca. 415.–369. pr. Kr.) koji je, koliko je poznato, bio

[18]Koristeći suvremenu analitičku geometriju, ako je $A$ ishodište Kartezijevog koordinatnog sustava, $x$-os je pravac $AC$ i $z$-os okomita na ravninu polukružnice $ABC$, jednadžbe tih triju ploha su redom $y = \sqrt{2a\,x - x^2}$), $x^2 + y^2 + z^2 = a\,\sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4x^2$. Rješavanjem tog sustava lako se pokaže da je $|AM| = \sqrt{x^2 + y^2}$, tj. prva koordinata presjecišta $P$ ploha u standardno postavljenom cilindričkom koordinatnom sustavu, rješenje problema udvostručenja kocke brida $a$.

Slika 4.14: Pet Platonovih, zapravo Teetetovih, tijela.

prvi koji je konstruirao svih pet pravilnih poliedara (slika 4.14). Danas ih nazivamo i **Platonovim tijelima** jer ih je Platon opisao u dijalogu *Timej*, u kojem ih je povezao s četiri „elementa” (kocka — zemlja, oktaedar — zrak, tetraedar — vatra, ikozaedar — voda) i svemirom (dodekaedar).

Već više puta spominjani filozof Platon centralna je figura atenskog razdoblja. Iako nije, koliko znamo, dokazao nikoji bitan matematički rezultat, on je iznimno značajan za povijest matematike. **Platon** (ca. 427.–347. pr. Kr.) je oko 387. pr. Kr. osnovao znamenitu Akademiju, na čijem je ulazu navodno pisao moto:

Neka nitko tko ne zna geometriju ovamo ne ulazi.

Možda ste taj moto čuli s riječju matematika na mjestu geometrije, no tu se radi o moderniziranom smislu: Kao što ste zasigurno već primijetili, starogrčka matematika je u biti geometrija. Platonova idealistička filozofija bitna je u povijesti matematike i dan danas mnogi matematičari imaju platonistički pogled na matematiku. Platon razlikuje, primjerice, kvadrat (pravi, idejni) i kvadrat (nacrtani, postojeći u realnom svijetu). Platonistički pristup matematici podrazumijeva da matematičke istine postoje neovisno o tome jesmo li ih već otkrili, odnosno platonistički je stav da se matematika ne stvara, nego otkriva. Platon je također (čini se prvi) eksplicitno iskazao da se u geometriji treba koristiti što manje fizičkih pomagala — dozvoljeni su samo šestar i neoznačeno ravnalo.

Stanimo na trenutak u napretku kroz stoljeća i osvrnimo se. Kao što smo vidjeli, prva kultura u kojoj su se matematičke tvrdnje počele dokazivati deduktivno, iz definicija, aksioma i već dokazanih tvrdnji, bila je antička Grčka. Prvi dokazi možda potječu još od Talesa, a zasigurno najkasnije od pitagorejaca. U taj razvoj uključio se Platon, koji je prvi jasno iskazao zahtjev strogih definicija i dokaza u matematici (geometriji). Njegov učenik (i učitelj Aleksandra Makedonskog) **Aristotel** (384.–322. pr. Kr.), iako ne posebno zainteresiran za matematiku, skupa s temeljima opće logike postavio je i temelje matematičke logike. Također, Aristotel je pojmu matematika dao moderno značenje (a sama riječ je izvedena iz već navedenog naziva članova užeg kruga pitagorejske škole).

Aristotel je razlikovao dvije vrste logičkog zaključivanja: indukciju i dedukciju. Indukcija je zaključivanje s pojedinačnog na opće i Aristotel je uočio da ona bez dodatnih logičkih uvjeta ne mora dati istinit zaključak. S druge strane, Aristotelov pojam dedukcije ne podudara se s modernim. Za njega je dedukcija argument kojim se iz određenih *istinitih* premisa logičkom nužnošću dobiva zaključak različit od premisa. Aristotelova dedukcija temelji se na osnovnom pojmu kategoričkog suda. Kategorički sud se sastoji od *kvantora* (svaki, nikoji, neki) te *subjekta* S, koji je s *predikatom* P povezan *kopulom*, te eventualno negacije kopule. Aristotel razlikuje četiri tipa kategoričkih sudova: „Svaki S je P” (univerzalno afirmativni), „Nikoji S nije P” (univerzalno negativni), „Neki S su P” (partikularno afirmativni) i „Neki S nisu P” (partikularno negativni). Primijetio je da kategorički sudovi ne moraju imati jednoznačnu istinitosnu vrijednost, već da to ovisi o konkretnom smislu subjekta i predikata. **Tautologija** je kategorički sud koji je uvijek istinit, npr. „Svaki S je S”. **Kontradikcija** je kategorički sud koji nikad nije istinit, npr. „Nikoji S nije S”. Temelj suvremenog deduktivnog zaključivanja je Arisotelov **silogizam**, poseban oblik dedukcije kojeg je opisao Aristotel. Radi se o deduktivnom logičkom zaključivanju koje se sastoji od tri kategorička suda: dvije (istinite) *premise* i jedne *konkluzije*. Da bi to bio silogizam u Aristotelovom smislu dodatno u ta tri suda među njihovih šest subjekata i predikata imamo ukupno samo tri pojma, a ovisno o njihovom rasporedu Aristotel razlikuje tri logičke figure silogizma:

1. (A B), (B C), (A C);
2. (A B), (A C), (B C);
3. (A C), (B C), (A B).

**Primjer 17** *Neka je prva premisa „Nikoja ptica nema četiri noge.” Druga neka je „Nikoja patka nema četiri noge.” Ta dva suda su tipa (A C) i (B C) te se silogizmom dobiva korektna konkluzija (A B): „Svaka patka je ptica.”*

Spomenimo još i Aristotelove **zakone klasične logike**:

- Svaki S je S (princip identiteta).

- Svaki sud je istinit ili lažan (princip isključenja trećega).

- Nikoji sud ne može istovremeno biti istinit i lažan (princip isključenja proturječja).

Klasična aristotelovska logika je do modernog doba dominirala znanstvenim metodama dokazivanja, a i danas je temelj većine škola logike.

Uz Hipokrata najznačajniji matematičar atenskog razdoblja bio je **Eudoks s Knida** (ca. 408.–355. pr. Kr.). Bio je matematičar, astronom i liječnik, a na Platonovoj Akademiji studirao je filozofiju i retoriku, nakon što je prije toga bio učenik Arhite iz Tarenta. Smatra se da je utemeljio:

- opću teoriju omjera (*lógos*) i razmjera (*analogía*), sadržanu u EEV, te

- metodu ekshaustije (koja se temelji na Antifontovim indejama, ali ju je Eudoks precizirao).

Obje metode predstavljaju starogrčki način „nošenja s limesima", tj. spadaju i u prethodnike modernog infinitezimalnog računa. Osim po njima, Eudoks je zabilježen i u povijesti matematičke astronomije, po svojoj teoriji koncentričnih sfera kojom je pokušao modelirati gibanja nebeskih tijela; ta se metoda temelji na tradicionalnoj grčkoj pretpostavci da su jedine moguće zakrivljene putanje kružne.

Eudoksova **teorija omjera i razmjera** bila je posebno važna jer je omogućila uključivanje (bar nekih) iracionalnih veličina u geometrijske analize, odnosno postalo je moguće proširiti argumentaciju i ne neke međusobno nesumjerljive veličine. Primjerice, drugi korijeni $x = \sqrt{a\,b}$ se mogu analizirati kroz dvostruke omjere, tj. razmjere

$$a : x = x : b,$$

a treći korijeni $x = \sqrt[3]{a^2\,b}$ kroz trostruke omjere, tj. razmjere

$$a : x = x : y = y : b.$$

Cjelokupni sadržaj EEV pripisuje se Eudoksu, a ovdje ističemo četiri definicije (3.–6. definicija u EEV):

- Omjer je odnos među iznosima dviju *istovrsnih* veličina.

- Za veličine kažemo da imaju omjer ako je višekratnik jedne veći od druge.

- Za veličine kažemo da su u istom omjeru, prva prema drugoj i treća prema četvrtoj ako kojim god brojem pomnožimo prvu i treću i bilo kojim drugu i četvrtu, prva dva višekratnika podjednako nadilaze, jednaki su ili su manji od druga dva, u odgovarajućem redoslijedu.[19]

- Veličine koje su u istom omjeru zovemo razmjernim (proporcionalnim).

Propozicije u EEV uključuju distributivnost množenja brojeva prema zbrajanju i oduzimanju brojeva i veličina, asocijativnost množenja dva broja i jedne veličine te razne propozicije o omjerima i proporcijama, npr. ako je $a : b = c : d$, onda je i $a : c = b : d$ (EEV16), te ako $x_1 : x_2 = y_1 : y_2$, $x_2 : x_3 = y_2 : y_3$, $\ldots$, $x_{n-1} : x_n = y_{n-1} : y_n$, onda $x_1 : x_n = y_1 : y_n$ (EEV22). Temeljem Eudoksove teorije omjera i razmjera mogu se dokazati sve uobičajene tvrdnje iz teorije proporcija i sličnosti, no kao što smo već rekli, dodatno njegova teorija omogućava uključenje iracionalnih veličina. Prije Eudoksa se moglo samo dokazati da neke dvije istovrsne veličine nisu sumjerljive te se moglo (tako primjerice Teetet analizira tzv. kvadratne iracionalnosti) uspoređivati njihove kvadrate ili kubove (suvremenim jezikom rečeno, mogli su se uspoređivati samo brojevi koji su razlomci ili kvadratni ili kubni korijeni razlomaka), dok se sad kroz produljene razmjere mogu direktno izvoditi zaključci o iracionalnim veličinama koje bismo danas zvali $n$-tim korijenima.

Eudoksova **metoda ekshaustije** generalizira teoriju omjera i razmjera. Naziv je dobila u 17. st., a temelji se na

**Teorem 7 (Eudoksov princip ekshaustije EEX1)** *Ako su zadane dvije različite (istovrsne) veličine i od veće oduzmemo više od njene polovine, od ostatka više od njegove polovine itd., onda će, ako se postupak ponovi dovoljan broj puta, ostatak biti manji od manje zadane veličine.*

Suvremenim stilom zapisano: Ako su zadani brojevi $a > b > 0$, onda za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$a - \sum_{i=1}^{n} \frac{a}{2^i} < b.$$

Specijalno, ovo znači da geometrijski redovi s pozitivnim kvocijentom manjim od $\frac{1}{2}$ konvergiraju. Eudoksov princip ekshaustije se pak temelji na već istaknutoj 4. definiciji iz EEV: Dvije veličine imaju omjer ako neki višekratnik jedne premašuje drugu, tj. $a, b > 0$ imaju omjer (tj. $a : b$ ima smisla) ako

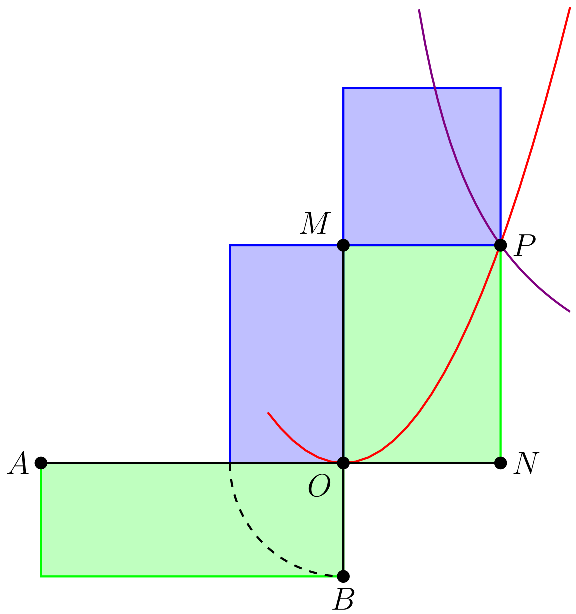
[19]Tj. $a : b = c : d$ znači da za sve $m$ i $n$: ako $m\,a < n\,b$, onda $m\,c < n\,d$; ako $m\,a = n\,b$, onda $m\,c = n\,d$; ako $m\,a > n\,b$, onda $mc > nd$. Uočimo da se ne zahtijeva sumjerljivost!

postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n\,b > a$. Varijantu te definiciju danas znamo pod nazivom **Arhimedov aksiom**: Za svaka dva realna broja $0 < b < a$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n\,b > a$. Naziv je dobio po tome što ga je u 3. st. pr. Kr. u svoje pretpostavke na početku djela *O kugli i valjku* uvrstio Arhimed iz Sirakuze. On ga je izrekao ovako: „Kod nejednakih linija, nejednakih ploha, nejednakih tijela[20] veća nadmašuje manju za veličinu, za koju se kad se one sebi pribraja može postići da nadmaši svaku određenu veličinu od onih koje su usporedive (s njom i međusobno)". To bi pak danas izgledalo ovako: Za svaka dva realna broja $0 < b < a$ i za svaki $M > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n(a - b) > M$. Ta tvrdnja slijedi iz Eudoksove definicije (dokaz se može naći u sklopu dokaza EEV8), a i sâm Arhimed navodi da su njegovu pretpostavku, koju danas zovemo Arhimedovim aksiomom, koristili i raniji geometri, konkretno Eudoks. Zanimljivo je i da iako je Eudoks autor metode ekshaustije, Arhimed je bio matematičar koji ju se najviše i najpreciznije koristio i pomoću nje dokazao mnoge važne teoreme. O tome više kasnije.

U ovom odjeljku spomenut ćemo još jednog matematičara atenskog razdoblja, jer se njemu pripisuje otkriće jednog od standardnih školskih matematičkih sadržaja, konika. Bio je to **Menehmo** (ca. 380.–320. pr. Kr.). Prema Proklu, bio je Platonov prijatelj i Eudoksov učenik. Neki izvori ga navode kao učitelja Aleksandra Velikog, koji je Aleksandru na pitanje postoji li neki prečac za učenje geometrije navodno rekao: „O kralju, za putovanje zemljom postoje kraljevski putevi i putevi za običan puk, ali u geometriji postoji samo jedan put za sve". Menehmo je otkrio **konike**, presjeke stošca ravninama, pokušavajući odrediti srednje geometrijske proporcionale između dvije duljine, tj. pokušavajući riješiti problem udvostručenja kocke. Tražene proporcionale uspio je naći u presjecima uspravnih kružnih stožaca ravninama neparalelnim bazi. Za razliku od danas, kad sva tri tipa konika dobivamo presijecanjem jednog (ne nužno uspravnog) stošca ovisno o kutu ravnine prema osnovici, Menhemo je gledao isključivo normalne presjeke uspravnih stožaca (presjeke ravninama okomitim na jednu izvodnicu stošca) pa je razne tipove konika dobio ovisno o kutu pri vrhu stošca: parabolu za pravokutni stožac, elipsu za šiljastokutni, a hiperbolu za tupokutni. Menehmo im (vjerojatno) još nije dao nazive, ali mi ćemo koristiti nazive elipsa, parabola i hiperbola, koji su od Menehma mlađi nekih 100–150 godina (ime im je dao Apolonije iz Perge).

Menhmo je ponudio dva rješenja problema duplikacije kocke, jedno pomoću presjeka parabole i hiperbole, a drugo pomoću presjeka dviju parabola. Oba

[20]Kako vidimo, Arhimed je u klasičnom stilu geometrijske algebre geometrijske objekte poistovjećivao s njihovom mjerom, tj. ove nejednakosti se odnose na duljinu, površinu odnosno volumen.




Slika 4.15: Prvo Menehmovo rješenje problema duplikacije kocke pomoću konika.

rješenja su, naravno, opisana geometrijskom algebrom, a mi ćemo detaljno opisati samo prvo (drugo je stilski slično). Za prvo Menehmovo rješenje uzmimo (vidi sliku 4.15) dvije međusobno okomite dužine $\overline{OA}$ i $\overline{OB}$, prva neka je dulja od druge (mi bismo danas pravce na kojima leže gledali kao osi Kartezijevog koordinatnog sustava). Pretpostavimo da je problem riješen, tj. da su nađene srednje geometrijske proporcionale između $|OA|$ i $|OB|$ i da su te proporcionale nanesene kao $\overline{OM}$ na pravcu $OB$ i kao $\overline{ON}$ na pravcu $OA$, dakle vrijedi

$$|OB| : |ON| = |ON| : |OM| = |OM| : |OA|$$

(i ako je $|OA| = 2|OB|$, duljinom $|ON|$ je riješen problem duplikacije kocke čiji brid je duljine $|OB|$). Neka je $P$ četvrti vrh pravokutnika $ONPM$. Teorija omjera i razmjera onda povlači da je pravokutnik sa stranicama duljina $|OM|$ i $|OB|$ jednak kvadratu nad $\overline{ON}$, a taj je pak jednak kvadratu (plavo na slici) nad $\overline{PM}$. Iz toga Menehmo temeljem uočenih svojstava presjeka pravokutnog stošca ravninom paralelnoj jednoj izvodnici zaključuje da je $P$ točka parabole (crveno na slici) kojoj je $O$ tjeme, os joj je $MB$, a $|OB|$ joj je ono što se kasnije stoljećima nazivalo *latus rectum*, tj. duljina tetive parabole okomite na os koja prolazi fokusom.[21] Nadalje, iz istog razmjera

[21]Za parabolu koju danas opisujemo jednadžbom $x^2 = 2py$ je $2p$ njezin *latus rectum*.

slijedi i da je $|OA| \cdot |OB| = |OM| \cdot |ON| = |PM| \cdot |PN|$ (jednakost zelenih pravokutnika na slici), pa Menehmo zaključuje da je $P$ ujedno i na hiperboli (ljubičasto na slici) sa središtem u $O$ i asimptotama $OM$ i $ON$.[22] Dakle, problem udvostručenja kocke bi se mogao riješiti ako bi se mogle konstruirati (ravnalom i šestarom) parabola (kojoj je *latus rectum* jednak duljini brida kocke koju želimo udvostručiti) te istostrana hiperbola (sa svojstvom da je za svaku njenu točku pravokutnik $ONPM$, tj. moderni $x\,y$, jednak dvostrukom kvadratu nad zadanim bridom kocke, jer je kod duplikacije kocke $|OA| = 2|OB|$). U tom slučaju samo bi trebalo odrediti točku $P$ presjeka tih dviju krivulja, projicirati ju na pravac $OA$ da dobijemo točku $N$ i $|ON|$ bi bila tražena duljina brida kocke dvostrukog volumena.

## 4.3 Helenističko razdoblje grčke matematike

U razdoblju 336.–323. pr. Kr., Aleksandar Veliki osvojio je široke teritorije. Budući da mu je učitelj bio Aristotel, bio je pod jakim utjecajem grčke kulture, te je na područjima njegova carstva došlo do znatnog utjecaja grčke znanosti i kulture. Nakon njegove smrti carstvo se raspalo na manja carstva njegovih dijadoha, no sva s jakim utjecajem grčke kulture. Aleksandar je 331. pr. Kr. osnovao **Aleksandriju**, grad koji je do kraja antike postao i ostao glavni centar znanosti. Prvo razdoblje od njena osnutka do rimskih osvajanja poznato je kao klasični helenizam, dok nakon toga do pada Zapadnog Rimskog Carstva 476. govorimo o postklasičnom (ili rimskom) helenizmu.

U Aleksandriji je osnovan **museion** („sjedište muza”), vrsta sveučilišta koje je sadržavalo znamenitu aleksandrijsku knjižnicu, čiji sadržaj je većim dijelom uništen u požaru pri rimskoj opsadi 48. pr. Kr.

Prvi značajni matematičar koji je djelovao u *museion*-u bio je **Euklid Aleksandrijski** (ca. 325.–265. pr. Kr.). O njegovom se životu gotovo ništa pouzdano ne zna.[23] Iza sebe je ostavio više djela, npr. *Data* (određivanje elemenata geometrijskih likova iz zadanih), *O dijeljenju figura* (u zadanom omjeru), *Optika* (perspektiva), *Phaenomena* (uvod u matematičku astronomiju), ... No, najznačajnije Euklidovo djelo su njegovi ***Elementi*** (EE), u originalu $\Sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\iota\alpha$, djelo koje je zauvijek promijenilo matematiku.

Euklidov cilj bio je predstaviti cjelokupnu tada poznatu matematiku u

Ako je $|OA| = a$, ovdje se radi o paraboli $x^2 = a\,y$, tj. *latus rectum* je $a$.

[22] To je istostrana hiperbola koju bismo danas opisali jednadžbom $x\,y = a\,b$, gdje su $a$ i $b$ na početku zadane duljine $|OA|$ i $|OB|$.

[23] Neki povjesničari su čak argumentirali da nije postojao, već da su *Elementi* djelo grupe autora. To se ipak smatra nevjerojatnim, jer se radi o iznimno ujednačenom i originalnom djelu.

13 knjiga (veličine poglavlja).[24] No, iako u EE zapravo ne možemo naći svu matematiku jonskog i atenskog razdoblja (primjerice, nedostaju konike) te iako gotovo sigurno nijedan rezultat u EE nije izvorno Euklidov, ovo djelo je puno važnije zbog nečeg drugog negoli zbog pokušaja predstavljanja cjelokupne matematike poznate u Euklidovo doba. Euklidova je velika zasluga originalna kompozicija teksta, kojom je postavio temelj matematike kao egzaktne znanosti. $\boxed{\text{EE}}$ su značajni zbog stila pisanja: Teoremi (propozicije) su logički poredani tako da svaki slijedi *isključivo* iz već dokazanih, ili pak iz osnovnih tvrdnji danih na početku, a zaključci se izvode strogo deduktivno. Euklidova ideja bila je izvesti svu matematiku iz malog broja početnih pretpostavki, aksioma i postulata (aksiomi su za Euklida više općematematičke, a postulati čisto geometrijske pretpostavke). U tome je bio toliko uspješan da su sve do 20. st. EE ostali apsolutni uzor matematičkog djela. Što se samog sadržaja tiče, on se pripisuje Euklidovim prethodnicima. Prve četiri knjige pripisuju se jonskom periodu, posebice pitagorejcima, te Hipokratu.. Sadržaj pete i šeste te dvanaeste knjige se pripisuje Eudoksu,. Sedma, osma i deveta knjiga se sadržajno pripisuju pitagorejcima. Jedanaesta knjiga također uglavnom sadrži rezultate iz jonskog perioda, a sadržaji desete i trinaeste knjige pripisuju se Teetetu.

Prva knjiga EE, EEI, bavi se elementarnom planimetrijom. Ona započinje s 23 definicije te po pet aksioma i postulata. Dodatne definicije nalaze se i na počecima većine ostalih knjiga. Prva Euklidova definicija glasi:

*Točka je ono što nema dijela.*

Vidljivo je da Euklidove definicije još nisu definicije u modernom smislu riječi, već su više opisi pojmova s kojima se dalje bavi. Dalje se u te prve 23 definicije definiraju dužine, pravci, razne vrste likova, kutovi, krugovi, te naposlijetku u 23. definiciji **paralelni pravci**: Paralelni pravci su pravci u istoj ravnini koji se, ako ih u oba smjera neograničeno produljimo, nikad ne susreću.

Slijedi pet Euklidovih **postulata**:

1. Od jedne točke k drugoj povući dužinu.
2. Proizvoljno produljiti dužinu.
3. Oko proizvoljne točke nacrtati kružnicu proizvoljnog polumjera.
4. Svi pravi kutovi[25] su jednaki.

[24] U postklasičnom razdoblju dodane su im još dvije knjige, ali bez stvarnog matematičkog značaja.

[25] Euklid pravi kut definira ovako: Ako pravac upada na drugi pravac čineći susjedne kutove jednaki, svaki od ta dva kuta je pravi.

5. Ako pravac siječe dva pravca tako da je zbroj unutrašnjih kuteva s iste strane manji od dva prava kuta, onda se ta dva pravca (ako se dovoljno produže) na toj strani sijeku.

Uočimo da prva tri Euklidova postulata *de facto* definiraju što je dopustivo u konstrukcijama ravnalom i šestarom. Među Euklidovim postulatima se ističe peti, poznat kao **postulat o paralelama**. Naime, uočljivo je da je bitno kompliciraniji od ostalih postulata i aksioma, a uz to se jedini odnosi i na neograničeno, potencijalno nedostupno, područje ravnine. To, a tako i činjenica da se taj postulat koristi tek u dokazu EEI29, već je u Euklidovo doba izazvala pozornost i mnogi su se matematičari od tada pa sve do 19. stoljeća pitali je li peti Euklidov postulat možda ipak teorem, dokaziv temeljem ostalih postulata i aksioma. Tek će se u 19. stoljeću, s otkrićem neeuklidskih geometrija (o čemu ćemo kasnije više reći), pokazati da se stvarno radi o postulatu, koji se doduše može zamijeniti raznim ekvivalentnim formulacijama, ali zamjena njegovom negacijom dovodi do potpuno drugačijih geometrija. Primijetimo također da ovaj postulat u svojoj izvornoj formulaciji *ne* tvrdi da paralele postoje, odnosno on je ekvivalentan postojanju najviše (a ne točno) jedne paralele s danim pravcem kroz danu točku. Stoga je taj izvorni oblik postulata o paralelama konzistentan ne samo s uobičajenom euklidskom geometrijom, već i sa sfernom, čiji će temelji biti postavljeni u postklasičnom razdoblju helenizma.

Zatim dolazi pet Euklidovih **aksioma**:

1. Dvije stvari koje su jednake[26] trećoj su i međusobno jednake.

2. Ako jednakom dodamo jednako, dobit ćemo jednako.

3. Ako jednakom oduzmemo jednako, dobit ćemo jednako.

4. Ono što se podudara je jednako.

5. Cjelina je veća od dijela.

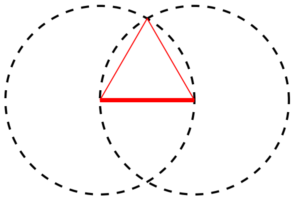
Pregled sadržaja EE po knjigama je sljedeći (u zagradama su navedeni brojevi definicija plus brojevi propozicija u pojedinoj knjizi):

1. EEI: elementarna planimetrija (23+48);

2. EEII: geometrijska algebra (2+14);

3. EEIII: planimetrija kružnice i kruga (11+37);

[26] Podsjetnik: Misli se na jednakost po mjeri, a ne na sukladnost!

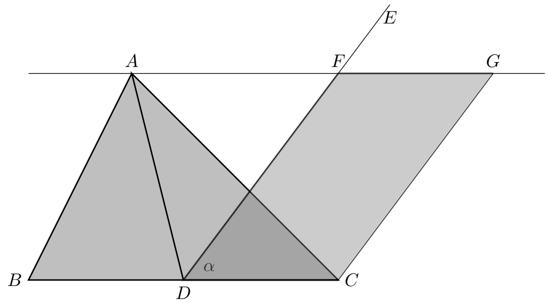


Slika 4.16: Konstrukcija jednakostraničnog trokuta u EEI1

4. EEIV: pravilni mnogokuti (7+16);
5. EEV: teorija omjera i razmjera (18+23);
6. EEVI: sličnost i geometrijski omjeri (4+33);
7. EEVII: djeljivost u $\mathbb{N}$ (22+39);
8. EEVIII: proporcije s prirodnim brojevima (0+27),
9. EEIX: parni i neparni, prosti i složeni brojevi (0+36);
10. EEX: kvadratne iracionalnosti (16+115);
11. EEXI: elementarna stereometrija (28+39)
12. EEXII: primjena ekshaustije u geometriji (0+18)
13. EEXIII: pravilni poliedri (0+18)

Sad ćemo predstaviti neke odabrane definicije i propozicije iz tih knjiga, no naravno podsjećamo da smo se s nekima već susreli u prethodnom dijelu gradiva. Prva propozicija u EE, EEI1, glasi „Konstrukcija jednakostraničnog trokuta zadane duljine stranice”. U dokazu, Euklid (koristeći prvi aksiom, prvi i treći postulat i 15. i 20. definiciju) argumentira da je konstrukcija sa slike 4.16 stvarno daje jednakostranični trokut. U propozicijama EEI9 i EEI10 Euklid daje standardne konstrukcije bisekcije (raspolavljanja) kuta i dužine, u EEI11 i EEI12 opisuje konstrukcije okomice na pravac kroz zadanu točku (na odnosno izvan pravca), a u EEI31 je dana konstrukcija paralele kroz zadanu točku izvan pravca. Prva propozicija koja zahtijeva korištenje postulata o paralelama je, kako smo već spomenuli, EEI29: „Ako pravac siječce dva paralelna pravca, onda on s njima tvori jednake izmjeničcne kutove, vanjski kut odgovara unutrašsnjem s iste strane i dva unutrašnja kuta s iste strane su[27] jednaka dvama pravim kutovima”. Potkraj prve knjige

[27]Misli se: zbrojena.




Slika 4.17: Konstrukcija paralelograma zadanog kuta jednakog zadanom trokutu (EEI42).

nalazimo propozicije temeljem kojih (u kombinaciji s EEII14) slijedi da se svaki uglati lik u ravnini može kvadrirati ravnalom i šestarom. Pogledajmo te propozicije malo detaljnije.

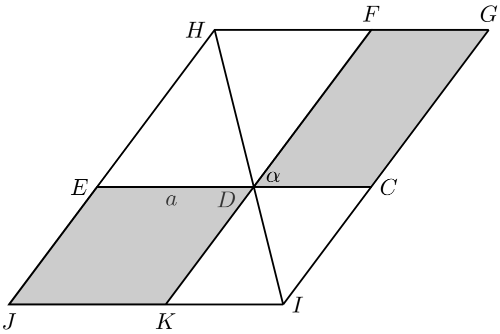
**Propozicija 1** (**EEI42**) *Konstrukcija paralelograma zadanog kuta jednakog zadanom trokutu.*

U ovoj propoziciji dokazuje se korektnost sljedeće konstrukcije. Neka je zadan trokut $\triangle ABC$ te ravninski kut $\alpha$ (slika 4.17). Odredimo polovište $D$ stranice $\overline{BC}$ trokuta i nanesimo kut $\alpha$ kao kut $\angle CDE$. Kroz $A$ povucimo paralelu s $BC$, neka ona krak $DE$ siječe u točki $F$. U $C$ povucimo paralelu s $DF$, neka ona $AF$ siječe u $G$. Tada je $CDFG$ paralelogram iste visine kao trokut $\triangle ABC$ i upola kraće osnovice, dakle taj paralelogram je jednak (po površini) danom trokutu. Primijetimo da ako je $\alpha$ pravi kut, ova propozicija omogućuje pretvaranje (ravnalom i šestarom) svakog trokuta u pravokutnik iste površine.

Na tu propoziciju se nadostavlja EEI43, u kojoj se dokazuje jednakost (površina) sivih paralelograma na slici 4.18, ako je $HI$ dijagonala paralelograma $JIGH$. Slijedi:

**Propozicija 2** (**EEI44**) *Konstrukcija paralelograma jednakog zadanom trokutu ako mu je zadan kut i jedna stranica.*

Odgovarajuća konstrukcija je sljedeća. Prvo se pomoću EEI42 dani trokut pretvori u paralelogram $CDFG$ zadanog kuta. Sve njegove stranice produljimo u pravce (slika 4.18). Nanesimo zadanu duljinu stranice na pravac $FG$ kao $\overline{FH}$. Povucimo pravac $HD$, neka je njegovo sjecište s pravcem $CG$ točka $I$. Kroz nju povučemo paralelu s $CD$, a kroz $H$ paralelu s $DF$, neka se one




Slika 4.18: Konstrukcija paralelograma zadanog kuta jednakog zadanom trokutu i zadane duljine stranice (EEI44).

sijeku u $J$. Ako je $E$ presjek $CD$ s $HJ$, a $K$ presjek $DF$ s $IJ$, onda je prema EEI43 paralelogram $JKDE$ traženi paralelogram.

Nakon toga imamo:

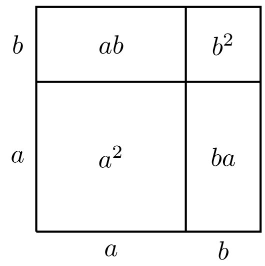
**Propozicija 3** ($\boxed{\textbf{EEI45}}$) *Konstrukcija paralelograma zadanog kuta jednakog zadanom mnogokutu.*

Naime, očito se svaki mnogokut može rastaviti na trokute, recimo njih $n$. Prvi od tih trokuta pretvorimo u paralelogram koristeći EEI42, te odaberemo jednu njegovu stranicu kao zadanu duljinu $a$. Sve ostale trokute pretvaramo u paralelograme s istim kutem kao prvi i jednom stranicom $a$ koristeći EEI44. Sad imamo $n$ paralelograma koji imaju zajednički jedan kut i jednu stranicu, pa se mogu spojiti u jedan veći paralelogram zadanog kuta.

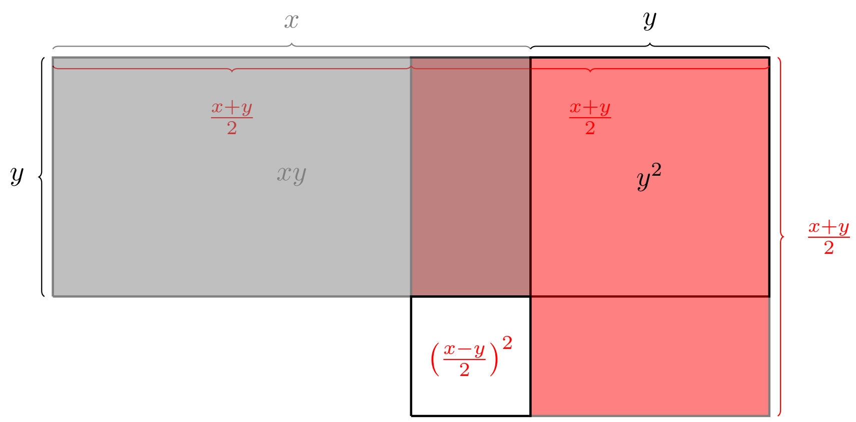
Uočimo dakle da sad znamo: Svaki mnogokut se može pretvoriti u pravokutnik. Propozicija koja omogućuje kvadraturu nalazi se u sljedećoj knjizi, EEII. **EEII** sadrži više zanimljivih propozicija. Primjerice, EEII4 je geometrijsko-algebarski ekvivalent moderne formule za kvadrat binoma (slika 4.19), a EEII5 je geometrijsko-algebarski ekvivalent moderne formule za razliku kvadrata (slika 4.20). Kao EEII11 nalazimo konstrukciju dijeljenja dužine u omjeru zlatnog reza (slika 4.21: $|BF|$ je duljina koja duljinu $|AB|$ dijeli u omjeru zlatnog reza).

EEII12 i EEII13 u biti iskazuju kosinusov poučak bez (tada još nepoznate) trigonometrije — tamo gdje bismo danas pisali umnožak jedne stranice s kosinusom kuta, Euklid koristi površinu pravokutnika određenog tom stranicom i njenom projekcijom na drugu, tom kutu susjednu stranicu. Naposlijetku imamo:

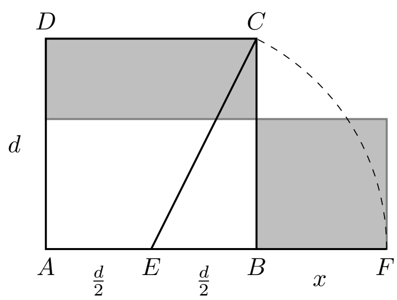
**Propozicija 4** ($\boxed{\textbf{EEII14}}$) *Kvadratura proizvoljnog mnogokuta.*



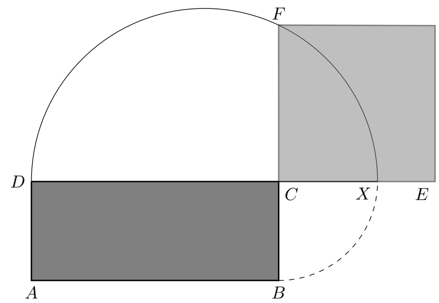

Slika 4.19: Kvadrat binoma: $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ (EEII4).




Slika 4.20: Razlika kvadrata: $xy = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$ (EEII5).




Slika 4.21: Dijeljenje dužine u omjeru zlatnog reza (EEII11).




Slika 4.22: Kvadratura pravokutnika (EEII14).

Prvo se kako je opisano u EEI44 mnogokut pretvori u pravokutnik $ABCD$ (slika 4.22). Zatim se konstruira kvadrat jednak tom pravokutniku: Produlji se dulja stranica pravokutnika ($DC$) na jednu stranu i na to produljenje se šestarom prenese kraća stranica (dakle, $|CB| = |CX|$). Zatim se nacrta polukružnica nad $\overline{DX}$. Produljimo $BC$ do sjecišta $F$ s tom polukružnicom. Tada je $\overline{CF}$ stranica kvadrata jednakog pravokutniku $ABCD$,[28] dakle i polaznom mnogokutu.

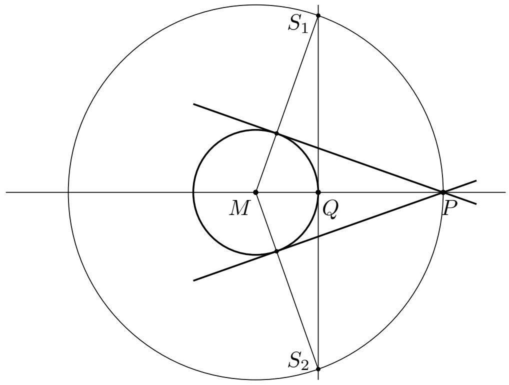
Iz **EEIII** ističemo dvije propozicije. Prva je EEIII1 u kojoj se konstruira središte zadane kružnice. Euklid polazi od proizvoljne tetive kružnice, konstruira njezinu simetralu koja siječe kružnicu u dvije točke (krajevima jednog promjera) te je središte kružnice polovište tog promjera. Druga zanimljiva propozicija je EEIII17 u kojoj Euklid daje konstrukciju tangenti na danu kružnicu (središta $M$) iz točke $P$ izvan nje (slika 4.23). Prvo se povuče pravac $MP$, on siječe kružnicu u točki $Q$. Zatim se nacrta kružnica središta $M$ i polumjera $|MP|$. U $Q$ se povuče okomica na $MP$, koja u prethodnom koraku nacrtanu kružnicu siječe u $S_1$ i $S_2$. Te dvije točke spojimo s $M$, sjecišta tih spojnica s polaznom kružnicom su dirališta traženih tangenti.

U **EEIV** nalazimo standardne konstrukcije pravilnih mnogokuta kakve i danas znamo (s tim da je Euklidova konstrukcija pravilnog peterokuta upisanog u kružnicu, EEIV11, kompliciranija je od danas uobičajene, koju je osmislio H. W. Richmond, 1893.). No, ovdje se ističe sljedeća propozicija, koja je predstavljala vrhunac u konstrukcijama pravilnih mnogokuta sve do Gaußa, koji je 1796. otkrio konstrukciju pravilnog 17-erokuta.

**Propozicija 5** (**EEIV16**) *Konstrukcija pravilnog 15-erokuta upisanog kruž - nici.*

Sama konstrukcija je izuzetno jednostavna. Prvo se konstruiraju jedna-

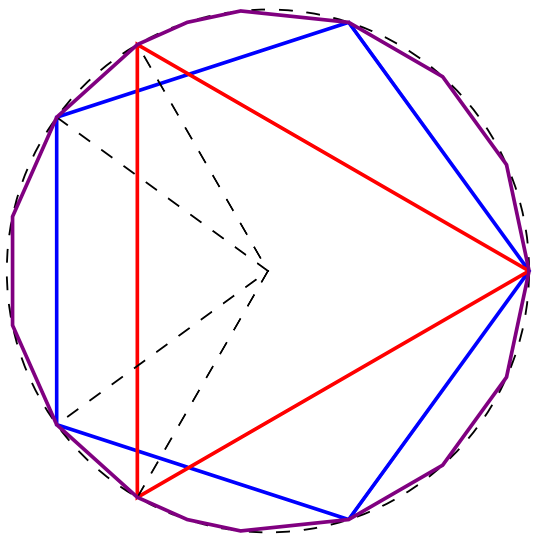
[28] To se lako pokaže pomoću EEII5 i Pitagorinog poučka, tj. EEI47.




Slika 4.23: Konstrukcija tangenti na kružnicu iz točke izvan kružnice (EEIII17).

kostraničan trokut i pravilni peterokut upisani u danu kružnicu, ali tako da im je jedan vrh zajednički (crveno i plavo na slici 4.24). Tada je spojnica jednog od druga dva vrha trokuta s njemu najbližim vrhom peterokuta stranica pravilnog 15-erokuta (ljubičasto na slici 4.24). Naime, ako ucrtamo odgovarajuće polumjere na obje strane (crtkano na slici 4.24), dobijemo dva jednaka kuta koji su u zbroju očigledno razlika središnjih kutova pravilnog trokuta i peterokuta, tj. zbroj ta dva kuta je $\frac{360°}{3} - \frac{360°}{5} = 2 \cdot \frac{360°}{15}$, dakle je središnji kut koji odgovara opisanoj ljubičastoj stranici točno središnji kut $\frac{360°}{15}$ pravilnog 15-erokuta.

Sadržaj **EEV** već smo opisali kod Eudoksa, pa prelazimo na **EEVI**. Iz nje ističemo 1. definiciju: Dva uglata lika zovemo **sličnima** ako su im odgovarajući unutrašnji kutovi jednaki i odgovarajuće stranice razmjerne. Propozicija EEVI2 je u biti Talesov poučak o proporcionalnosti: Ako se povuče paralela s jednom stranicom trokuta, onda ona stranice trokuta siječe proporcionalno; i, ako su dvije stranice trokuta podijeljene proporcionalno, spojnica točaka podjele je paralelna trećoj stranici trokuta. Ta se propozicija koristi za konstrukciju podjele dužine na bilo koji određeni broj jednakih dijelova (EEVI9) te za konstrukciju dužine duljine $x$ takve da je $a : b = c : x$ (tzv. četvrta proporcionala triju dužina, EEVI12). U EEVI13 je dana konstrukcija srednje proporcionale, tj. duljine $x$ takve da je $a : x = x : b$ ako su zadane duljine $a$, $b$, $c$ (to je u biti konstrukcija iz EEII14). René Descartes je u 17. st. uočio da se navedene propozicije mogu koristiti za množenje, dijeljenje i korjenovanje duljina (tako da rezultat oper bude duljina). Drugim riječima: Nakon Descartesa je poznato da se iz zadanih duljina $a$ i $b$ mogu ravnalom i šestarom konstruirati duljine $a + b$, $a - b$, $a\,b$, $a/b$ i $\sqrt{a}$. O tome



Slika 4.24: Konstrukcija pravilnog 15-erokuta (EEIV16).

više kasnije.

Među, vjerojatno pitagorejskim, sadržajima iz teorije brojeva u **EEVII**, **EEVIII**, **EEIX**, ističemo sljedeće. U 11., 12. i 13. definiciji u EEVII Euklid definira: **Prost broj** je broj koji se može izmjeriti samo *jedinicom*. Dva broja su **relativno prosta** ako je jedinica jedina njihova zajednička mjera. **Složen broj** je broj koji se može izmjeriti[29] drugim brojem. U EEVII2 opisan je Euklidov algoritam za određivanje najveće zajedničke mjere dva broja. Kao korolar Euklid iskazuje: Ako neki broj mjeri dva broja, onda mjeri i njihov zajednički djelitelj. U EEVII34 je opisano određivanje najmanjeg zajedničkog višekratnika dva broja. Kao EEIX14 nalazimo i parcijalni osnovni teorem aritmetike:[30] Najmanji zajednički višekratnik nekih prostih brojeva nije djeljiv ni s kojim drugim prostim brojem osim njih.

Posebno je poznat **Euklidov teorem** $\boxed{\text{EEIX20}}$: Prostih brojeva ima više nego u bilo kojem zadanom skupu (nabrojanih) prostih brojeva. Euklidov dokaz je u biti isti kao moderni. Ako imamo neke proste brojeve (Euklid ih uzima tri), uzmemo njihov najmanji zajednički višekratnik, dodamo mu 1. Tako smo dobili prost ili složen broj. Ako je prost, očito je veći od svih prostih brojeva od kojih smo krenuli, dakle imamo novi. Ako je složen, onda ima neki djelitelj, ali taj ne može biti nikoji od polaznih prostih brojeva jer bi onda taj morao mjeriti i jedinicu, dakle smo opet našli novi prosti broj.

[29] Podsjećamo na već kod pitagorejaca opisan smisao izraza 'izmjeriti', koji danas obično zamijenjujemo s 'podijeliti'.

[30] U punoj općenitosti taj teorem dokazat će tek Gauß.

Ugrubo rečeno, **EEX** se bavi preoblikovanjem **kvadratnih iracionalnosti**,[31] tj. veličina tipa $\sqrt{\sqrt{a\,b} \pm \sqrt{c\,d}}$.[32] U ovoj knjizi definicije ne nalazimo samo na početku, nego i uz mnoge kasnije propozicije. Sadržaj ove knjige je jako teško izložiti, a o smislu mnogih propozicija postoje i razilaženja. Ipak, vrijedi istaknuti dio sadržaja vezan za **sumjerljivost** i nesumjerljivost. Tako u prve četiri definicije EEX Euklid definira: Dvije su veličine sumjerljive ako posjeduju zajedničku mjeru, inače su nesumjerljive; dvije duljine su kvadratno sumjerljive ako su kvadrati nad njima sumjerljivi; ako je zadana duljina, sve duljine koje su s njom sumjerljive ili kvadratno sumjerljive zovu se racionalne, a ostale iracionalne; ako je zadan kvadrat, sve njemu sumjerljive površine zovu se racionalne, a ostale iracionalne. Kako vidimo, Euklid je ovdje razlikovao racionalne duljine (to bi bile one čiji omjer prema jediničnoj duljini bismo danas izrazili razlomkom ili drugim korijenom razlomka) i racionalne površine (to bi bile one čiji omjer prema jediničnoj površini bismo danas izrazili razlomkom, dakle tu se pojam racionalnosti podudara s modernim smislom). U EEX2 Euklid karakterizira nesumjerljive veličine (usporedite s dijelom o pitagorejskom otkriću nesumjerljivih veličina): Ako dvije veličine nisu sumjerljive, onda u Euklidovom algoritmu nijedan dobiveni ostatak ne dijeli manju (tj. onu s kojom se u dotičnom koraku dijeli). Kao tipičniji primjer propozicija (s dodatnim definicijama) iz EEX navodimo rezultat dokazan u EEX21 i EEX36: Ako su dvije duljine samo kvadratno sumjerljive, one određuju iracionalni pravokutnik, a stranica njemu jednakog kvadrata je iracionalna duljina koja se zove medijalnom u odnosu na polazne dvije. Njihov zbroj je također iracionalan i zove se binomijal. Moderno iskazano: Ako za $a, b \in \mathbb{Q}$ $\sqrt{a}$ i $\sqrt{b}$ nisu racionalni brojevi, onda je $\sqrt{\sqrt{ab}} = \sqrt[4]{ab}$ medijalan broj, a $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ binomijal.

U **EEXI** izlažu se temelji stereometrije. Sfera je u 14. definiciji definirana kao rotaciona ploha polukružnice oko njezina promjera. Među propozicijama nalazimo sve stanardne temeljne stereometrijske rezultate, primjerice dokazano je da je presjek dvije ravnine pravac, da su dva pravca okomita na istu ravninu paralelni, da su dvije ravnine okomite na isti pravac paralelne, ... Dokazano je i da je svaki prostorni kut sadržan u ravninskim kutovima čiji zbroj je manji od četiri prava kuta, te da se paralelepipedi iste visine (tj. njihovi volumeni) odnose kao njihove osnovice.

U **EEXII** se na geometriju primjenjuje metoda ekshaustije. Istaknimo primjerice propoziciju $\boxed{\text{EEXII2}}$: Krugovi se odnose kao kvadrati nad nji-

[31] Podsjećamo da EEX1 sadrži Eudoksovu lemu o ekshaustiji. Ta se propozicija dalje ne koristi u ovoj knjizi, nego tek u EEXII.

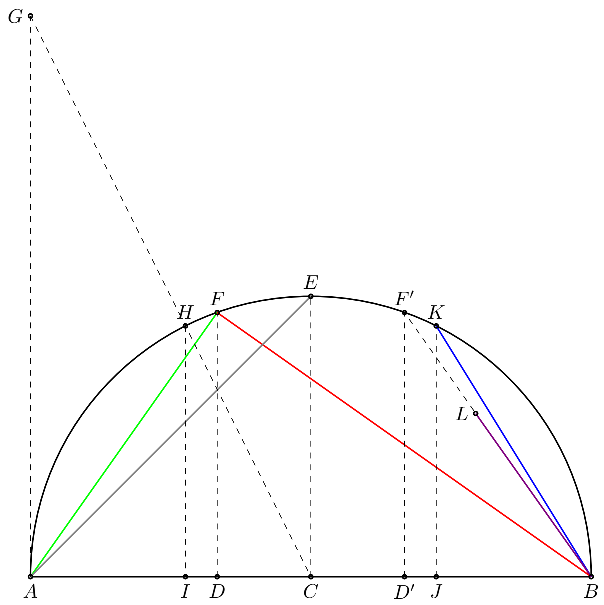
[32] Podsjećamo, korijeni nisu smatrani brojevima. No, $x$ kojeg danas bilježimo kao $\sqrt{a\,b}$ ekvivalentno je definiran tzv. dvostrukim razmjerom $a : x = x : b$.

hovim promjerima. Već smo spomenuli da je ona bar sadržajno vjerojatno bila poznata još Hipokratu s Hiosa, te da je ona ekvivalentna postojanju konstante proporcionalnosti između površine kruga i površine kvadrata nad njegovim promjerom (a stoga i polumjerom). Ovdje navodimo skraćeni dokaz EEXII2 kako ga je dao Euklid, koristeći modernu notaciju: Neka su $K_1$ i $K_2$ krugovi s promjerima $d_1$ odnosno $d_2$. Pretpostavimo da kvadrati nad promjerima nisu u omjeru jednakom omjeru krugova (tj. njihovih površina): $P(K_1) : P(K_2) \neq d_1^2 : d_2^2$. Tada je omjer $d_1^2 : d_2^2$ jednak omjeru površine kruga $K_1$ i neke površine $P$ koja je ili manja ili veća od površine kruga $K_2$. Ako je manja, onda je razlika $P(K_2) - P$ neka (pozitivna) površina. Sad Euklid u krug $K_2$ upisuje redom kvadrat, pravilni osmerokut, pravilni šesnaesterokut i t.d., gledajući razliku površina upisanog lika i kruga (uniju kružnih odsječaka). Koristeći Eudoksovu lemu zaključuje da će nakon dovoljno mnogo koraka ta razlika površina biti manja od $P(K_2) - P$. To znači da je odgovarajući upisani mnogokut površine veće od $P$. Pravilni mnogokut s istim brojem stranica upisuje u krug $K_1$. Tada su ta dva pravilna mnogokuta slična pa im se (prema prethodno dokazanoj propoziciji EEXII1) površine $P_1$ i $P_2$ odnose kao kvadrati nad dijagonalama (tj. promjerima krugova). No, $P_1 : P_2 = d_1^2 : d_2^2 = P(K_1) : P$, pa je $P(K_1) : P_1 = P : P_2$. No, $K_1$ je veći od u njega upisanog mnogokuta, dakle je $P > P_2$ i istovremeno bi moralo biti $P < P_2$, što je nemoguće. Analogno se isključi mogućnost da je $P > P(K_2)$, pa preostajue $P(K_1) : P(K_2) = d_1^2 : d_2^2$. ∎

Dalje u EEXII imamo dokazano primjerice da se piramide istih visina odnose kao njihove baze, da se trostrana prizma može podijeliti na tri trostrane piramide istih volumena, da je stožac (po volumenu) trećina valjka iste baze i visine te da se valjci odnosno stošci jednakih baza odnose (po volumenu) kao njihove visine. Posljednja propozicija je $\boxed{\text{EEXII18}}$: Kugle se međusobno odnose kao trostruki omjeri njihovih dijametara. Dakle, Euklid je dokazao da postoji i proporcionalnost volumena kugle s volumenom kocke čiji brid je jednak promjeru (odnosno polumjeru) kugle. Naime, trostruki omjer od $A : B$ je u EEV definiran kao omjer $A : D$ ako je $A : B = B : C = C : D$ za neki $C$ (usporedite sa srednjim geometrijskim proporcionalama između $A$ i $D$!). Suvremenom algebrom lako vidimo da je $A : D$ trostruki omjer od $A : B$ ako je $A^2D = B^3$.

Naposlijetku, **EEXIII** sadrži konstrukciju bridova svih Platonovih tijela upisanih u istu sferu, te dokaz da nema drugih pravilnih poliedara. Ovdje navodimo konstrukciju (pojednostavljenu u odnosu na onu danu u EEXIII) bridova pravilnog[33] tetraedra, kocke, pravilnog okraedra, pravilnog dodeka-

[33]Naglašavamo 'pravilnog' jer je tetraedar poliedar s četiri strane, oktaedar tijelo s osam strana i t.d.




Slika 4.25: Konstrukcija bridova pet pravilnih poliedara upisanih u istu sferu (EEXIII).

edra i pravilnog ikozaedra. Neka je dan promjer sfere $\overline{AB}$ (slika 4.25). Ucrtajmo polukružnicu nad tim polumjerom, odredimo središte $C$ te ucrtamo polumjer $\overline{CE}$ okomit na promjer $\overline{AB}$. Tada je $\overline{EA}$, alternativno $\overline{EB}$ (sivo na slici) brid pravilnog oktaedra upisanog u sferu promjera $\overline{AB}$. Za bridove kocke i pravilnog tetraedra potrebno je $\overline{AB}$ podijeliti na tri jednaka dijela (točkama $D$ i $D'$). Iz jedne od njih, recimo $D$, povuče se okomica na $\overline{AB}$ i odredi sjecište $F$ te okomice s polukružnicom. Tada je $\overline{FA}$ (zeleno na slici) brid kocke, a $\overline{FB}$ (crveno na slici) brid pravilnog tetraedra upisanog u sferu promjera $\overline{AB}$. Za konstrukciju brida pravilnog ikozaedra potrebno je prvo konstruirati okomicu na $\overline{AB}$ u jednom od krajeva, recimo u $A$, te na nju nanijeti duljinu promjera da dobijemo točku $G$. Tu točku spojimo sa središtem $C$, ta spojnica siječe polukružnicu u točci $H$. Tada je $\overline{HA}$, odnosno, što je ekvivalentno, $\overline{KB}$ (plavo na slici) uz $K$ osno simetričnu točki $H$ s obzirom na $CE$, brid pravilnog ikozaedra upisanog u sferu promjera $\overline{AB}$. Naposlijetku, za pravilni dodekadar potrebno je točkom $L$ u omjeru zlatnog reza podijeliti brid kocke ($\overline{F'B}$) te je $\overline{BL}$ (ljubičasto na slici) brid pravilnog dodekaedra upisanog u sferu promjera $\overline{AB}$.

Prvi značajni matematičar nakon Euklida bio je **Eratosten iz Kirene** (ca. 275.–195. pr. Kr.). Osim matematikom i filozofijom, bavio se i poezijom, geografijom, astronomijom i teorijom glazbe. Oko 240. g. pr. Kr. postao je glavni knjižničar u aleksandrijskom *museionu*. Znamenito **Eratostenovo sito** za proste brojeve pripisao mu je neopitagorejac Nikomah iz Geraze početkom 2. st. A. D. Uz to, Eratostenu se pripisuju dva druga značajna matematička rezultata.

Prvi od njih je iz područja matematičke geografije, a radi se o metodi određivanja opsega Zemlje. U to doba je kuglasti oblik Zemlje bio već opće poznat u grčkim znanstvenim krugovima. Eratosten je svoju metodu opisao u jednom danas izgubljenom djelu, koje je citiralo više kasnoantičkih autora. Eratosten je znao da na dan ljetnog solsticija u Syeni (današnji Aswan u Egiptu) Sunčeve zrake upadaju direktno u jedan bunar, dakle okomito na Syenu. Pretpostavio je da zbog velike udaljenosti Sunca od Zemlje možemo uzeti da Sunčeve zrake na Zemlju upadaju međusobno paraleno te je koristeći u zemlju zataknut štap izmjerio kut pod kojim na isti dan Sunčeve zrake upadaju u Aleksandriju. Njegovo je mjerenje dalo da je taj kut $\frac{1}{50}$ punog kuta. Znajući da je Syene 5000 stadija južno od Aleksandrije, koristeći proporcionalnost središnjeg kuta u krugu s pripadnim lukom kružnice zaključio je da je

$$5000\,\text{stadij} : \text{opseg} = \frac{1}{50} : 1,$$

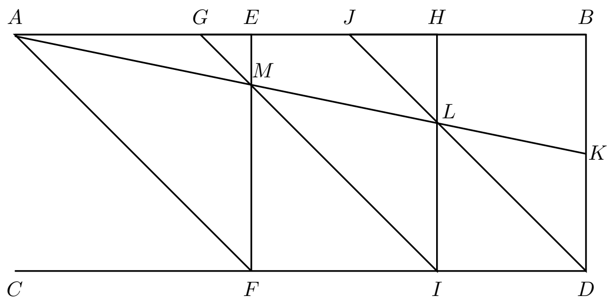
tj. da je opseg zemlje 250000 stadija. Koliko je to zapravo točno, danas je teško reći, jer se u Eratostenovo doba koristilo više tipova jedinice duljine stadij, pa ovisno o tome koji stadij uzmemo greška u odnosu na danas poznatu vrijednost prosječnog opsega Zemlje iznosi između 1 % i 16 %.

Drugi znameniti matematički doprinos Eratostena bio je njegov mehanizam za određivanje srednjih geometrijskih proporcionala, tj. rješavanje problema duplikacije kocke. Taj mehanizam, poznat pod imenom mezolabij, pripisan mu je temeljem jednog krivotvorenog Eratostenovog pisma za koje je utvrđeno da ipak neki njegovi dijelovi potječu iz Eratostenovih spisa. Mezolabij se sastojao od dvije paralelne jednako duge prečke $AB$ i $CD$ (slika 4.26) između kojih su postavljena tri sukladna jednakokračna pravokutna trokuta $AEF$, $GHI$ i $JBD$. Prva dva mogu slobodno kliziti između prečki, dok je posljednji, $JBD$, učvrščen. Neka je $K$ polovište $\overline{BD}$. Ako se trokuti dovedu u položaj u kojem su $A$, presjek $M$ vertikalne katete prvog i hipotenuze drugog trokuta, presjek $L$ vertikalne katete drugog i hipotenuze trećeg trokuta te $K$ na istom pravcu, onda očito vrijedi

$$|DK| : |IL| = |IL| : |FM| = |FM| : (2|DK|)$$

pa je $|IL|$ stranica kocke dvostrukog volumena od kocke brida duljine $|DK|$.

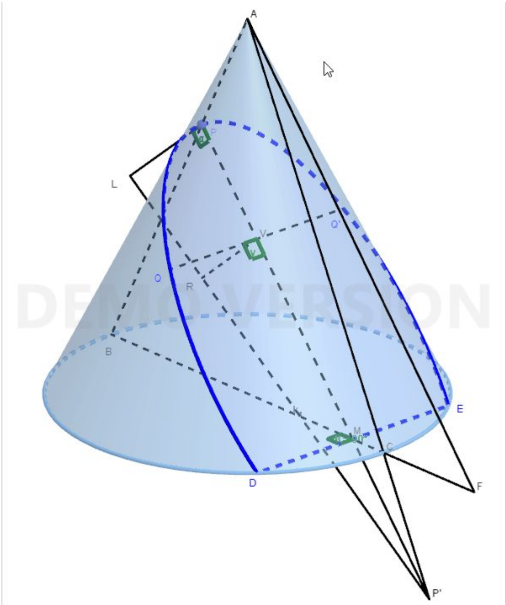
Eratostenov suvremenik bio je znameniti **Apolonije iz Perge** (ca. 262.–190. pr. Kr.). Bio je matematičar i astronom, a poznat je i pod nadimkom




Slika 4.26: Eratostenov mezolabij

„veliki geometar”. Jedno vrijeme je boravio (studirao i predavao) u Aleksandriji. Najvažniji mu je doprinos prva potpuna teorija konika. Podsjetimo se: Konike je prvi razmatrao Menehmo, pokušavajući riješiti problem udvostručenja kocke. Za razliku od Menehma, Apolonije je razmatrao presjeke ne samo uspravnih, već i kosih stožaca, i to proizvoljnom ravninom (kod Menehma je ravnina bila uvijek okomita na jednu izvodnicu stošca te je razlika među konikama potjecala od razlike kuta pri vrhu stošca, dakle su mu za različite konike trebali različiti stošci). Apolonije je tako dobio sva tri tipa konika presijecanjem samo jednog stošca, a on im je i dao imena **elipsa**, **parabola** i **hiperbola**. Apolonijevo glavno djelo nosi naslov *Konike*. Sastojalo se od osam knjiga, od kojih su četiri sačuvane na grčkom jeziku, tri u arapskom prijevodu, a zadnja je izgubljena. Apolonije je u tim knjigama starije rezultate (Menehmove, Aristejeve, Euklidove) nadopunio vlastitim. U prvoj se knjizi opisuje generiranje konika i njihova osnovna svojstva, u drugoj osi, tangente i asimptote, u trećoj fokusi, pol i polara, u četvrtoj presjeci dvije konike, u petoj normale i središta zakrivljenosti, u šestoj sličnost konika, u sedmoj svojstva konjugiranih promjera. Sve tvrdnje dokazao je pomoću geometrijske algebre, što mnoge dokaze čini teško razumljivima za suvremenog čitatelja. Naravno, problem je bio u tome što u to doba još nije bilo analitičke geometrije. Ipak, mnogi Apolonijevi dokazi mogu se interpretirati kao korištenje specijalnih kosokutnih koordinatnih sustava (biranih relativno prema konici). Ovdje ćemo opisati samo način na koji je Apolonije razlikovao tri tipa konika, kako je opisao u prvoj knjizi *Konika* [6].

Apolonije kreće od dvostrukog kosog stošca s vrhom $A$ presječenog nekom ravninom, koja osnovicu siječe u $\overline{DE}$. Neka je $\overline{BC} \perp \overline{DE}$ promjer osnovice (slika 4.27). Dalje, neka je $P$ probodište izvodnice $AB$ s ravninom i $M = \overline{DE} \cap \overline{BC}$. U nastavku Apolonije izvodi karakteristike triju tipova konika s obzirom na na 'promjer' $\overline{PM}$. Za proizvoljnu tetivu konike $\overline{QQ'}$ paralelnu s $\overline{DE}$ Apolonije prvo dokazuje da ju $PM$ raspolavlja (polovište označimo s




Slika 4.27: Apolonijeva karakterizacija konika

$V$). Nadalje, kroz $P$ u ravnini presjeka povlači paralelu s $DE$ i na njoj bira točku $L$ tako da zadovoljava određeni razmjer (različit za parabolu odnosno elipsu i hiperbolu, vidi niže). Nadalje, Apolonije povlači paralelu s $BC$ kroz $V$ (slike 4.28 i 4.29), njena sjecišta sa stošcem neka su $H$ i $K$. Tada $H$, $Q$, $K$ i $Q'$ leže na kružnici paralelnoj osnovici kojoj je $\overline{HK}$ promjer, a $\overline{QQ'}$ tetiva okomita na promjer koja ga siječe u $V$. Stoga je po Talesovom teoremu $\triangle HQK$ pravokutan i visina na hipotenuzu mu je $\overline{QV}$ pa vrijedi

$$|QV|^2 = |HV| \cdot |VK|. \tag{4.1}$$

Za slučaj parabole (slika 4.28), tj. ako je $PM$ paralelno s $AC$, $L$ se bira tako da zadovoljava razmjer

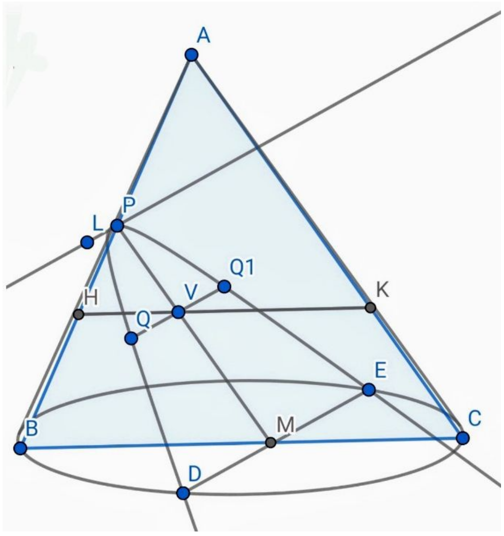
$$|PL| : |PA| = |BC|^2 : (|BA| \cdot |AC|). \tag{4.2}$$

U tom je slučaju $\triangle PHV$ sličan $\triangle ABC$ pa je

$$|HV| : |PV| = |BC| : |AC|. \tag{4.3}$$

Nadalje, pravci $PM$ i $AC$ su paralelni i sijeku krakove kuta $\angle ABC$, pa vrijedi

$$|VK| : |PA| = |BC| : |BA|. \tag{4.4}$$




Slika 4.28: Apolonijeva karakterizacija parabole

Sad imamo redom:

$$|QV|^2 : (|PV| \cdot |PA|) = 4.1 = (|HV| \cdot |VK|) : (|PV| \cdot |PA|) = 4.3\&4.4$$

$$= |BC|^2 : (|AB| \cdot |AC|) = 4.2 = |PL| : |PA| = (|PL| \cdot |PV|) : (|PA| \cdot |PV|),$$

dakle za svaku točku $Q$ na paraboli vrijedi

$$|QV|^2 = |PL| \cdot |PV|,$$

odnosno kvadrat nad $\overline{QV}$ *jednak je* pravokutniku određenom s $\overline{PL}$ i $\overline{PV}$,[34] što je dalo povod nazivu $\pi\alpha\rho\alpha\beta o\lambda\acute{\eta}$ (u slobodnom prijevodu 'biti poravnan').

Slučaj elipse i hiperbole dobivamo kad $PM$ nije paralelno s $AC$, tj. kad $PM$ siječe stožac u još jednoj točci $P'$ (na izvodnici $AC$, slika 4.29). U tom slučaju se $L$ bira tako da ona zadovoljava razmjer

$$|PL| : |PP'| = (|BF| \cdot |FC|) : |AF|^2. \tag{4.5}$$

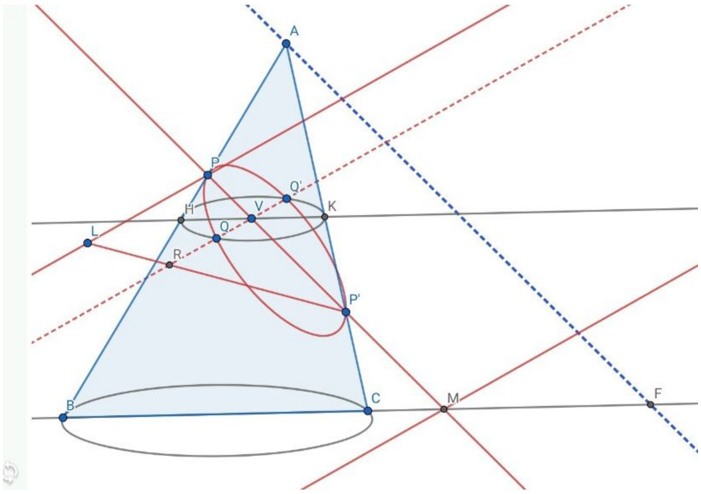
U ovom je slučaju $\triangle PHV$ sličan $\triangle ABF$ pa je

$$|HV| : |PV| = |BF| : |AF|. \tag{4.6}$$

Također, trokuti $\triangle P'KV$ i $\triangle ACF$ su slični, pa vrijedi

$$|VK| : |P'V| = |FC| : |FA|. \tag{4.7}$$

[34] Uočimo da ako bismo postavili pravokutni Kartezijev sustav s ishodištem u $P$, $y$-osi na pravcu $PL$ i $x$-osi na pravcu $PM$, onda ova jednakost postaje $y^2 = a\,x$.




Slika 4.29: Apolonijeva karakterizacija elipse i hiperbole

Sad imamo redom:

$$|QV|^2 : (|PV| \cdot |P'V|) = 4.1 = (|HV| \cdot |VK|) : (|PV| \cdot |P'V|) = 4.6\&4.7$$

$$= (|BF| \cdot |FC|) : |FA|^2 = 4.2 = |PL| : |PP'| = (\triangle PLP' \sim \triangle VRP') =$$

$$= |RV| : |P'V| = (|RV| \cdot |PV|) : (|P'V| \cdot |PV|),$$

dakle za svaku točku $Q$ na elipsi odnosno hiperboli vrijedi

$$|QV|^2 = |RV| \cdot |PV|,$$

odnosno kvadrat nad $\overline{QV}$ je manji odnosno veći od pravokutnika određenog s $\overline{PL}$ i $\overline{PV}$, što je dalo povod nazivima $\acute{\varepsilon}\lambda\lambda\varepsilon\iota\psi\iota\varsigma$ (u slobodnom prijevodu 'ono s manjkom') i $\acute{\upsilon}\pi\varepsilon\rho\beta o\lambda\acute{\eta}$ (u slobodnom prijevodu 'ono s viškom').

Po Apoloniju nosi ime i znameniti **Apolonijev problem**. Iskazao ga je u danas izgubljenom tekstu *O dodirima*, a glasi: Za dane tri kružnice u ravnini treba konstruirati kružnice koje ih sve tri diraju. Pritom kružnice mogu biti i točke (dakle, dozvoljen je polumjer 0) ili pravci (dakle, dozvoljen je i beskonačni polumjer). Budući da svaka od tri zadane kružnice može biti točka, 'prava' kružnica ili pravac, dobivamo $\boxed{\text{10 mogućih slučajeva}}$. Najjednostavnija dva slučaja su kad su sve tri zadane kružnice polumjera 0 ili sve tri beskonačnog polumjera. U prvom od njih rješenje je kružnica kroz tri točke, dakle kružnica opisana trokutu, a u drugom je rješenje kružnica koja dira tri pravca, dakle kružnica upisana trokutu. Ta dva slučaja znao je riješiti još

Euklid. Za slučaj triju „pravih” kružnica rješenja se često nazivaju Apolonijevim kružnicama, no taj naziv ima i druga značenja (vidi niže). Apolonijevo rješenje pokušao je rekonstruirati krajem 16. st. F. Viète, koristeći konstrukcije ravnalom i šestarom (objavljeno 1600.), a njegov suvremenik i prijatelj A. van Roomen prvi je 1596. predložio novo rješenje, koji je središta kružnica koje rješavaju problem našao presijecajući po dvije hiperbole.

Kao što smo upravo rekli, pojam **kružnice, Apolonijeve** nije jednoznačan. Uz navedeno značenje kao rješenja Apolonijevog problema, pojavljuju se još tri. Jedno se odnosi na Apolonijevu definiciju kružnice: Ako su dane dvije točke $A$ i $B$ u ravnini, onda je geometrijsko mjesto svih točaka $T$ u toj ravnini za koje je omjer $k = |AP| : |BP|$ konstantan kružnica sa središtem na pravcu $AB$. Ako promatramo familiju svih kružnica određenih gornjom definicijom za fiksne $A$ i $B$, ali različite omjere $k$, te uz nju drugu familiju svih kružnica koje prolaze kroz $A$ i $B$, može se dokazati da su te dvije familije međusobno ortogonalne i naziv Apolonijeve kružnice ponekad se odnosi upravo na te dvije familije kružnica. Posljednje, četvrto značenje naziva Apolonijeva kružnica odnosi se na kružnicu koja izvana dodiruje sve tri pripisane kružnice trokuta.

Posljednji značajni matematičar klasičnog helenizma, po mišljenju mnogih ujedno i najveći primijenjeni matematičar prije Newtona, bio je **Arhimed iz Sirakuze** (ca. 287.–212. pr. Kr.). Poznate su mnoge anegdote o njemu i vezano za njih navodni citati: „Heureka!”, „Ne dirajte moje krugove!”, „Dajte mi oslonac i dovoljno dugačku polugu i pomaknut ću Zemlju!”, ... Jedno je vrijeme boravio u Aleksandriji i tamo upoznao Eratostena, s kojim se kasnije nastavio dopisivati. Za vrijeme rimske opsade Sirakuze konstruirao je obrambena sredstva, ali je i ubijen kad su Rimljani zauzeli Sirakuzu. Mnoga Arhimedova djela sačuvana su bilo u grčkom originalu, bilo u arapskom prijevodu: *O mjerenju kruga*, *O kugli i valjku*, *O spiralama*, *O kvadraturi parabole*, *O ravnoteži ravninskih likova*, *O plovećim tijelima*, *O konoidama i sferoidama*, *Metoda mehaničkih teorema*, *Stomahion*, *Pješćanik* te Arhimedov problem goveda.

Jeste li čuli za Arhimedov *Palimpsest*? Radi se o 1906. otkrivenom Arhimedovom tekstu „skrivenom” ispod srednjevjekovnog crkvenog teksta. Tu nalazimo njegov tekst *Metoda mehaničkih teorema*, iz kojeg saznajemo da je Arhimed prvo svoje teoreme naslućivao fizikalno-eksperimentalnim pristupom, a zatim ih matematički (metodom ekshaustije) dokazivao, te *Stomahion*, opis matematičke slagalice slične tangramu kod koje je zadatak složiti kvadrat na različite načine.

U *Pješćaniku*, Arhimed je opisao imenovanje velikih prirodnih brojeva, s ciljem da može imenovati broj čestica pijeska u svemiru. Osnovna jedinica mu je mirijada, $10^4$, i brojevi do nje su u Arhimedovo doba doba imali standarne nazive. Brojeve do mirijade mirijada ($10^8$) naziva brojevima prvog reda, a

$10^8$ je jedinica drugog reda. Mirijada mirijada tih jedinica je jedinica trećeg reda i t.d. Tako je imenovao sve brojeve „prve periode", tj. brojeve do $(10^8)^{(10^8)}$. Taj je pak broj jedinica druge periode i Arhimed je analogno nastavio imenovati brojeve sve do $\left((10^8)^{(10^8)}\right)^{(10^8)} = 10^{8\cdot 10^{64}}$.[35]

Arhimedov problem goveda iskazan je pjesmicom pronađenom u jednom grčkom rukopisu tek 1773., a koja se pripisuje Arhimedu. Traži se broj goveda, koja su raspodijeljena u četiri stada raznih boja: bijela, crna, šarena i žuta. U svakom stadu je mnogo bikova i krava:[36]

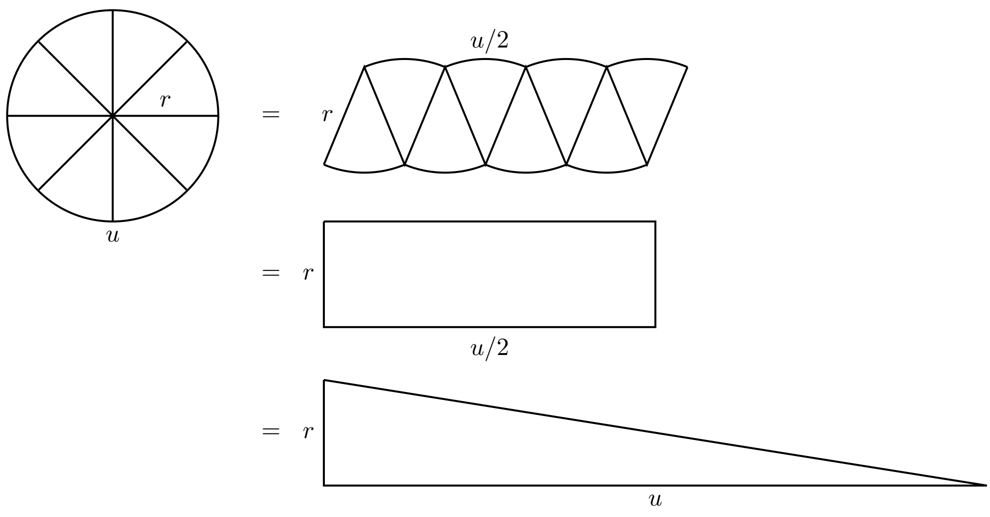
- Bijelih bikova je bilo koliko $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ crnih i žutih zajedno.
- Crnih bikova je bilo koliko $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ šarenih i žutih zajedno.
- Šarenih bikova je bilo koliko $\frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ bijelih i žutih zajedno.
- Bijelih krava je bilo koliko $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ cijelog crnog stada.
- Crnih krava je bilo koliko $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ cijelog šarenog stada.
- Šarenih krava je bilo koliko $\frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ cijelog žutog stada.
- Žutih krava je bilo koliko $\frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ cijelog bijelog stada.

Dodatno se zahtijeva da ukupni broj bijelih i crnih bikova bude kvadratni broj te da je ukupni broj žutih i šarenih bikova trokutni broj. Ovaj se problem svodi na Pellovu jednadžbu $x^2 - 4729494y^2 = 1$, s najmanjim rješenjem reda veličine $10^5$.

U djelu *O ravnoteži ravninskih likova* Arhimed je dao svoj princip poluge: Poluga na čijim krajevima su pozicionirane mase $m_1$ i $m_2$ je u ravnoteži ako uporište postavljeno tako da je $m_1 r_1 = m_2 r_2$, gdje je $r_i$ udaljenost mase $m_i$ od uporišta. Koristeći taj princip dokazao je, među ostalim, da je težište paralelograma u sjecištu njegovih dijagonala i da je težište trokuta u sjecištu njegovih težišnica.

Posebno poznati su Arhimedovi dokazi metodom ekshaustije, koju je on u potpunosti usavršio. Njegovi su dokazi izuzetno precizni, štoviše precizniji od ekvivalentnih kasnijih Newtonovih i Leibnizovih. Pritom se Arhimed eksplicitno poziva na Eudoksa, a njegovu definiciju omjera je preoblikovao u lemu koja je postala poznata kao Arhimedov aksiom, kako smo već opisali. Među rezultatima koje je dokazao metodom ekshaustije ističu se Arhimedov teorem o krugu, određivanje volumena kugle, kvadratura Arhimedove spirale i kvadratura segmenta parabole.

[35] Za usporedbu, danas se broj svih čestica u svemiru procjenjuje u rasponu $10^{78}$–$10^{82}$.
[36] Uočimo korištenje egipatskog zapisa razlomaka.




Slika 4.30: Arhimedov teorem o krugu

**Teorem 8 (Arhimedov teorem o krugu, iz *O kružnici i krugu*)** *Svaki krug ima istu površinu kao pravokutni trokut, čija jedna kateta ima duljinu kao polumjer kruga, a druga kao opseg.*

Kako je Arhimed naslutio taj teorem? Najčešće se smatra da je koristio razmišljanje ilustrirano slikom 4.30. Uočimo da ovaj teorem povlači da je omjer površine kruga i kvadrata nad njegovim polumjerom jednak omjeru opsega i promjera kruga, tj. da zapravo tek od Arhimeda ima smisla govoriti o broju $\pi$ kao omjeru vezanom i za opseg i za površinu kruga. Oznaku $\pi$ u današnjem smislu koristio je prvi 1706. Englez William Jones, a popularizirao ju je od 1736. nadalje L. Euler.

Slijedi modernizirani Arhimedov dokaz teorema o krugu. Slično kao i kod Euklidovog dokaza propozicije EEXII2, dokaz se svodi na „princip isključenja trećeg”: Arhimed prvo dokazuje da površina kruga nije veća od površine navedenog trokuta, pa da nije manja, te preostaje da su jednake. Neka je $K$ oznaka za krug i $T$ oznaka za pravokutni trokut, čija jedna kateta ima duljinu kao polumjer kruga, a druga kao opseg. Pretpostavimo prvo da je $P(K) > P(T)$, dakle $P(K) - P(T) > 0$. U tom slučaju u krug se upisuju pravilni $n$-terokuti $P_n$ i očito za svaki $n$ imamo da je zbroj površina kružnih odsječaka između $n$-terokuta i kružnice $\delta_n = P(K) - P(P_n) > 0$. Može se dokazati (npr., to je dio EEX2) da za sve $n$ vrijedi i $\delta_{2n} < \frac{\delta_n}{2}$, dakle se pri udvostručenju broja stranica upisanog mnogokuta površina odsječaka smanjuje više od dva puta. Sad se Arhimed ograničava na $n$-ove koji su potencije od 2, tj. gleda upisane pravilne $2^k$-terokute $P_4$, $P_8$, $P_{16}$, ... Eudoksova lema o ekshaustiji (EEX1) primijenjena na $P(K) - P(T)$ i $\delta_{2^k}$-ove povlači da za dovoljno velik $k$ imamo $0 < \delta_{2^k} < P(K) - P(T)$ pa je

$$P(P_{2^k}) > P(T).$$

S druge strane, za svaki upisani pravilni $n$-terokut njegova površina je

$$P(P_n) = n \cdot \frac{|ON| \cdot a_n}{2} < n \cdot \frac{r \cdot |AB|}{2} = \frac{r}{2} o(P_n) < \frac{r}{2} o = P(T),$$

gdje je $a_n$ duljina stranice pravilnog $n$-terokuta, $r$ i $o$ su polumjer odnosno opseg kruga $K$, $O$ njegovo središte, a $N$ nožište okomice iz $O$ na jednu stranicu pravilnog $n$-terokuta. Stoga za sve $k$ vrijedi $P(P_{2^k}) - P(T) < 0$, što je kontradikcija s gore dokazanom nejednakosti.

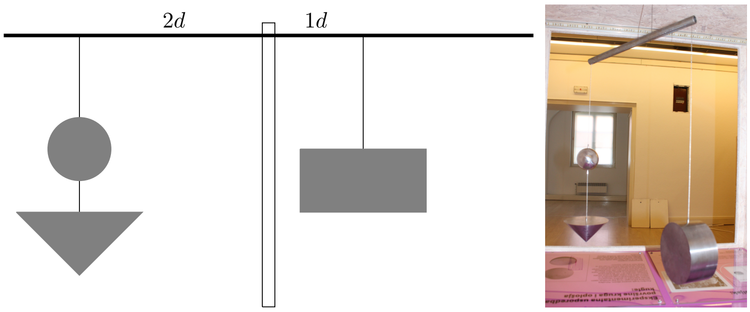
Dokaz da je i druga nejednakost površina, $P(K) < P(T)$, nemoguća je analogan, s tim da se koriste opisani pravilni $n$-terokuti i gledaju viškovi $\Delta_n$ površina tih opisanih $n$-terokuta u odnosu na površinu kruga. Dokaz ovog dijela prepuštamo čitatelju, uz napomenu da se u njemu koristi (naravno, dokaziva) tvrdnja $\Delta_{2n} < \frac{\Delta_n}{2}$. ■

U svojem djelu *O kugli i valjku* Arhimed je dokazao da je **volumen kugl**e jednak $\frac{2}{3}$ volumena valjka istog polumjera i visine (odnosno 4 volumena stošca istog polumjera i visine jednake polumjeru) te da je **oplošje kugle** 4 puta veće od površine kruga istog polumjera, odnosno oplošje kugle $\frac{2}{3}$ je oplošja opisanog joj valjka. Uočimo da su tvrdnje teorema ekvivalentne modernim formulama: Ako s $r$ označimo polumjer kugle, volumen valjka istog polumjera i visine kao kugla je $r^2\pi \cdot 2r = 2r^3\pi$, pa je $\frac{2}{3}$ od toga točno $\frac{4}{3}r^3\pi$, tj. volumen kugle. Površina kruga istog polumjera kao kugla je $r^2\pi$, a $4r^2\pi$ je naravno odgovarajuće oplošje kugle. Odnos volumena kugle, valjka i stoča Arhimed je otkrio koristeći svoj princip poluge, kako je ilustrirano slikom 4.31, a dokaz obje tvrdnje je proveden metodom ekshaustije.

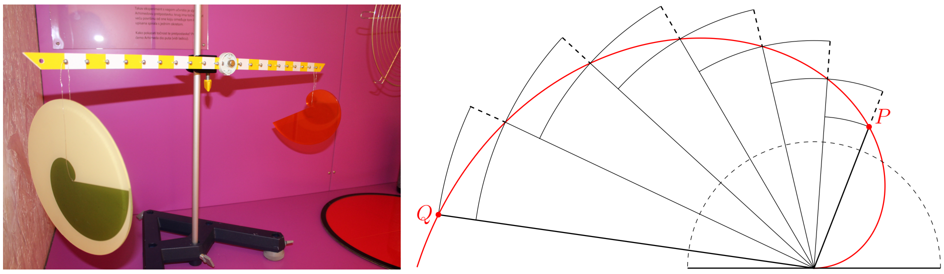
U *O spiralama*, Arhimed je opisao po njemu nazvanu spiralu: **Arhimedova spirala** je putanja točke koja se jednoliko giba po polupravcu koji jednoliko rotira oko polazne točke.[37] Arhimed je dokazao karakterizaciju tangente u proizvoljnoj točci Arhimedove spirale, koja omogućuje konstrukciju iste te je nakon kružnice (EE) i konika (Apolonije) ovo bila prva krivulja za koju je bilo poznato kako konstruirati tangentu na nju.[38]

[37] To je ekvivalentno modernoj jednadžbi u polarnim koordinatama: $r = a\varphi$. Polarne koordinate su uvedene su tek krajem 17. st. (I. Newton, Jacob Bernoulli).

[38] Za zadanu Arhimedovu spiralu s ishodištem $O$, neka je $P$ točka na spirali i $T$ sjecište tangente na spiralu u $P$ s okomicom na $OP$ koja prolazi kroz $O$. Dužina $\overline{OT}$ zove se suptangenta. Omjer njene duljine $s$ i razmaka $r = |OP|$ je za svaku $P$ jednak $r : a$.



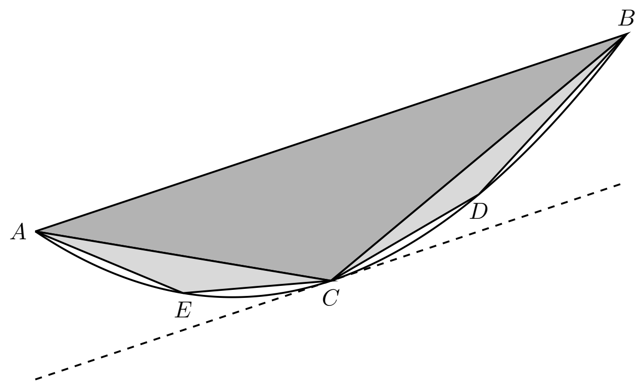

Slika 4.31: Arhimedovo otkriće odnosa volumena kugle, valjka i stošca (desna slika je snimljena tijekom izložbe *Volim matematiku* u Zagrebu 2015.)




Slika 4.32: Površina jednog okreta Arhimedove spirale (lijeva slika je snimljena tijekom izložbe *Volim matematiku* u Zagrebu 2015.)

Pokusom vjerojatno sličnim onome prikazanom na slici 4.32 lijevo, Arhimed je uočio da vrijedi: Isječak Arhimedove spirale između dva radijvektora jednak je razlici kubova njihovih duljina podijeljenoj sa $6a$. Posebno, površina jednog okreta Arhimedove spirale je trećina površine opisanog kruga. Dokaz je proveo metodom ekshaustije, dijeleći isječak spirale na isječke s jednakim središnjim kutovima (slika 4.32 desno). Primijetio je da tako dobiveni $r$-ovi čine aritmetički niz. Zatim je gledao tim isječcima upisane i opisane kružne isječke i dobio figuru manje i figuru veće površine. Naposlijetku se pozvao na Eudoksovu lemu, mi bismo rekli izračunao je limes, i tako dokazao tvrdnju.

Među Arhimedovim rezultatima dokazanim metodom ekshaustije ističemo još njegovu kvadraturu segmenta parabole, koja je za razliku od kvadrature segmenta (odsječka) kruga provediva ravnalom i šestarom. Arhimed je dokazao da je površina segmenta parabole jednaka $\frac{4}{3}$ površine trokuta kojemu je jedna stranica tetiva tog segmenta, a treći vrh je točka parabole u kojoj je tangenta paralelna s tom tetivom (trokut $\triangle ABC$ na slici 4.33). Ukla-




Slika 4.33: Arhimedova kvadratura segmenta parabole

njanjem trokuta $\triangle ABC$ dobiju se dva nova odsječka u koje se analogno mogu upisati trokuti $\triangle ACE$ i $\triangle BCD$ i tako u beskonačnost. Arhimed je dokazao da je $T = P(\triangle ABC)$ točno 4 puta veća od zbroja površina $\triangle ACE$ i $\triangle BCD$. Stoga se u svakom koraku uklanjanjem trokuta površina ostatka segmenta smanjuje točno 4 puta, što je naravno više od 2 puta. Eudoksova lema sad povlači da će ostatak površine segmenta nakon uklanjanja dovoljno mnogo trokuta na opisani način postati po volji mali, odnosno da će zbroj površina svih uklonjenih trokuta nakon dovoljno broja koraka po volji dobro aproksimirati površinu segmenta, dakle je površina segmenta zbroj svih beskonačno mnogo takvih površina. No, prema EEIX35[39] je $T+\frac{1}{4}T+\frac{1}{16}T+\ldots+\frac{1}{4^n}T = T\cdot\frac{\frac{1}{4^{n+1}}-1}{\frac{1}{4}-1} = \frac{4}{3}T\cdot\left(1-\frac{1}{4^{n+1}}\right)$. Opet po Eudoksovoj lemi, $\frac{1}{4^{n+1}}$ postaje proizvoljno mali s porastom $n$, dakle je površina segmenta parabole $\frac{4}{3}T$. Kako vidimo, Arhimed je ovdje po prvi put u povijesti eksplicitno izračunao sumu jednog (geometrijskog) reda, tj. dokazao je ono što danas zapisujemo kao

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{4}{3}.$$

Od ostalih Arhimedovih rezultata istaknut ćemo još tri. Prvi je posebno poznat. Naime, Arhimed je iterativnom metodom[40] pokazao da je opseg kruga je u odnosu na trostruki promjer istog kruga veći za dio koji je manji od $\frac{1}{7}$ i veći od $\frac{10}{71}$ promjera. Drugim riječima, dokazao je ono što danas

[39] Ako se bilo koji broj brojeva nalazi u produljenoj proporciji, onda se razlika drugog i prvog broja prema prvom odnosi kao razlika zadnjeg i prvog prema zbroju svih osim zadnjeg. Suvremenije rečeno: Ako $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ čine geometrijski niz, onda je $(a_2-a_1):a_1 = (a_{n+1}-a_1):(a_1+a_2+\ldots+a_n)$.

[40] Ovo nije dokaz metodom ekshaustije!

zapisujemo kao

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7},$$

tj. mogli bismo reći da je dobio aproksimaciju broja $\pi$ točnu na točnu na dvije decimale (3.14). Arhimed je čak znao da bi nastavkom svoje metode mogao dobiti i točniju procjenu. Njegova je metoda sljedeća (do doba otkrića računa s redovima, tj. do 17. st., sve procjene iznosa $\pi$ su se temeljile na Arhimedovoj metodi):

1. Krugu upišemo i opišemo pravilni šesterokut ($n = 0$).

2. Neka je $o_n$ opseg upisanog, a $O_n$ opseg opisanog $6 \cdot 2^n$-erokuta (u svakom koraku se udvostručuje broj stranica).

3. Dakle, ako bi polumjer kruga bio 1, početne su vrijednosti $o_0 = 6$, $O_0 = 4\sqrt{3}$.

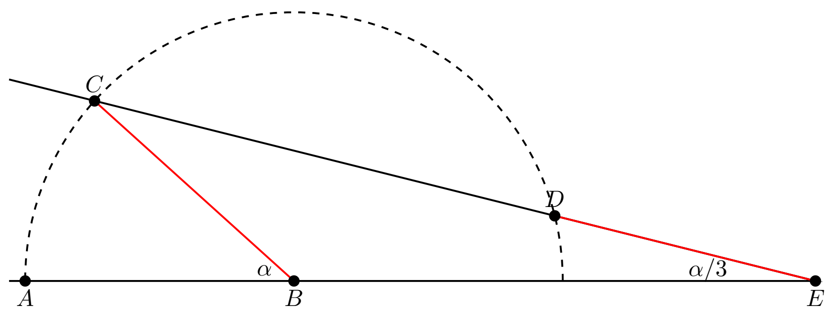
4. Za opseg $o$ kruga i za svaki $n$ vrijedi: $o_0 < o_1 < \ldots < o_n < \ldots < o < \ldots < O_n < \ldots < O_1 < O_0$.

5. Arhimed je otkrio rekurzivnu vezu među opsezima u dva uzastopna koraka: Svaki sljedeći opseg opisanog mnogokuta je harmonijska sredina opsega upisanog i opisanog mnogokuta iz prethodnog koraka, $O_{n+1} = \frac{2O_n o_n}{O_n + o_n}$. Također, svaki sljedeći opseg upisanog mnogokuta je geometrijska sredina opsega opisanog mnogokuta iz istog koraka i opsega prethodnog upisanog mnogokuta, $o_{n+1} = \sqrt{o_n O_{n+1}}$.

6. Arhimed je u $n = 4$ koraka došao do opsega upisanog i opisanog 96-erokuta ($o_4$ i $O_4$) i tako dobio navedenu procjenu.

Zasigurno ste čuli i za **Arhimedova tijela**, tj. polupravilne poliedre. Njih je Arhimedu pripisao Papus. Papus je naveo da je Arhimed napisao tekst u kojem je opisao svih 13 tipova tih polupravilnih tijela. Taj tekst nije sačuvan i Arhimedova su tijela kasnije zaboravljena, sve do renesanse kad ih je ponovno otkrio Kepler, nabrojao ih i primijetio da definiciju također zadovoljavaju i pravilne prizme i antiprizme.

Poznata je i Arhimedova „mehanička" trisekcija kuta. Kao i Hipokratova, ova metoda je doduše egzaktna, ali zahtijeva ravnalo s jednom oznakom duljine na njemu. Neka je zadan kut $\alpha = \angle ABC$ (slika 4.34). Produlji se dužina $\overline{AB}$ i nacrta polukružnica proizvoljnog polumjera oko $B$. Na ravnalu se označi njen polumjer kao $\overline{DE}$. Nađe se pozicija ravnala u kojoj $E$ leži na pravcu $AB$, $D$ leži na polukružnici, tako da pritom pravac (ravnalo) $DE$ prolazi kroz $C$. Tada je $\angle AED = \alpha/3$. Dokaz da




Slika 4.34: Arhimedova trisekcija kuta

je konstrukcija egzaktna je lagan: Po opisanome je $|DE|$ polumjer polukružnice, dakle je $|DE| = |BD| = |BC| = |BA|$. Stoga je $\triangle BED$ jednakokračan, odnosno kut $\angle AED = \angle DBE$. No, i $\triangle BDC$ je jednakokračan, a pa je $\angle BCD = \angle BDC$, što je vanjski kut trokuta $\triangle BED$, odnosno $\angle BCD = 2\angle AED$. Naposlijetku, $\alpha = \angle BCD + \angle AED$ (vanjski kut trokuta $\triangle BCE$) pa je $\alpha = 2\angle AED + \angle AED = 3\angle AED$, što je i trebalo dokazati.

Poslije pada Sirakuze (212. pr. Kr.), Rimljani su nastavili s osvajanjem grčkih teritorija. Tako su do 146. pr. Kr. osvojili gotovo cijelo grčko kopno i pri tom mnogo toga uništili. Ostatak antike do pada Zapadnog Rimskog Carstva naziva se **postklasičnim helenizmom**. Godine 31. pr. Kr. Rimljani su zauzeli Aleksandriju i pritom je u požaru uništen velik dio biblioteke u *museion*-u. Tijekom postklasičnog helenizma znanstveni rad je u odnosu na prethodna razdoblja bitno reduciran, među ostalim i jer Rimljani nisu baš cijenili znanost. Novi matematički rezultati u ovom periodu bili su gotovo isključivo rješenja pojedinačnih problema ili upotpunjavanje djela ranijih matematičara. Jedina značajna iznimka je matematička astronomija, za potrebe koje se u ovom razdoblju razvila trigonometrija i sferna geometrija.

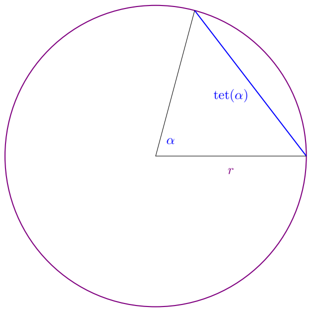
**Trigonometrija** kao geometrijska poddisciplina u kojoj se kutovi proučavaju kroz za njih vezane omjere duljina (iz čega su se s vremenom razvile suvremene trigonometrijske funkcije) svoje korijene vuče još iz babilonskog doba, a i klasičnog helenizma, kad su primjerice pri promatranju sjena štapova uočeni određeni karakteristični omjeri. No, u pravom smislu ona je zasnovana tek u 2. st. pr. Kr., kad su za potrebe astronomije prvi puta tabelirani kutovi s jednom vrstom za njih karakterističnih duljina unutar danog kruga. No, to nisu bile tablice sinusa ni kosinusa ni tangensa kutova u jediničnoj kružnici, kako bi to mogao pomisliti suvremeni čitatelj. Ocem trigonometrija smatra se astronom i matematičar **Hiparh iz Niceje** (oko 190.–120. pr. Kr.), no prije njegovog doprinosa potrebno je kao neposrednog prethodnika spomenuti još jednog od znanstvenika iz klasičnog helenizma.

**Aristarh sa Samosa** (ca. 310.–230. pr. Kr.) je bio matematičar i astronom. Prvi je, u danas izgubljenom djelu, predložio heliocentrički model svemira, što u *Pješćaniku* spominje Arhimed. U povijesti matematike ističe se usporedbom udaljenosti Zemlje do Sunca i do Mjeseca te usporedbom veličina Zemlje i Mjeseca. U svojim je (matematički korektnim, ali zbog krivih početnih pretpostavki i grešaka mjerenja u konačnici netočnim) izračunima koristio određene omjere duljina koji odgovaraju danas uobičajenim trigonometrijskim funkcijama određenih kutova.

No, sustavno razmatranje određenog tipa omjera za različite kutove prvi je proveo Hiparh iz Niceje. U povijesti astronomije poznat je po tome što je izračunao trajanje godine s točnošću do na 6 minuta, odredio kut između ekliptike i ekvatora, otkrio precesiju ekvinocija i izračunao koordinate mnogih zvijezda. U matematici je zapamćen kao autor prve trigonometrijske tablice, po prvim rezultatima iz sferne geometrije i po prvoj analizi stereografske projekcije, no njegova su djela izgubljena te njihov sadržaj saznajemo iz sekundardnih izvora. Hiparhova prva trigonometrijska tablica bila je tablica središnjih kutova u kružnici i pripadnih tetiva. **Tablice tetiva** ostat će karakteristika trigonometrije sve do kraja antike. Mi ćemo tetivu koja odgovara središnjem kutu $\alpha$ označavati s $\operatorname{tet}\alpha$. Pogledamo li sliku 4.35, vidimo da je veza starogrčkog trigonometrijskog omjera 'tetiva' (tet) s danas uobičajenim trigonometrijskim omjerima dana formulom

$$\operatorname{tet}\alpha = 2r\sin\frac{\alpha}{2},$$

tj. (do na polumjer) tetive su dvostruki sinusi polukuta. Naravno, iznosi tetiva (kao i sinusa) općenito nisu prirodni brojevi, nego razlomci i, češće, iracionalni brojevi. Stoga su se u tablicama navodile aproksimativne racionalne vrijednosti tetiva pa je ovdje važno spomenuti nešto o starogrčkom zapisu razlomaka. Oni se i dalje strogo matematički nisu smatrali brojevima, ali su naravno bili nužni u raznim praktičnim, ovdje astronomskim, proračunima. U Hiparhovo doba standardni brojevni sustav bio je alfabetski i on se koristio za zapisivanje svih prirodnih brojeva. Dok su u starije doba za zapis razlomaka korišteni jedinični razlomci (očigledno naslijeđeni iz Egipta) te bi se primjerice $\frac{1}{5}$ pisala jednostavno kao $\varepsilon''$ (dakle, nazivnik s dva apostrofa), u ovom razdoblju pojavljuju se dva nova stila zapisa razlomaka. Jedan je koristio brojnik i nazivnik (Heron i Diofant su koristili takav zapis), s tim da se jednostavno pisao nazivnik *iznad* brojnika, npr. $\begin{matrix}\kappa\beta\\ \zeta\end{matrix}$ je naš $\frac{7}{22}$. U astronomiji se pak za zapisivanje razlomaka koristio alfabetski brojevni sustav u kombinaciji s babilonskim seksagezimalnim (pri čemu se seksagezimalno zapisivao samo razlomljeni dio broja). Primjerice, Hiparho-




Slika 4.35: Tetive i središnji kutovi

vih $7°30'$ bilo je pisano kao $\overline{\zeta}\ \overline{\lambda}$. Pritom je postojao, kao i u Mezopotamiji od ca. 3. st. pr. Kr., poseban simbol za nedostajuću potenciju od 60, tj. znamenka koja odgovara današnjoj nuli kad se nalazi 'usred' broja. Hiparhova tablica tetiva sadržavala je kutove u koracima od po $7°30'$ u rasponu od 0 do $180°$ (što mislite, zašto ne do $360°$?). Pripadne duljine tetiva također su pisane na isti način. Primjerice, za kut od $60°$ ($\overline{\xi}$) Hiparh je naveo iznos tetive $57°18'$ ($\overline{\nu\zeta}\ \overline{\iota\eta}$). Budući da se za središnji kut od $60°$ polumjer i tetiva podudaraju, vidimo da je polumjer kruga u kojem je Hiparh gledao središnje kutove i tetive bio $57 + \frac{18}{60} = 57.3$. Pomnija analiza tablice (jer naravno da svako zaokruživanje nosi grešku) pokazuje da je zapravo gledao krug opsega 360, što naravno odgovara jednostavnoj podjeli punog kuta na stupnjeve.

U sljedećem razdoblju u trigonometriji su se istakla još dva znamenita znanstvenika. Prvi je bio **Menelaj Aleksandrijski** (ca. 70.–130. A.D.)., koji je također izradio tablicu tetiva (u šest knjiga), no ona nije sačuvana. Najpoznatije djelo mu je *Sphaerica*, sačuvana u arapskom prijevodu, u kojem se bavi sfernom geometrijom i sfernom trigonometrijom. *Sphaerica* je najstarije djelo u kojem je definiran **sferni trokut**: To je trokut koji je omeđen lukovima triju velikih kružnica na danoj sferi. U ovoj se knjizi nalazi i znameniti Menelajev teorem za ravninske i sferne trokute: Zadan je trokut $ABC$ i pravac koji siječe pravce $AB$, $BC$, $CA$ redom u točkama $D$, $E$, $F$. Tada je

$$|AD| \cdot |BE| \cdot |CF| = |BD| \cdot |CE| \cdot |AF|$$

ako je trokut ravninski, odnosno

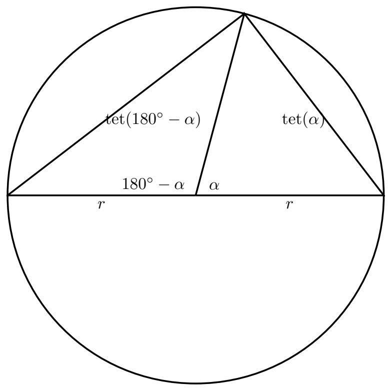
$$\sin \overset{\frown}{AD} \cdot \sin \overset{\frown}{BE} \cdot \sin \overset{\frown}{CF} = \sin \overset{\frown}{BD} \cdot \sin \overset{\frown}{CE} \cdot \sin \overset{\frown}{AF}$$

ako je trokut sferni.[41]

[41] Kod sfernih trukuta se duljine njihovih stranica poistovjećuju s mjerama odgovarajućih središnjih kutova.

Konačnu sintezu trigonometrijskog znanja antičkog doba postigao je znameniti **Klaudije Ptolemej** (ca. 85.–165.), najutjecajniji antički astronom i geograf. Djelovao je u Aleksandriji, a bavio se i matematikom, astrologijom, glazbom i filozofijom. Jedino Ptolemejevo čisto matematičko djelo sadrži pokušaj dokaza Euklidovog postulata o paralelama (tako navodi Proklo). Najznačajnije Ptolemejevo djelo je *Matematike sintaksis* („Matematička kolekcija"), kasnije nazvano *Megale sintaksis* („Velika kolekcija"), koje nije sačuvano u originalu, nego samo u arapskom prijevodu te je poznatije pod imenom tog prijevoda: *Almagest* („Najveći"). U tom je djelu Ptolemej dao matematičku teoriju kretanja nebeskih tijela. Zbog izuzetno dobrog poklapanja s dostupnim eksperimentalnim podacima ovo je djelo sve do renesanse bilo osnova zapadne astronomije. U njemu nalazimo mnoge doprinose sfernoj geometriji i trigonometriji. Ptolemejeva tablica tetiva vrijedna je malo veće pažnje, jer njezina konstrukcija sadrži mnoge važne trigonometrijske reultate. Kao i Hiparh, Ptolemej kreće od kružnice podijeljene na 360 dijelova ('stupnjeva'), no također dijeli i njezin promjer i to na 120 dijelova (uočimo dakle da mu je jedinica duljine za opseg i promjer različita, jer je zasigurno znao da opseg kružnice nije 3 puta njezin promjer, štoviše Ptolemej je omjer opsega i promjera ($\pi$) procijenio s $3\frac{17}{120}$, dakle s greškom reda veličine samo $10^{-5}$). Stoga ćemo za mjerenje duljine luka na kružnici jedinicu označiti s $^\circ$, dok ćemo za jedinicu za mjerenje duljine ravnih crta pisati (u literaturi uobičajenu) oznaku $^p$ za $\frac{1}{120}$ duljine promjera [5]. Primjerice, $\operatorname{tet} 60^\circ = 60^p$ (kutu od $60^\circ$ odgovara tetiva duljina polumjera, dakle pola promjera, kružnice).

Nakon što je dokazao neke geometrijske teoreme, iskoristio ih je za jednostavno izračunavanje nekih tetiva. Pritom je, naravno, u više navrata morao računati druge korijene, no nije zabilježeno koju je metodu koristio (s obzirom da je vjerojatno živio nakon Herona iz Aleksandrije, moguće je da je koristio Heronovu, tj. babilonsku metodu). Koristeći jedan svoj te Pitagorin teorem prvo je dobio da je duljina stranice pravilnog deseterokuta jednaka $37^p 4\ 55$ (mi bismo rekli: $\left(37 + \frac{4}{60} + \frac{55}{3600}\right) \cdot \frac{1}{120} = \frac{26699}{86400} \approx 0{,}3$ promjera) pa je to tetiva koja odgovara kutu $36^\circ$. Znajući da je u pravokutnom trokutu kojemu je jedna kateta polumjer, a druga stranica pravilnog deseterokuta upisanog u kružnicu, hipotenuza jednaka stranici pravilnog peterokuta upisanog u istu kružnicu, koristeći Pitagorin poučak Ptolemej je izračunao tetivu za $72^\circ$. Nadalje, lagano se izračunaju tetive za kutove $60^\circ$, $90^\circ$ i $120^\circ$ (zadatak za čitatelja: izračunajte posljednje dvije i zapišite na Ptolemejev način, koristeći jedinicu $^p$). Iz tih pet tetiva izračunao je i tetivu od $144^\circ$ koristeći svoju zanimljivu kombinaciju Pitagorinog i Talesovog poučka u kontekstu




Slika 4.36: $(\mathrm{tet}\,\alpha)^2 + (\mathrm{tet}(180^\circ - \alpha))^2 = d^2$.

računa tetiva (vidi sliku 4.36):

$$(\mathrm{tet}\,\alpha)^2 + (\mathrm{tet}(180^\circ - \alpha))^2 = d^2.$$

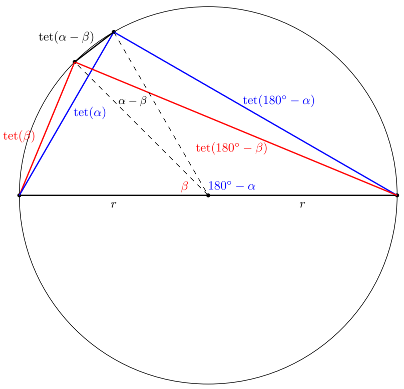
Za nastavak je dokazao jednu lemu, koju danas poznajemo pod imenom **Ptolemejev teorem**: U tetivnom četverokutu je umnožak duljina dijagonala jednak zbroju umnožaka dva para nasuprotnih stranica.[42] Kao korolar te leme dokazao je (koristeći dijagram poput onog na slici 4.37) „tetivnu" varijantu adicijskog teorema za sinus, koju možempo zapisati ovako:

$$\mathrm{tet}(\alpha - \beta) \cdot d = \mathrm{tet}\alpha \cdot \mathrm{tet}(180^\circ - \beta) - \mathrm{tet}\,\beta \cdot \mathrm{tet}(180^\circ - \alpha).$$

Koristeći taj i još nekolicinu sličnih rezultata (vidi npr. [5]) dobio je tablicu tetiva u rasponu središnjih kutova (tj. lukova) od $30'$ do $180^\circ$, u koracima od po pola stupnja (točnost je, kad se preračuna u decimalni sustav, uglavnom na 5 do 6 decimala).

Osim spomenutih matematičara koji su doprinijeli nastanku trigonometrije, vrijedi spomenuti još tri matematičara postklasičnog helenizma: Herona, Diofanta i Papusa. **Heron iz Aleksandrije** (vj. 1. st. A.D.) bio je matematičar, fizičar, izumitelj i inženjer. On odudara od ostalih starogrčkih matematičara jer je bio orijentiran na praktičnu matematiku. Napisao je tri matematička djela: *Metrica* (o mjerenju, sadrži — naravno ne simbolički zapisanu — **Heronovu formulu za površinu trokuta**, zasigurno poznatu već ranije, i **Heronovu metodu za korjenovanje** na primjeru $\sqrt{720}$, pri čemu

[42] Naravno, ove umnoške duljina Ptolemej je tipično antički naveo kao površine odgovarajućih pravokutnika.




Slika 4.37: Adicijski teorem za tetive

je očito da je znao da se povećanjem broja iteracija povećava točnost), *Geometrica* (o površinama) i *Stereometrica* (o volumenima). Tijekom vremena su tim djelima dodavani mnogi sadržaji pa nije sigurno koji dijelovi stvarno potječu od Herona. Poznat je i **Heronov problem najkraćeg puta**, koji je jedan od najstarijih poznatih problema optimizacije: Za zadane točke $A$ i $B$ s iste strane nekog pravca traži se točka $C$ na tom pravcu za koju je $|AC| + |CB|$ najmanja moguća. Heron ga je riješio koristeći osnu simetriju.

**Diofant Aleksandrijski** (vjerojatno 3. st. AD) najznačajniji je matematičar postklasičnog razdoblja i posljednji veliki europski matematičar prije Fibonaccija. Jedna od rijetkih pouzdanih informacija o njegovom životu je ta da je autor matematičkog djela *Aritmetika.* Čini se da je živio 84 godine — na to upućuje zadatak kojeg oko 500. g. u *Grčkoj antologiji* daje Metrodor:

> *Bog mu [Diofantu] je dozvolio da bude dječak šestinu svog života; kad je dodana dvanaestina, obrazi mu stekoše bradu; On za njega zapali svjetlo braka nakon sedmine, a u petoj godini nakon ženidbe darova mu sina. No ah! Kasno i jadno dijete, kad dostiže mjeru polovine očeva života, uze ga ledeni grob. Nakon što je četiri godine tražio utjehu u znanosti brojeva, dostignu kraj svog života.*

Po Diofantu danas nose ime **diofantske jednadžbe**.[43] Diofantova *Aritmetika* sastoji se od 150 algebarskih[44] zadataka u 13 „knjiga", bez prateće opće teorije. Šest od tih 13 knjiga je sačuvano na grčkom i četiri na arapskom

[43] U posljednjih se dvjestotinjak godina naziv *diofantske jednadžbe* uvriježio za algebarske jednadžbe s više nepoznanica s cjelobrojnim koeficijentima kojima se traže *cjelobrojna* rješenja.

[44] Uočimo da je ovo jedino starogrčko matematičko djelo u kojem se razmatraju jednadžbe kao takve, ali isključivo u kontekstu teorije brojeva.

jeziku. Mnogi zadaci u *Aritmetici* su neodređene jednadžbe, tj. jednadžbe s nejedinstvenim rješenjima. Diofant razmatra samo rješenja koja se mogu zapisati kao pozitivni razlomci. Neki od Diofantovih zadataka još ni danas nisu riješeni, a kopije i prijevodi *Aritmetike* imale su velik utjecaj na mnoge kasnije matematičare. Tipičan primjer diofantske jednadžbe je traženje pitagorejskih trojki. Diofant je osmislio i vlastitu algebarsku notaciju. Zbrajanje je označavao nadopisivanjem, a za oduzimanje koristio vertikalno prekriženi simbol $\Lambda$ (koji se odnosi na sve članove iza njega). Ostali simboli njegove notacije su:

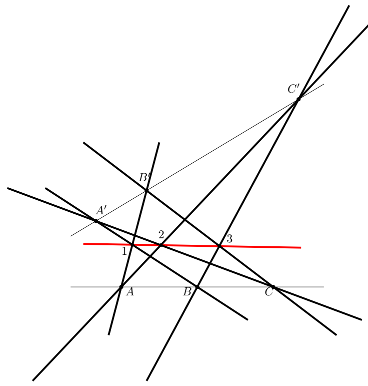
| moderno | Diofant |
|---|---|
| $x^0 = 1$ | $\overset{o}{M}$ |
| $x$ | $\zeta$ |
| $x^2$ | $\Delta^{\Upsilon}$ |
| $x^3$ | $K^{\Upsilon}$ |
| $x^4$ | $\Delta^{\Upsilon}\Delta$ |
| $x^5$ | $\Delta K^{\Upsilon}$ |
| $x^6$ | $K^{\Upsilon}K$ |
| $x^{-1}$ | $\zeta^x$ |
| $x^{-2}$ | $\Delta^{\Upsilon^x}$ |

Tako bi, primjerice, današnji izraz $3x^2 + 12$ Diofant zapisao kao $\Delta^{\Upsilon}\gamma\overset{o}{M}\iota\beta$, a današnji izraz $x^3 - 5x^2 + 8x - 1$ kao $K^{\Upsilon}\alpha\zeta\eta\Lambda\Delta^{\Upsilon}\varepsilon\overset{o}{M}\alpha$.

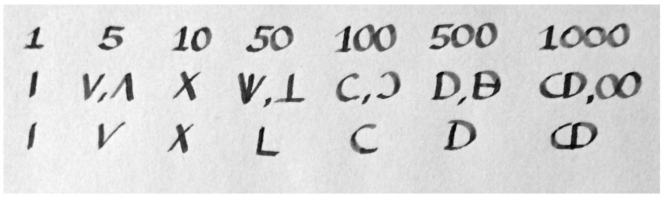
Posljednji veliki antički grčki matematičar bio je **Papus iz Aleksandrije** (ca. 290.–350.). Glavno Papusovo djelo je *Kolekcija*, koje je jedan od glavnih izvora današnjih znanja o antičkoj matematici. To je vrsta enciklopedije starogrčke matematike, a sadrži i Papusove vlastite rezultate, od kojih je najpoznatiji **Papusov teorem**: Dana su dva pravca i na njima po tri točke: $A$, $B$, $C$ odnosno $A'$, $B'$, $C'$. Neka je točka 1 sjecište $AB'$ i $A'B$, točka 2 sjecište $AC'$ i $A'C$ te točka 3 sjecište $BC'$ i $B'C$. Tada su točke 1, 2 i 3 kolinearne (slika 4.38).

Papus je uveo pojam fokusa i direktrise konike. Iskazao je i dokazao teorem kojeg je kasnije, u 18. st., za definiciju konika iskoristio J. R. Bošković: Neka je dan pravac $AB$ i točka $C$ u ravnini. Neka je iz točke $D$ u istoj ravnini povučen pravac $CD$ i okomica $DE$ na $AB$ i neka je zadan omjer $|CD| : |DE|$. Tada je $D$ na konici, i to na paraboli ako je taj omjer jednak 1, na hiperboli ako je veći od 1 odnosno na elipsi ako je manji od 1. Drugim riječima: Konika je geometrijsko mjesto točaka u ravnini kojima je omjer udaljenosti do čvrste točke (fokusa) i čvrstog pravca (direktrise) konstantan.

Za kraj pregleda antičke matematike recimo par riječi o matematici u Rimskom Carstvu. Rimljani nisu cijenili matematiku, samo su koristili njezine praktične rezultate u građevini, mjeriteljstvu, računanju kamata i udjela




Slika 4.38: Papusov teorem




Slika 4.39: Rimske brojke u doba republike (srednji red) i carstva (donji red)

u nasljedstvima. Samostalnih rimskih matematičkih doprinosa nije bilo, a mnogi grčki tekstovi preneseni su, odnosno prevedeni na latinski iskrivljeno i bez razumijevanja. U školama se učilo računanje na prste, u glavi i pomoću **(rimskog) abakusa**. Najpoznatija matematička „ostavština“starih Rimljana su **rimske brojke**, no današnja verzija je tek malo starija od zapadne verzije indoarapskih brojki (u antičko doba 1000 se nije pisao kao M, nego kako se vidi na slici 4.39). Rimski je sustav primarno dekadski, ali sa tzv. sekundarnom bazom 5, slično kao akrofonski grčki brojevni sustav. Suptraktivan je, tj. aditivan, osim što se u slučaju da se ispred simbola veće vrijednosti nađe simbol manje vrijednosti, ta manja oduzima od veće: IV = IIII. Rimljani su kod podjele jedinica mase i novca koristili duodecimalne razlomke. Jedan *as*[45] se dijelio na 12 unci (*uncia*). Znak za uncu bila je točka, a za $\frac{1}{2}$ slovo S (*semis*). Ostali razlomci između 1/12 i 1 zapisivali su se aditivno korištenjem navedenih, a svaki je imao i svoj poseban naziv, npr. 2/3 je *bes*, zapisan kao S··. Kao i kod Grka ranije, korišteni su i egipatski razlomci.

[45]Jedinica novca i mase. Jedinica duljine bila je *pes*, stopa, i dijelila se na 12 *polices*, palaca, ili na 16 *digiti*, prstiju.

# Poglavlje 5

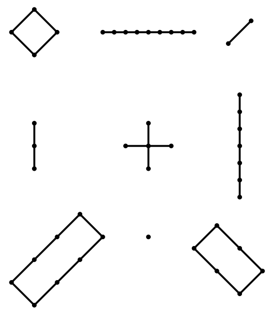
# Starokineska i staroindijska matematika

## 5.1 Kineska matematika prije 13. stoljeća

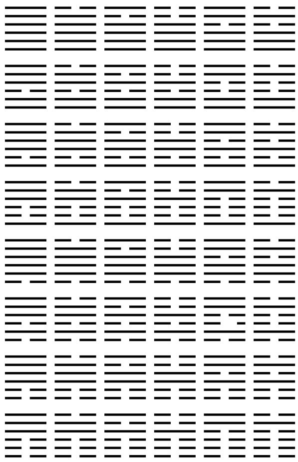
Podsjetimo se malo opće povijesti Kine. Najstarije kulture oko rijeka Huang He i Jangce pojavile su se u razdoblju 3000.–1500. pr. Kr. Iza ca. 2000. g. pr. Kr. tu se razvilo kinesko pismo, a otprilike iza 1500. pr. Kr. brojevi su se prikazivali koristeći (nepozicijski) dekadski brojevni sustav. Već rano Kinezi su imali razvijenu astronomiju. Najstariji pouzdaniji podaci o kineskoj općoj i znanstvenoj povijesti sačuvani su iz doba dinastije Džou (Čou),[1] 11.–5. st. pr. Kr. U to doba zabilježen Halleyev komet, izrađeni su kalendari, a vjeru i filozofiju oblikovali su Konfucije (konfucijanizam) i Lao Ce (taoizam). Znameniti Kineski zid sagrađen je u doba prvog kineskog cara Čin Ši Huangdija potkraj 3. st. pr. Kr. Iz tog ranog razdoblja nema sačuvanih matematičkih tekstova, ali iz raznih povijesnih izvora ipak možemo saznati ponešto o kineskoj matematici prije 3. st. pr. Kr. Kineska aritmetika je vjerojatno stara otprilike koliko i egipatska i sumerska, što potvrđuje izvor iz druge polovice drugog tisućljeća pr. Kr. na kojem nalazimo brojeve zapisane brojkama dekadskog sustava. Među kineskim matematičkim specifičnostima za vremena više od 2500 godina prije današnjeg vrijedi spomenuti dvije. Jedno su **magični kvadrati**,[2] kojima su se prvi bavili upravo stari Kinezi, najkasnije u 7. st. pr. Kr. U to je doba opće poznat tzv. *lo šu* magični kvadrat (slika 5.1), uz koji je vezana poznata legenda o kornjači iz 3. tisućljeća pr. Kr., a u kojem je magična

[1]Kineske nazive transkribirali smo na hrvatsku latinicu koristeći pomoćno kinesko latinično pismo pinyin.

[2]Magični kvadrat je kvadratna tablica brojeva, u pravilu 1 do $n^2$, koji su raspoređeni tako da su zbrojevi svih redaka, svih stupaca i obje dijagonale jednaki (taj iznos se naziva magičnom konstantom).



Slika 5.1: *Lo šu* magični kvadrat

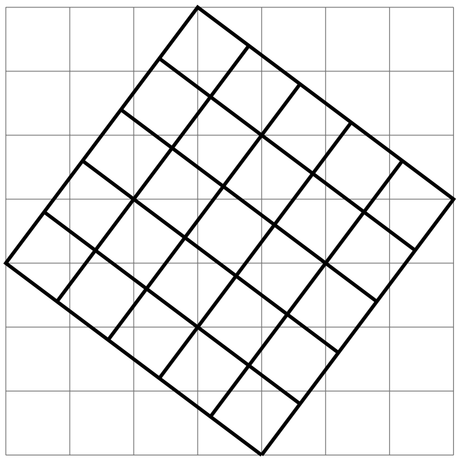


Slika 5.2: *I Čing* heksagrami

konstanta 15 (što je broj dana u svakom od 24 ciklusa starokineske solarne godine). Danas znamo i da je to (do na simetriju) jedini mogući magični kvadrat dimenzije $3 \times 3$. No, veći magični kvadrati se u Kini spominju tek u 13. st., prije čega su već bili poznati u Indiji i u Arapa.

Druga matematička ideja koja se prvi put pojavljuje u staroj Kini su **permutacije** (zapravo, varijacije s ponavljanjem). Najstariji poznati primjer permutacija je kineski *I Čing* (*Knjiga promjena*), vj. iz 7. st. pr. Kr., u kojem se (u svrhu proricanja) dva simbola, jang (—) i jin (– –), prvo slažu u $2^3 = 8$ trigrama pa oni u $8^2 = 64$ heksagrama (slika 5.2), tj. gledaju se sve varijacije 6-tog razreda od 2 elementa. No, nema naznaka da su u stara vremena Kinezi sustavno razmatrali permutacije.

Najkasnije od 5. st. pr. Kr. Kinezi su razvili dekadski *pozicijski* sustav *bez nule*, dakle bez apsolutne pozicije. Brojevi su se prikazivali pomoću štapića,



Slika 5.3: Ilustracija Pitagorinog poučka u „Aritmetici džou-gnomona"

koji su ujedno bili računsko pomagalo. Iz tog su se razvile kineske štapičaste brojke, koje su se koristile sve do 16. st. Kako bi bilo jasno na koju potenciju od 10 se znamenka odnosi, orijentacija znamenki bila je vertikalna za neparne potencije (10, 1000, ...), a horizontalna za parne potencije (1, 100, ...). Primjerice, $\equiv \| -$ je kineskim štapićastim brojkama zapisan broj kojeg danas pišemo 321 (ili 32100 ili 3210000 ili ...). Od 2. st. pr. Kr. razlikuju se pozitivni brojevi (*ši* = blago, prihod) prikazivani crvenim štapićima i negativni brojevi (*fa* = dug, rashod) prikazivani crnim štapićima. No, simbol za znamenku nula (krug) uveden je tek u 13. st. Napomenimo ovdje da je poznato staro računsko pomagalo, **kineski abakus** ($\boxed{\text{suanpan}}$), uveden bitno kasnije od štapića, a u općoj uporabi je tek od 16. st.

U doba dinastije Han (206. pr. Kr.–220. A.D.) došlo je do procvata matematike i počela se pridavati važnost matematičkom obrazovanju. Iz tog doba potječu najstariji sačuvani kineski matematički tekstovi. Također, u to doba Kinezi su ostvarili mnoge impresivne napretke u znanosti i tehnologiji: izumili su proizvodnju papira, otkrili su Sunčeve pjege, ... U 1. st. je u Kinu prodro i budizam iz Indije, te su u to doba zasigurno postojali i drugi kontakti s Indijom. No, u 3. st. carstvo se raspalo, te je došlo do zamiranja znanosti i tehnike.

Najstariji potpuno sačuvan kineski matematički tekst je *Džoubi suandzing* (*Aritmetika džou-gnomona*, koji se datira između 100 pr. i 100. A.D. Posebno je poznata grafika 5.3 iz njega, koja se lako poopćava na dokaz Pitagorinog poučka (u Kineza: pravilo *gou gu*). No, dokazi svakako u to doba još nisu bili dio matematike u Kini.

Zanimljivije i važnije kinesko matematičko djelo je *Điudžuang suanšu*

(*Devet poglavlja umijeća računanja*). Radi se o kompilaciji raznih starijih rukopisa nastaloj najvjerojatnije u prvoj polovici 2. st. nove ere. Sadrži 246 zadataka raspoređenih u 9 poglavlja i bilo je vrlo utjecajno djelo, koje su svojim komentarima doradili mnogi kasniji kineski matematičari i koje je kasnije, skupa s *Aritmetikom džou-gnomona*, postalo jedan od tzv. 10 klasika kineske matematike, tj. službenog popisa obvezne matematičke literature za obrazovanje u 7. st. (zapravo, bilo ih je 12). Poglavlja u *Devet poglavlja umijeća računanja* sadržajno pokrivaju sljedeće teme:

1. „Mjerenje polja": Izračunavanje površina, uključivo računa s razlomcima. Tu se površina kruga računa pravilima koja su ekvivalentna aproksimaciji $\pi$ s 3.

2. „Proso i riža": Preračunavanja količina za razmjenu (trojno pravilo).

3. „Raspodjela po proporciji": Proporcionalnosti vezane za raspodjelu dobara i novca.

4. „Koja širina?": Izračunavanje nepoznatih duljina, širina, visina geometrijskih likova i tijela kojima je poznata površina odnosno volumen. Tu je uključeno računanje kvadratnih i kubnih korijena.

5. „Rasprave o radu": Određivanje raznih volumena u konstrukciji građevina i drugih struktura, u svrhu utvrđivanja radnog učinka.

6. „Pošteni nameti": Proporcionalnosti u izračunima vezanim (ne samo) za plaće i poreze.

7. „Višak i manjak": Linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom (rješavanje metodom *regula falsi*, tj. temeljem dva pokušaja).

8. „Pravokutne tablice": Rješavanje sustava linearnih jednadžbi.

9. „Pravokutni trokuti": Rješavanje praktičnih geometrijskih problema koristeći svojstva pravokutnih trokuta, uključivo Pitagorinog poučka.

Među tim sadržajima istaknut ćemo dva, u kojima se pojavljuju specifični kineski doprinosi matematici koji u isto vrijeme još nisu poznati drugdje, a u oba slučaja se radi o prvim bitnim doprinosima povijesti **numeričke matematike** nakon babilonske metode računanja korijena. Prvi od njih su novi iterativni algoritmi za računanje kvadratnih i kubnih korijena, a drugo je rješavanje sustava linearnih jednadžbi metodom *fang čeng* koja je gotovo identična modernoj, matričnoj **Gaußovoj metodi eliminacija**.

Opišimo prvo ovo potonje, na konkretnom primjeru, dok ćemo kinesko korjenovanje opisati nešto kasnije, na str. 87. Napominjemo da su računi u *Devet poglavlja* opisani koristeći štapičaste brojke i „mehanički" (kako pomicati štapiće u pojedinom koraku), no postupak je ekvivalentan ovom kojeg ćemo sad opisati na primjeru jednog zadatka iz. 8. knjige *Devet poglavlja*.

**Primjer 18** *Iz tri snopa dobrog žita, dva snopa srednjeg i jednog snopa lošeg žita dobije se prinos* 39 dou.[3] *Iz dva snopa dobrog žita, tri snopa srednjeg i jednog snopa lošeg žita dobije se prinos* 34 dou. *Iz jednog snopa dobrog žita, dva snopa srednjeg i tri snopa lošeg žita dobije se prinos* 26 dou. *Koliki je prinos po jednog snopa dobrog, srednjeg i lošeg žita?*

*Postupak je sljedeći. Prvo se ispiše pravokutna tablica:*

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 2 |
| 3 | 1 | 1 |
| 26 | 34 | 39 |

*U prvom koraku se od trostrukog drugog stupca oduzme dvostruki treći, rezultat zapisujemo u drugi stupac:*

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 3 |
| 2 | 5 | 2 |
| 3 | 1 | 1 |
| 26 | 24 | 39 |

*Sad se trostruki prvi stupac oduzme od trećeg, rezultat zapišemo u prvi stupac:*

| | | |
|---|---|---|
| | | 3 |
| 4 | 5 | 2 |
| 8 | 1 | 1 |
| 39 | 24 | 39 |

*Sad se još poništi* 4 *u prvom stupcu, tako da od peterostrukog prvog stupca oduzmemo četverostruki drugi, rezultat pišemo u prvi:*

| | | |
|---|---|---|
| | | 3 |
| | 5 | 2 |
| 36 | 1 | 1 |
| 99 | 24 | 39 |

*Naposljetku očitavamo rješenje. Prvo vidimo da je prinos lošeg žita* $\frac{99}{36} = 2\frac{3}{4}$. *Stoga je prinos srednjeg žita* $(24 - 1 \cdot 2\frac{3}{4}) : 5 = 4\frac{1}{4}$ dou *i naposlijetku prinos dobrog žita je* $(39 - 1 \cdot 2\frac{3}{4} - 2 \cdot 4\frac{1}{4}) : 3 = 9\frac{1}{4}$ dou,

[3]Dou je kineska mjera volumena, u to doba iznosila je otprilike današnjih 2 L.

Kako je vidljivo iz primjera, postupak je jednak modernoj matričnoj Gaußovoj metodi eliminacija, do na to da je u odnosu na suvremeni način zamijenjena uloga stupaca i redaka (i da se izbjegava račun s razlomcima).

U doba dinastije Han živio je i multidisciplinarni znanstvenik **Džang Heng** (78.–139.), koji je podučavao da je Zemlja kuglastog oblika i konstruirao prvi seizmograf. On je također modificirao tada (empirijski) poznato pravilo u kojem se omjer površine kvadrata i površine upisanog mu kruga uzimao kao 4 : 3,[4] te zaključio da se kvadrat površine kvadrata i kvadrat površine tom kvadratu upisanog kruga odnose kao 8 : 5. Ako to usporedimo s egzaktnim omjerom, a taj je $(2r)^4 : (r^2\pi)^2 = 16 : \pi^2$, vidimo da Džang Hengova uputa odgovara procjeni $\pi$ kao $\sqrt{10}$. Za tu Džang Hengovu aproksimaciju saznajemo iz komentara *Devet poglavlja*, koje je napisao prvi značajniji poimence poznati kineski matematičar **Liu Hui** (3. st.). On je pak opisao postupak analogan Arhimedovom iterativnom postupku, za kojeg zasigurno nije znao, uočio da se takvim postupkom može po volji dobro aproksimirati konstanta koju danas zovemo $\pi$, ali je za praktične račune zagovarao aproksimaciju $\frac{157}{150} = 3{,}14$. Napomenimo ovdje da je već u *Devet poglavlja* bio poznat točan odnos površine i opsega kruga (površina kruga je četvrtina umnoška opsega i promjera). U svojim komentarima *Devet poglavlja* Liu Hui je objasnio i opravdao postupke koji se u njima nalaze. Dio njegovih komentara kasnije je odvojen u zasebni *Matematički priručnik o jednom otoku u moru*, gdje se bavi određivanjem udaljenosti i veličina nedostupnih objekata. Primjer zadatka iz tog priručnika je sljedeći:

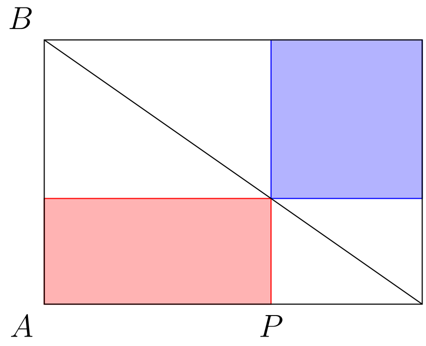
**Primjer 19** *Dvaštapa visine* 3 *džang*[5] *zabijeni su u zemlju i razmaknuti* 1000 bu. *Jedan štap je bliži udaljenom otoku nego drugi. Ako promatrač stoji* 123 bu *iza prvoga, vidi vrh otoka u liniji s vrhom tog štapa, a ako stoji* 127 bu *iza drugoga, vidi vrh otoka u liniji s vrhom tog drugog štapa. Koliko je visok otok i koliko je daleko od bližeg mu štapa?*

*Kao rješenje je navedeno: Neka je brojnik jednak visini štapa pomnoženoj s razmakom štapova, neka je nazivnik razlika odmaka od štapova. Doda li se kvocijentu visina štapa dobije se visina otoka. Za udaljenost bližeg štapa do otoka nazivnik je isti, ali brojnik je razmak štapova pomnožen s odmakom od prvog, a kvocijentu se ne pribraja ništa.*

*Iako ovdje nije objašnjeno, iz ostalih zadataka se vidi da je Liu Hui ovakve zadatke rješavao izjednačavanjem površina pravokutnika s obiju strana dijagonale u većem pravokutniku. Pogledajmo skicu 5.4. Na njoj su površine*

[4]Suvremeno iskazano, empirijsko pravilo je tvrdilo da za krug polumjera $r$ i promjera $d$ vrijedi $d^2 : (r^2\pi) = 4 : \pi = 4 : 3$, tj. ovo odgovara aproksimaciji $\pi$ s 3.

[5]1 džang je 10 kineskih stopa (či), odnosno u to doba otprilike 2.3 $m$. Uz to je korištena i jedinica bu, a 1 bu je 6 či.




Slika 5.4: Liu Huijeva metoda određivanja visine nedostupnih objekata.

*plavog i crvenog pravokutnika jednake. Ako je* $h = |AB|$ *visina otoka i* $d = |AP|$ *razmak od otoka do jednog od štapova, onda ako izjednačimo navedene površine za prvi štap dobijemo* $3\,\textit{džang} \times d = 123\,\mathrm{bu} \cdot (h - 3\,\textit{džang})$*, a ako isto učinimo za drugi štap dobijemo* $3\,\textit{džang} \times (1000\,\mathrm{bu} + d) = 127\,\mathrm{bu} \cdot (h - 3\,\textit{džang})$*. Oduzmemo li te jednakosti dobivamo navedeno pravilo za visinu otoka* ($\textit{ispadnu } 753\,\textit{džang} = 1255\,\mathrm{bu}$).

Vratimo se ovdje na tren dvama prvim sačuvanim djelima starokineske matematike. Već u *Aritmetici džou-gnomona* nalazimo postupak za **računanje drugih korijena**, koji je u *Devet poglavlja* poopćen na računanje trećih korijena. Te postupke je komentirao i geometrijski objasnio Liu Hui. Ovdje ćemo opisati samo starokineski iterativni postupak za određivanje cjelobrojnog dijela drugog korijena zadanog broja. Za razliku od babilonske (Heronove) metode, ovdje se znamenke određuju redom, od prve nadalje.

**Primjer 20** *Izračunajmo* $\lfloor\sqrt{55225}\rfloor$*. Očito je to troznamenkasti broj* $(abc)$*, tj.*

$$55225 = (100a + 10b + c)^2.$$

*Stoga je*

$$55225 = \underline{10000a^2} + 100(20a + b)b + (20(10a + b) + c)\,c,$$

*iz čega isprobavanjem vidimo da je* $a = 2$*. Stoga je*

$$15225 = \underline{100(40 + b)b} + (20(20 + b) + c)\,c,$$

*odakle opet isprobavanjem vidimo da je* $b = 3$*. Preostaje*

$$2325 = (460 + c)\,c,$$

*pa je* $c = 5$*, odnosno* $\lfloor\sqrt{55225}\rfloor = \sqrt{55225} = 235$.

Kao što smo rekli, nakon 3. st. n. e., došlo je do zastoja u razvoju kineske znanosti. Do novog procvata kineske matematike došlo je u razdoblju 618.–906., u doba dinastije Tang. U to je doba u Kini dominirao budizam, no nešto kasnije, u razdoblju vlasti sjeverne pa južne dinastije Sung (960.–1278.) konfucijanizam je postao obavezan. U to je doba izumljen tisak s pomičnim slovima i uvedeni su državni ispiti za službenike. Nakon što su u 13. st. Kinu osvojili Mongoli došlo je do značajnijih kontakata sa zapadom (Marko Polo je 1275. stigao u Peking) te daljnji razvoj nećemo specijalno pratiti.

U razdoblju 7.–13. stoljeća Kinezi su značajno unaprijedili dvije matematičke discipline: teoriju brojeva i numeričku matematiku. U tom su razdoblju stare metode korjenovanja[6] poopćene na iterativne metode rješavanja općih kubnih jednadžbi. Vrhunac tog razvoja postigao je znameniti kineski matematičar **Cin Dziušao** (1202.–1261.), koji je u svom glavnom djelu*Šuš dziudžang* (*Devet knjiga o matematici*, 1247.) opisao rješavanje polinomijalnih jednadžbi proizvoljnog stupnja metodom koju naziva *tjen juan*, a koja je u biti **Hornerov algoritam**.

Cuin Dziušao je u svojih *Devet knjiga o matematici* opisao i opći slučaj **kineskog teorema o ostacima**, no kineski interes za teoriju brojeva bitno je stariji. Najstariju poznata pojava kineskog teorema o ostacima nalazimo kod matematičara **Sun Dzija** (3., 4. ili 5. st.). U svom glavnom djelu *Sundzi suandzing* (*Sun Dzijev matematički priručnik*) nalazimo sljedeći zadatak: „Tu je nepoznati broj stvari. Ako se prebroje po tri, ostatak je 2. Ako se prebroje po pet, ostatak je 3. Ako se prebroje po sedam, ostatak je 2. Nađi broj stvari." Rješenje koje daje Sun Dzi je sljedeće: „Odgovor: 23. Metoda: Ako brojimo po tri i imamo ostatak 2, zapišemo 140. Ako brojimo po pet i ostatak je 3, zapišemo 63. Ako brojimo po sedam i ostatak je 2, zapišemo 30.[7] Zbrojimo i dobijemo 233[8] pa oduzmemo 210 da dobijemo odgovor". Sun Dzi daje i još jedan primjer s kongruencijama modulo 3, 5 i 7, ali s ostacima 1 u sve tri, u iz kojeg postaje jasno da je u zadnjem koraku oduzet najveći mogući višekratnik od 105, odnosno da traži najmanje rješenje modulo $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Vezano za teoriju brojeva spomenimo još i da se u jednom aritmetičkom priručniku iz 5. st. ([7]) pojavljuje tip zadatka koji je bio popularan u raznim kulturama i vremenima, a koji je poznat pod imenom **zadatak** 100 **ptica**. Zadatak glasi: „Ako jedan pijevac košta 5 novčića, jedna kokoš 3, a tri pilića

[6]Kako smo maločas rekli i ilustrirali primjerom, Kinezi su još oko prijelaza era znali numerički, iterativno, rješavati jednadžbe oblika $x^2 = A$ i $x^3 = B$.

[7]Uočimo da je to točno kako i danas radimo: Ako je dan sustav kongruencija $x \equiv a_i (\mod n_i)$, $i = 1, \ldots, n$, gdje su $n_i$-ovi relativno prosti, prvo se za svaku kongruenciju računa $a_i$ pomnožen sa svim $n_j$-ovim osim samog $n_i$.

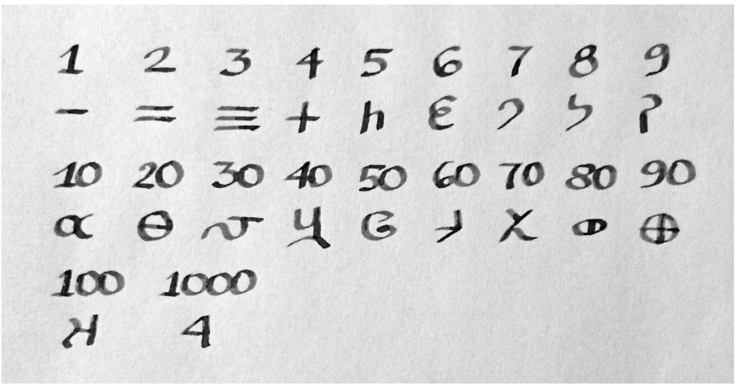
[8]Dakle, računamo $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \prod_{j \neq i} n_i$.

zajeno 1, koliko pijevaca, kokoši i pilića se može kupiti za 100 novčića ako treba kupiti ukupno 100 ptica?". Vidimo da se takvi zadaci iz moderne perspektive gledano sustavi diofantskih jednadžbi. Navedena su tri rješenja: Prvo su 4 pijevca za 20 novčića, 18 kokoši za 54 i 78 pilića za 26 novčića. Drugo su 8 pijevaca za 40, 11 kokoši za 33 i 81 pilić za 27 novčića. Treće je 12 pijevaca za 60, 4 kokoši za 12 te 84 pilića za 28 novčića. Kao poopćenje je navedeno da se treba pribrojiti 4 broju pijevaca, oduzeti 7 od broja kokoši i dodati 3 broju pilića da se dobiju ostali odgovori.

## 5.2 Indijska matematika prije 13. stoljeća

Podsjetimo se glavnih momenata indijske povijesti navedenog razdoblja. U 3. tisućljeću pr. Kr. razvile su se prve gradske civilizacije oko rijeke Ind (Mohenđa Dara, Harappa). U njima je ubrzo razvijen decimalni sustav mjera, a i astronomija je bila prilično razvijena za to doba. Iza 1500. pr. Kr. na to se područje naseljavaju indoarijski doseljenici, a slijedi tzv. razdoblje veda, koje ovisno o datiranju počinje negdje između 1500. i 1200. pr. Kr., a završava između 800. i 500. pr. Kr. U to doba razvile su se prve države, a u sačuvanim tekstovima iz tog doba uočljiva je i specifični indijski interes za imenovanje velikih brojeva. Oko 600. pr. Kr. nastao je sanskrt, jezik brahmana. U to doba zapisana su i pravila za oltare, koja predstavljaju najstarije poznate indijske geometrijske matematičke spise. U razdoblju 600.–500. pr. Kr. nastaju indijske religinje budizam, džainizam i hinduizam. Prodorom Aleksandra Velikog do Inda (327.–325. pr. Kr.) dolazi do prvog značajnijeg kontakta sa zapadnim svijetom, te u sljedećim stoljećima dolazi do značajnijeg helenističkog utjecaja. U razdoblju 320.–544. A. D., pod vlašću dinastije Gupta, postignut je vrhunac stare indijske civilizacije. Tijekom 5.–12. st. vladale su razne dinastije u malim državama, ali je u to doba postignut vrhunac indijske matematike te je u potpunosti oformljen dekadski pozicijski sustav s nulom, kojeg možemo smatrati najvećim indijskim doprinosom matematici. Glavne karakteristike indijske matematike su, slično kineskoj te egipatskoj i babilonskoj matematici, praktična orijentacija, te uglavnom iskustveni rezultati bez dokaza.

Prvo značajnije razdoblje indijske matematike poznato je pod nazivom **doba sulvasutra** (ili sulbasutra), otprilike 8.–5. st. pr. Kr. Sulvasutre, u prijevodu „Pravila konopa", su dodatci vedskim tekstovima, a opisuju mjerenja i konstrukcije vezane za izgradnju hramova i oltara. Većina sulvasutri nose nazive po svojim autorima. S matematičke strane, sulvasutre sadrže rezultate iz elementarne geometrije (računanje površina i volumena, Pitagorin poučak, ...). Primjerice, u Baudhāyana-sulvasutri (ca. 800. pr. Kr.)




Slika 5.5: Brahmanske brojke početkom nove ere.

nalazimo tekst: „Konop rastegnut preko dijagonale kvadrata daje površinu dvostruku površini polaznog kvadrata". Sva pravila u sulvasutrama su dana bez dokaza. Neke konstrukcije su egzaktne, a neke aproksimativne, no nigdje se ne ističe razlika između njih. Ta ravnopravnost (bolje rečeno, nerazlikovanje) racionalnih i iracionalnih brojeva nastavit će se i u kasnijim stoljećima. U sulvasutrama nalazimo i različite procjene površine kruga (najčešće se uzima $\frac{13}{15}$ promjera kao stranica kvadrata iste površine kao krug, što odgovara ne baš dobroj aproksimaciji $\pi \approx 3,00444$).

Doba procvata indijske matematike datira se 5.–12. st. naše ere. U to doba Indijci su dali značajne doprinose matematici, među ostalim se u to doba razvio i najvažniji indijski doprinos matematici, **dekadski pozicijski sustav s nulom**. On se razvio postepeno iz brahmanskih brojki (od ca. 3. st. pr. Kr., slika 5.5). Napomenimo ovdje da iako je od pradavnih vremena brojevni sustav na području Indije bio dekadski, početkom nove ere uz brahmanske brojke u uporabi su bili i alfasilabički sustavi, u kojima slogovi (točnije, suglasnici s dijakritičkim znakovima) predstavljaju znamenke. **Nula** kao broj se u Indiji pojavljuje najkasnije u 7. stoljeću, kako saznajemo iz spisa jednog od najznačajnijih staroindijskih matematičara **Brahmagupte** (ca. 598–670). Brahmagupta nulu definira kao rezultat oduzimanja broja od sebe. Kod njega se može naći i opis pravila za četiri osnovne računske operacije s pozitivnim i negativnim brojevima te nulom.[9] Kao i nula, negativni brojevi su u Indiji vjerojatno bili poznati nekoliko stoljeća ranije, no prvi put se njihova svojstva u računskim operacijama analiziraju kod Brahmagupte. Nula kao znamenka pojavljuje se najkasnije u 9. st., što potvrđuje natpis na

[9] Iznimka u ispravnosti pravila kod Brahmagupte je dijeljenje s nulom: kod njega je $0 : 0 = 0$, a dozvoljava i razlomke oblika $\frac{m}{0}$.

jednom hramu u Gwalioru južno od Delhija, datiran 876. Nulu su Indijci nazvali *sunya*, praznina. U arapskom prijevodu to je postalo *sifr*, što je u latinskom prijevodu postalo *zephirum* ili *cifra*.

Prvi poimence poznat indijski matematičar bio je **Aryabhata I. (Aryabhata stariji)** (ca. 476.–550.). Njegovo glavno (i jedino sačuvano) djelo je *Āryabhaṭīya*, astronomsko djelo pisano u stihovima, koje sadrži tada u Indiji poznate matematičke rezultate (aritmetičke, algebarske te trigonometrijske), bez dokaza. Iz istog doba, možda stotinjak godina stariji, je također astronomski tekst *Surya Siddhanta*. Ta dva djela, *Āryabhaṭīya* i *Surya Siddhanta*, su najstariji poznati tekstovi koji sadrže tablice sinusa (polutetiva, na sanskrtu *jy(v)a*),[10] a ne starogrčkih tetiva. Može se reći da moderna trigonometrija potječe iz Indije. Za razliku od Ptolemeja, Indijci su ne samo uočili da je pogodnije tabeliranje polutetiva od tetiva, nego su koristili i samo samo jednu mjeru duljine za promjer i opseg: Kružnicu su podijelili na 21600 dijelova („minuta") i duljina takvog jednog dijela postala je jedinica duljine i za dužine, a ne samo za lukove kružnice. Drugim riječima, ako razmatramo središnje kutove u kružnici polumjera $r$, onda je opseg $21600' = 2r\pi$, dakle $r\pi = 10800'$. Aryabhata I. kaže: „Dodaj 4 k 100, pomnoži s 8 i svemu dodaj 62000. To što si dobio je približna duljina opsega kruga s promjerom 20000". U suvremenoj notaciji vidimo da je Aryabhata aproksimirao

$$20000' \cdot \pi \approx (100 + 4) \cdot 8' + 62000',$$

odnosno njegov postupak ekvivalentan je aproksimaciji $\pi \approx 3{,}1416$. U *Surya Siddhanta* pak se navodi postupak ekvivalentan s $\pi \approx \sqrt{10}$. Aryabhatinoj aproksimaciji od $\pi$ i navedenoj podjeli opsega na 21600 minuta (zaokruženo) odgovara polumjer $3438'$, koji je postao standard u većini indijskih trigonometerijskih tablica.

Tablica polutetiva u *Surya Siddhanta* je konstruirana koristeći pravilo koje danas zapisujemo

$$r\sin(n\phi) = r\sin((n-1)\phi) + r\sin\phi - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(k\pi)}{\sin\phi}$$

($\phi = 3°45'$, $n = 1, \ldots, 24$), dok je Aryabhata samo naveo razlike između dviju uzastopnih tetiva, $r\sin(n\phi) - r\sin((n-1)\phi)$ [5]. Tijekom sljedećih stoljeća otkrivena su i druga pravila ekvivalentna mnogim važnim trigonometrijskim formulama, a pojavljuju se i kosinus (*kotijya*, $r\cos\alpha$) i *sinus versus* ($r(1 - \cos\alpha)$). U 10. st. se već sinusi i kosinusi gledaju u sva četiri kvadranta.

[10] Zapravo je *jy(v)a* [džj(v)a] izraz za tetivu, ali se tijekom prvog tisućljeća naše ere ustalio kao naziv za polutetivu.

Ipak, indijska trigonometrija nije postala sustavna disciplina, nego se radilo o rješavanju pojedinačnih problema. Prije nego se osvrnemo na ostale indijske doprinose, spomenimo kratko etimologiju današnjeg izraza sinus: Arapi su sanskrtski izraz *jya* (džja) transliterirali u *džiba*. No, kako je dobro poznato, u arapskom pismu bilježe se samo suglasnici. Tako se desilo da je pri prijevodu jednog arapskog djela Robert iz Chestera 1154. tu riječ interpretirao kao *džaib*, značenja prsa, izrez na haljini, izdignuće. Stoga je to preveo latinskom riječju *sinus* (zaobljenost, uvala, prsa).

Već smo spomenuli najvećeg indijskog matematičara 7. st., Brahmaguptu. Uz definiciju broja nula, on je u povijesti matematike zapamćen i po otkriću Brahmaguptinog teorema (u tetivnom četverokutu s okomitim dijagonalama visine iz sjecišta dijagonala na pojedine stranice prepolavljaju njima nasuprotne) i Brahmaguptine formule (poopćenje Heronove formule na tetivne četverokute: $P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$). Kod njega susrećemo i jednu od prvih pojava kvadratne interpolacije (slična metoda se u gotovo isto vrijeme pojavljuje i u kineskog astronoma Liu Džou-a). Brahmagupta je naime opisao pravilo koje odgovara modernoj formuli

$$f(a+xt) = f(a)+\frac{x}{2}\left(f(a+t)-f(a-t)\right)+\frac{x^2}{2}\left(f(a+t)-2f(a)+f(a-t)\right).$$

Uz taj doprinos numeričkoj matematici, treba istaknuti da su Indijci, kao i Kinezi, osmislili iterativne postupke za računanje drugih i trećih korijena. Većina je bila slična već opisanoj starokineskoj metodi temeljenoj na binomnoj formuli: ako je $N = x^2$ (odnosno $N = x^3$) i imamo prvu procjenu $a$ za $x$, onda je $x = a+b$ i $N-a^2 = 2ab+b^2$ (odnosno $N-a^3 = 3a^2b+3ab^2+b^3$), pa se to može slično kao i u starokineskoj metodi iskoristiti za određivanje $b$. No, poznata je i jedna specifična staroindijska metoda za računanje drugog korijena, koja je *de facto* Newtonova metoda primijenjena na aproksimativno rješavanje jednadžbe $x^2 = N$. Tu metodu nalazimo u znamenitom izvoru o indijskoj matematici, **rukopisu Bakhshali**, koji se datira između 300. i 1200., možda čak i ranije. U biti, radi se o korigiranoj babilonsko-Heronovoj metodi, no nije poznato kako su stari Indijci došli do nje. U rukopisu nalazimo njezino pravilo izraženo riječima: ,,U slučaju nekvadratnog broja, oduzmi najbliži kvadratni broj, podijeli ostatak s dvostrukim tim najbližim kvadratom; pola kvadrata od toga se podijeli sa zbrojem približnog korijena i razlomka; to se oduzme i dati će ispravljeni korijen". Ako je $N$ nekvadratni broj kojeg želimo korjenovati i ako s $x_i < N$ označimo trenutnu aproksimaciju, onda trenutno imamo razliku $b_i = N - x_i$ te pravilo kaže da sljedeću aproksimaciju računamo ovako:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{b_i}{2x_i} - \frac{\left(\frac{b_i}{2x_i}\right)^2}{2\left(x_i + \frac{b_i}{2x_i}\right)}.$$

Kako vidimo da se radi o korigiranoj Heronovoj metodi? Da nema oduzetog člana, pravilo bi bilo

$$x_{i+1} = x_i + \frac{b_i}{2x_i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x_i^2 + b_i}{x_i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x_i^2 + N}{x_i} = \frac{1}{2}\left(x_i + \frac{N}{x_i}\right).$$

Izračunajmo drugu aproksimaciju za $\sqrt{2}$ metodom iz rukopisa Bakhshali uz početnu aproksimaciju $x_0 = 1$. Tada je $b_0 = 2 - 1 = 1$ i imamo

$$x_1 = 1 + \frac{1}{1} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2\left(1 + \frac{1}{2}\right)} = 2 - \frac{1}{12} = 1{,}9166666\ldots.$$

Iako bi suvremeni matematičar uzeo točnu vrijednost $x_1 = \frac{23}{12}$ za sljedeći korak, u duhu rukopisa Bakhshali je uzimati po jednu decimalu više nego u prethodnom koraku. Dakle, drugi korak bismo proveli s $x_1 = 1{,}9$. Kako god bilo (čak i s egzaktnim $x_1$), problem je sad da je $x_1^2 > N = 2$, dok je pretpostavka metode da je trenutna aproksimacija uvijek *manja* od točne vrijednosti. Stoga se u takvom slučaju zadnja znamenka odabrane nove aproksimacije smanjuje za 1 sve dok ne dobijemo aproksimaciju čiji kvadrat je manji od $N$. U našem slučaju stoga $x_1 = 1{,}9$ zamjenjujemo s $x_1 = 1{,}4$ pa je $b_1 = 2 - 1{,}4^2 = 0{,}04$. Sad možemo izračunati drugu aproksimaciju:

$$x_2 = 1{,}4 + \frac{0{,}04}{2{,}8} - \frac{\left(\frac{0{,}04}{2{,}8}\right)^2}{2\left(1{,}4 + \frac{0{,}04}{2{,}8}\right)} = 1{,}41421356\ldots.$$

Dok je u prvom koraku greška bila reda veličine $10^{-2}$, sad je već reda veličine $10^{-9}$, odnosno imamo točnost $\sqrt{2}$ na 8 decimala — ova metoda vrlo brzo konvergira.

Indijci su razvili interes i za teoriju brojeva. U sulvasutrama nalazimo pitagorejske trojke $(5, 12, 13)$, $(12, 16, 20)$, $(8, 15, 17)$, $(15, 20, 25)$, $(12, 35, 37)$, $(15, 36, 39)$, $\left(2\frac{1}{2}, 6, 6\frac{1}{2}\right)$, $\left(7\frac{1}{2}, 10, 12\frac{1}{2}\right)$. U klasično doba Indijci su razmatrali razne diofantske jednadžbe, posebice jednadžbu koju danas nazivamo Pellovom. **Pellova jednadžba** $nx^2 + 1 = y^2$ ime nosi po engleskom matematičaru Johnu Pellu, koji ju je opisao u 17. st., no još u 7. st. se njome bavio Brahmagupta, koji je otkrio Brahmaguptin identitet

$$(a^2 + nb^2)(c^2 + nd^2) = (ac \mp nbd)^2 + n(ad \pm bc)^2$$

i koristio ga za zaključivanje o rješenjima Pellovih jednadžbi. Brahmaguptine metode je dalje razvio najveći matematičar klasičnog indijskog razdoblja, **Bhāskara II.** (1114.–1185.). On je otkrio jedan algoritam za računanje rješenja Pellove jednadžbe (tzv. „ciklička metoda”) te je u svom djelu *Siddhānta-śiromaṇi* tako dobio rješenje $(x, y) = (226.153.980, 1.766.319.049)$ jednadžbe $61x^2 + 1 = y^2$. Napisao je dva čisto matematička djela: *Līlāvatī* (smatra se da ga je napisao da utješi kćer oko proročanstva da se nikad neće udati) i *Bijaganita*. Iz njih saznajemo da je Bhaskara II. primjerice znao da jednadžba $x^2 = 9$ ima dva rješenja, detaljno je opisao račun u dekadskom pozicijskom sistemu, poznavao je adicijski teorem za sinus. Iz *Līlāvatī* se vidi i da su mu bila poznata pravila za računanje kombinacija i permutacija. Tu nalazimo zadatke poput „Kako naći broj mogućih rasporeda otvorenih i zatvorenih vrata u zgradi s 8 vrata?” i „Koliko varijacija boga Sambhu-a se dobije raspoređivanjem 10 atributa u njegovih 10 ruku?”, iz čijih rješenja se vidi da je razumio da je broj permutacija od $n$ elemenata jednak $n!$, odnosno varijacija s ponavljanjem dva elementa (uređenih $n$-torki dvočlanog skupa) $2^n$. Općenito, stari Indijci su se najkasnije u 6. st. pr. Kr. bavili i prebrajanjem različitih rasporeda. Tada je Sushruta u jednom tekstu nabrojio moguće okuse koji nastaju iz 6 osnovnih (slatko, kiselo, slano, ljuto, gorko, trpko), a tekst *Brhatsamhita* iz 6. st. A.D. opisuje kako dobiti mirise miješanjem 4 od 16 sastojaka u različitim omjerima, te se navodi 1820 mogućnosti odabira 4 od 16 sastojaka, što zasigurno nije dobiveno direktnim prebrojavanjem. Stoga možemo reći da u staroindijskoj matematici nalazimo temelje **kombinatorike**.

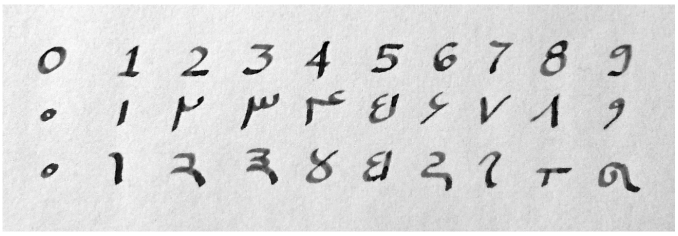
Naposlijetku istaknimo da su za indijsku matematiku karakteristični i razvoji računskih postupaka (*ganita* — znanost o računanju). Tako su Indijci tijekom 1. tisućljeća A.D. razvili efikasne algoritme za računanje u dekadskom pozicijskom sustavu s nulom. Čini se da je najstariji spis koji ih opisuje već spomenuti rukopis Bakhshali, a u svakom slučaju se opis pravila računanja s prirodnim brojevima i razlomcima može naći kod **Mahāvīre** (9. st.), autora prvog indijskog samo matematici posvećenog teksta. No, prvi koji je potpuno korektno opisao ta pravila bio je Bhaskara II. (kod njega dijeljenje s nulom kao rezultat daje beskonačno).

# Poglavlje 6

# Matematika u Arapskom kalifatu

Iz opće kulture dobro je poznato da je u 7. stoljeću Muhamed utemeljio islam. Muslimansko računanje godina započinje s Muhamedovim odlaskom iz Meke u Medinu 622. godine. Nakon Muhamedove smrti (632.), njegovi nasljednici (kalifi) započeli su osvajanja. Do kraja 7. st. osvojili su područje Mezopotamije i Perzije te Egipta, a početkom 8. st. i velik dio Iberskog poluotoka i mnoga druga područja. Matematiku tih područja u razdoblju 8.–15. st. obično nazivamo arapskom jer je službeni jezik bio arapski, no sami matematičari su bili različitih nacionalnosti (i vjera). Arapski matematičari su uspjeli objediniti grčku deduktivnu matematičku tradiciju s praktičnije orijentiranom indijskom matematikom. Uz to su Arapi zaslužni za transfer grčke znanstvene tradicije u Europu (kako smo rekli, Rimljani nisu imali interesa za znanost te je zbog toga do velikog dijela saznanja o antičkoj grčkoj znanosti u Europu došao ne preko Rimljana, već kasnije kroz konakt s Arapima). Uz to su Arapi zaslužni i za transfer indijskog dekadskog pozicijskog sustava u zapadni svijet.

Kalifi su slali svoje izaslanike da na osvojenim područjima sustavno skupe znanstvena i filozofska djela grčke antike, a ta su djela isto tako sustavno (i kvalitetno, od strane znanstvenika) prevođena na arapski jezik. Prvi poticatelj znanosti i prevođenja grčkih znanstvenih tekstova na arapski jezik bio je kalif abasidske dinastije **Harun al-Rašid**, koji je vladao 768.–809. S njime je započelo tzv. zlatno doba islama. U Bagdadu je njegov sin, kalif **al-Ma'mun** (vladao 813.–833.) utemeljio **Kuću mudrosti** (*Bayt al-Ḥikṃa*), koja je poput ranije *museiona* bila znanstveni centar koji je uključivao akademiju i knjižnicu. Kuća mudrosti je ostala glavni znanstveni centar arapskog svijeta sve do pada Bagdada pri provali Mongola (1258.). I nakon Haruna al-Rašida i al'Mamuna kalifi su nastavili poticati prevođenje znanstvenih djela,



Slika 6.1: Usporedba ranih arapskih znamenki (drugi red) i nagari-znamenki u otprilike isto doba (treći red).

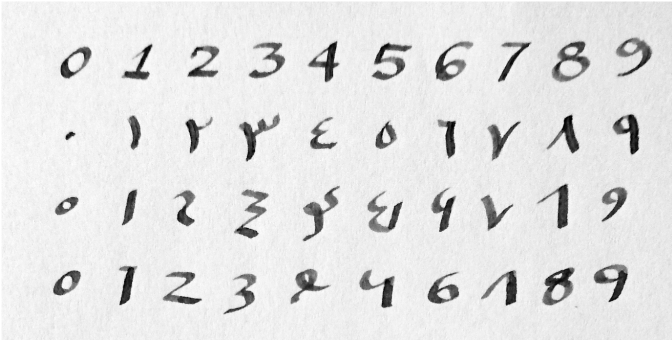
a samo prevođenje se smatralo dijelom istraživanja i doprinosa znanstvenom napretku. Tako su do 10. st. na arapski jezik prevedeni *Elementi* i još neka Euklidova djela, zatim Arhimedovi *O sferi i valjku* i *O mjerenju kruga*, gotovo sva Apolonijeva djela, Diofantova *Aritmetika*, Menelajeva *Sphaerica*, Ptolemejev *Almagest*, ... Na temelju tih prijevoda su počevši od 9. st. arapski znanstvenici počeli stvarati vlastite, nove, matematičke doprinose. Prije nego više kažemo o njima, osvrnimo se prvo na to zašto suvremene brojke koje svakodnevno koristimo često zovemo arapskim brojkama.

Sve do 10. st. u arapskom su se kalifatu paralelno koristila tri tipa aritmetike:

- Račun na prste: brojevi su se pisali riječima ili pak koristeći arapske alfabetske brojke (abdžad). Ovaj način računa ponajviše su koristili trgovci i računovođe.

- Seksagesimalni brojevni sustav, pri čemu su, analogno kao npr. kod Ptolemeja, brojevi zapisivani koristeći abdžad. Ovaj sustav se primarno koristio u astronimiji.

- Najkasnije početkom 9. st. Arapi su iz Indije preuzeli ideju dekadskog pozicijskog sustava s nulom, no dosta dugo bez standardnog skupa simbola, tako da se u raznim krajevima koristilo donekle različite oblike znamenki. Usporedbu rane verzije arapskih znamenaka iz 11. st. i Nagari znamenaka sa zapisa iz Gwaliora (9. st.) možete vidjeti na slici 6.1. Ispočetka su dekadski brojevni sustav Arapi koristili na prašnjavim pločama koje su omogućavale isto što i danas ploča i kreda, a u 10. st. je al-Uqlidisi pokazao kako dekadske brojke i račun s njima prilagoditi za pero i papir. S vremenom su se standardizirala dva skupa dekadskih arapskih znamenki: istočna i zapadna inačica. Istočna se inačica (2. red na slici 6.2) koristi i danas u bliskoistočnim arapskim zemljama i zovu je indijskim brojkama (*huruf hindayyah*). Jedna zapadna inačica,




Slika 6.2: Suvremene znamenke dekadskog pozicijskog sustava te njihova istočnoarapska inačica (u drugom redu), zapadnoarapske *g̣obār*-znamenke iz 10. st. te europske znamenke iz 13. st.

*g̣obār* (pješćane brojke), iz 10. st. prikazana je u 3. redu slike 6.2, a u zadnjem redu na toj slici su znamenke kakve su korištene u zapadnoj Europi u 13. st. Čitatelje koje zanima više o razvoju indoarapskih brojki upućujemo na ovaj izvor.

Prvi veliki arapski matematičar bio je **Al-Hvārizmī** (ca. 780.–850.). Djelovao je u Kući mudrosti u doba al-Ma'muna, a ne bez razloga zovu ga „ocem algebre". Za sobom je ostavio više značajnih djela iz astronomije i geografije te dva djela iz matematike: *Kitāb al-džam wa'l-tafrīk bi-hisāb al-Hind* („Aritmetika"), o računanju u indijskom dekadskom pozicijskom sustavu, te *Al-kitāb al-mukhtasar fī hisāb al-džabr wa'l-mukābalah* („Algebra"), kojim je utemeljio algebru. Oba djela su napisana oko 825. godine.

Al-Hvārizmījeva „Aritmetika" je najstariji arapski opis indijskog dekadskog pozicijskog sustava s nulom. Arapski original je izgubljen, a najstarija sačuvana arapska djela na istu temu su stotinjak godina mlađa. No, Al-Hvārizmījeva „Aritmetika" je od 12. st. nadalje prevođena na latinski. Nijedan direktni prijevod nije sačuvan, no poznata su četiri teksta iz 12. i 13. st. koji su barem dijelom prijevodi originala: *Dixit Algorizmi* (dva rukopisa), *Liber Ysagogarum Alchorismi*, *Liber Alchorismi* te *Liber Pulueris.* Ti su tekstovi kasnije često prepisivani, nadopunjavani i komentirani te objavljivani pod sličnim nazivima te u zapadnoj Europi naziv za praktično računanje u dekadskom pozicijskom sustavu u razdoblju 13.–15. st. najčešće bio *algorism.* Kao što vidimo, latinizirana verzija Al-Hvārizmījevog imena dala je modernu riječ algoritam.

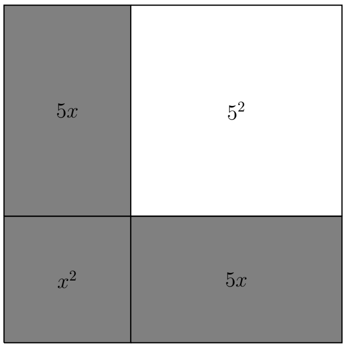
No, Al-Hvārizmī je još poznatiji i važniji po tome što s njegovim djelom *Al-kitāb al-mukhtasar fī hisāb al-džabr wa'l-mukābalah* započinje razvoj prave algebre. To je djelo bilo toliko utjecajno da je iz dijela njegova naziva (al-džabr) cijela matematička disciplina dobila ime algebra. Al-Hvārizmī svoju „Algebru" započinje predgovorom, u kom navodi da ju je napisao da bi se stanovništvo znalo nositi sa svakodnevnim matematičkim problemima vezanim za nasljeđivanje, trgovinu, podjele imovine ... Zatim opisuje prirodne brojeve i indoarapski dekadski pozicijski sustav. Slijedi opis, prvi u povijesti, jednadžbi kao takvih. Al-Hvārizmī jednadžbe smatra sastavljenim od konstanti („jednostavnih brojeva"), stvari (*šaj*,[1] naš $x$, tj. nepoznanica) te bogatog (*mal*, naš $x^2$, tj. kvadrat nepoznanice). Za razliku od Grka, jedinica (*dirham*) je kod njega broj. Prije nego ukratko opišemo njegov Al-Hvārizmījev pristup, potrebno je istaknuti da on još nije imao modernu (ni ikakvu) algebarsku simboliku, nego je jednadžbe i njihovo rješavanje opisao riječima.

Dok bismo mi danas jednadžbe kakve je opisao Al-Hvārizmī dijelili na linearne i kvadratne, to kod Al-Hvārizmīja nije bio slučaj. On je jednadžbe podijelio na šest tipova koje bismo danas zapisali ovako: $a\,x^2 = b|, x$, $a\,x^2 = c$, $b\,x = c$, $a\,x^2 + b\,x = c$, $a\,x^2 + c = b\,x$, $a\,x^2 = b\,x + c$. Razlog takvoj klasifikaciji bio je to što Al-Hvārizmī još nije razmatrao rješenja jednadžbi koja ne bi bila pozitivna, jer ih je interpretirao geometrijski kao duljine, po čemu je jasno vidljiv starogrčki utjecaj na Al-Hvārizmīja. Također Al-Hvārizmī zahtijeva i da koeficijenti u jednadžbama u njihovom „sređenom" obliku moraju biti pozitivni. Za prva tri tipa jednadžbi samo je dao kratke primjere za koje je očito da je od čitatelja očekivao da sam shvati postupak. Zanimljivija su preostala tri tipa jednadžbi. Za njih rješavanje također opisuje na primjerima, ali vrlo detaljnim. Postupci rješavanja su dani čisto računski, no opravdao ih je (opet je vidljiv grčki utjecaj) geometrijski.

**Primjer 21** *Kao prototip jednadžbe tipa* $a\,x^2 + b\,x = c$ *Al-Hvārizmī navodi „Kvadrat i deset korijena čine* 39 *jedinica", tj.* $x^2 + 10x = 39$*. Postupak za rješavanje je sljedeći:*

1. *Uzmi pola broja korijena i dobiješ* 5 *(dakle, računa* $\frac{b}{2}$*).*
2. *To kvadriraš i dobiješ* 25 *(dakle, računa* $\frac{b^2}{4}$*).*
3. *Pribroji to broju jedinica i dobiješ* $39 + 25 = 64$ *(dakle, računa* $c + \frac{b^2}{4}$*).*
4. *Korjenuješ dobiveno, dobiješ* 8 *(dakle, računa* $\sqrt{c + \frac{b^2}{4}}$*).*
5. *Od toga oduzmi pola broja korijena i dobiješ* $8 - 5 = 3$*. To je korijen (dakle, rješenje je* $\sqrt{c + \frac{b^2}{4}} - \frac{b}{2}$*).*

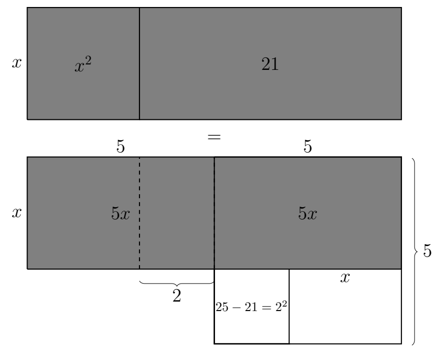
[1] U srednjevjekovnim latinskim prijevodima to će postati *res*, alternativno *radix* (korijen).




Slika 6.3: Al-Hvārizmījevo opravdanje postupka rješavanja jednadžbe $x^2 + 10x = 39$.

**Primjer 22** *Kao prototip jednadžbe tipa* $a\,x^2 + c = b\,x$*, Al-Hvārizmī daje „Kvadrat i 21 jedinica čine 10 korijena", tj.* $x^2 + 21 = 10x$*. Postupak rješavanja opisan je na sličan način kao u prethodnom primjeru, ekvivalentno modernoj formuli* $\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$*. No, ovdje na kraju naglašava mogućnost da se umjesto oduzimanja od pola broja korijena,* $\sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$ *može i pribrojiti polovici broja korijena* ($\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$) *te zaključuje: „Kad naiđeš na zadatak koji vodi na ovaj slučaj, pokušaj ga riješiti zbrajanjem, a ako to ne uspije, uspjet će s oduzimanjem. U ovom slučaju funkcionira i zbrajanje i oduzimanje, za razliku od ostala tri slučaja u kojima se treba prepoloviti broj korijena. Znaj i da u zadatku koji vodi na ovaj slučaj pomnožiš pola broja korijena sa sobom, ako je umnožak manji od broja dirhama pribrojenih kvadratu, slučaj je nemoguć. Ako je pak jednak broju dirhama, onda je korijen jednak polovici broja korijena."*

Iz prethodnog primjera vidimo još jednu važnu stvar: Al-Hvārizmī je prva osoba u povijesti koja je uočila da kvadratne jednadžbe mogu imati dva rješenja. No, to je uočio samo za jednadžbe tipa $a\,x^2 + c = b\,x$, jer kod ostalih tipova kvadratnih jednadžbi nikad nemamo dva pozitivna rješenja. Naposlijetku je na sličan način opisao i rješavanje jednadžbi tipa $a\,x^2 = b\,x + c$ koristeći primjer $x^2 = 3x + 4$. Slijedi geometrijsko opravdanje sva tri postupka. Za $x^2 + 10x = 39$ se poziva na EEII4 (vidi sliku 6.3), za $x^2 + 21 = 10x$ se poziva na EEII5 (vidi sliku 6.4), a i posljednji tip slično opravdava, rastavljajući kvadrat površine $x^2$ na prikladne dijelove (izostavljamo pripadnu sliku). Nakon opravdanja svojih postupaka, Al-Hvārizmī je sažeo postupke, njihove sličnosti i razlike, a istaknuo je i važnost da se u prvom koraku normira koeficijent uz kvadrat nepoznanice (tj. podijeli jednadžba s $a$, on to




Slika 6.4: Al-Hvārizmījevo opravdanje postupka rješavanja jednadžbe $x^2 + 21 = 10x$.

naziva svođenjem na „jedan kvadrat") da bi opisani postupci bili korektni.

U nastavku svoje „Algebre", Al-Hvārizmī je opisao množenje binoma s binomima i monomima te množenje i dijeljenje algebarskih izraza koji sadrže korijene. Slijedi 18 primjera kojima ilustrira da se sve kvadratne i linearne jednadžbe mogu svesti na jedan od opisanih šest tipova. To se provodi osnovnim dvjema tehnikama: *al-džabr* (nadopunjavanje, mi bismo rekli: prebacivanje negativnih članova na drugu stranu jednakosti) i *al-mukabalah* (izjednačavanje, mi bismo rekli: oduzimanje pozitivnog člana jedne strane jednadžbe od člana s istom potencijom nepoznanice na drugoj strani). Ilustrirajmo te tehnike koristeći modernu notaciju, ali izvorni Al-Hvārizmījev primjer.

**Primjer 23** *Dana je jednadžba* $(10-x)^2+x^2 = 58$. *Prvo se kvadrira binom koristeći ranije opisane tehnike:* $100+x^2-20x+x^2 = 58$. *Operacija al-džabr daje* $100 + 2x^2 = 58 + 20x$. *To se svodi na „jedan kvadrat" dijeljenjem s* 2*:* $50 + x^2 = 29 + 10x$. *Naposlijetku, al-mukabalah svodi jednadžbu na peti tip:* $21 + x^2 = 10x$.

Knjiga završava primjerima „za utvrđivanje gradiva" (neki uključuju izraze s razlomljenim članovima i nepoznanicom u nazivniku) te dodatkom u kojem obrađuje razne primjene matematike (nasljeđivanje, građevina, ...).

Prvi značajniji algebraičar nastavljač Al-Hvārizmījeva djela bio je **Abū Kāmil Šujā** (ca. 850.–930.). O njegovom se životu ne zna ništa osim približnih godina rođenja i smrti te da je vjerojatno potjecao iz Egipta. Bavio se algebrom, teorijom brojeva i geometrijom. Njegova „Knjiga o algebri" postala je jedna od osnova za Fibonaccijeva djela te je stoga Abū Kāmil bitan za širenje algebre u Europi. Abū Kāmil je znao računati i s potencijama nepoznanica većim od kvadrata: Iako i on svu svoju algebru izlaže riječima, iz njegovih formulacija poput „mal mal šaj” za petu potenciju nepoznanice vidljivo je da je počeo razumijevati identitet $x^m x^n = x^{m+n}$. Smatra ga se i jednim od prethodnika matematičke indukcije jer je u svojoj knjizi o algebri „dokazao” identitet kojeg bismo danas zapisali kao

$$(2n+1) \cdot \sum_{i=1}^{n} i = 3 \sum_{i=1}^{n} i^2.$$

Pritom on kreće od slučaja $n = 1$, njega koristi da dokaže slučaj $n = 2$, njega dalje koristi da dokaže slučaj $n = 3$ i tako do $n = 10$. Tu doduše staje, ali jasno kaže da se može tako dalje nastaviti. Bio je prvi arapski matematičar koji je znao rješavati neke diofantske jednadžbe, a u njegovoj „Knjizi ptica”, koja se bavi linearnim diofantskim sustavima jednadžbi, nalazimo i varijantu zadatka 100 ptica.

**Ṯābit ibn Kurra** (836.–901.) je djelovao u Kući mudrosti i osim matematikom se bavio i medicinom, filozofijom i astronomijom. Dao je novi dokaz Pitagorinog poučka, opisao je magične kvadrate, a najpoznatiji je po svojim rezultatima iz teorije brojeva. Iz fascinacije savršenim brojevima proizašao je njegovi interes za **prijateljske brojeve**, tj. parove prirodnih brojeva koji su svaki zbroj pravih djelitelja drugog. Prvi put se spominju, konkretno najmanji takav par 220 i 284, kod postklasičnog helenističkog filozofa Jambliha (3./4. st. A.D.), koji ih pripisuje pitagorejcima (vjerojatnije je ipak da su se prvi put razmatrali tek u doba helenizma). Tābit njihovo otkriće pripisuje Pitagori, spominje da su se njima bavili Euklid i Nikomah iz Geraze, te dokazuje znameniti Tābitov teorem o prijateljskim brojevima: Ako su za neki prirodan broj $n > 1$ brojevi $p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $q = 3 \cdot 2^n - 1$ i $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ prosti, onda su brojevi $2^n\, p\, q$ i $2^n\, r$ prijateljski. Za $n = 2$ se dobije par 220 i 284, a za $n = 4$ je navodno upravo Ṯābit dobio par 17296 i 18416, kojeg je u 17. st. iznova otkrio de Fermat. Osim ta dva para do danas je poznat samo još jedan slučaj koji se dobije iz Tābitovog teorema i to za $n = 7$. Taj par je otkrio Descartes. Ukupno je poznato više od 7500 parova prijateljskih brojeva i ne zna se ima li ih beskonačno mnogo. Brojevi oblika $3 \cdot 2^n - 1 = (1011\dots1)_2$ danas se zovu Tābitovim brojevima.

Još znamenitiji bio je Abū Kāmilov i Tābitov suvremenik **al-Battānī** (poznat i pod latiniziranim imenog **Albategnius**, ca. 850.–929.), rođen blizu današnje Urfe u Turskoj, jedan od najvećih bliskoistočnih astronoma ne samo tog doba, zvan „arapskim Ptolemejom”. Njegovo glavno djelo, *Kitāb al-zīj* („Knjiga o astronomskim tablicama”), je početkom 12. st. prevedeno na latinski i bitno je utjecao na renesansne europske astronome uključivo Brahea, Keplera,, Galilea i Kopernika, a sadrži i mnoge matematičke rezultate. Od astronomskih rezultata ovdje ističemo da je katalogizirao 489 zvijezda, izračunao trajanje godina na 365 dana 5 h 46 min 24 s (što odstupa samo 2 min 22 s od točne vrijednosti), precesiju ekvinocija i nagib ekliptike. Al-Battānī pritom sustavno koristi trigonometrijske tehnike te je bitno unaprijedio trigonometriju. Izveo je razna trigonometrijska pravila („formule") za pravokutne trokute, primjerice[2] $b \sin \alpha = a \sin(90^\circ - \alpha)$, $b \sin \alpha = a \sin(90^\circ - \alpha)$. Koristio je i vlastitim metodama tabelirao vrijednosti svih šest standardnih trigonometrijskih omjera: sinus, kosinus, tangens, te njihove recipročne vrijednosti kosekans, sekans i kotangens.

U 10. st. je djelovao perzijski astronom i matematičar **Abū al-Wafā Būzdžānī** (940.–998.). Komentirao je djela svojih arapskih i grčkih prethodnika, novom metodom je izradio vrlo precizne trigonometrijske tablice (nisu sačuvane, ali čini se da je on prvi trigonometrijske omjere gledao u kružnici polumjera 1), a za povijest matematike zanimljiv je i po dvije knjige. Prva je „Knjiga o aritmetici potrebnoj pisarima i trgovcima", pisana koristeći princip računananja na prste jer je taj još uvijek bio u uporabi u trgovini u Arapa, a koja je, čini se, jedino arapsko srednjevjekovno matematičko djelo u kojem se pojavljuju negativni brojevi. Druga je „Knjiga o geometrijskim konstrukcijama potrebnim obrtniku", u kojoj nalazimo opise raznih geometrijskih konstrukcija: okomica, parabola, pravilnih mnogokuta (do 10 stranica) opisanih i upisanih kružnicama ili drugim mnogokutima, približne trisekcije kutova, konstrukcije s fiksiranim šestarom, rastave raznih likova na manje, ... Poznat je i njegov izračun udaljenosti Bagdada do Meke, koristeći sfernu geometriju i trigonometriju.

Abū al-Wafā-in suvremenik, a kao i on djelovao u Bagdadu, bio je znameniti perzijski matematičar i inžinjer **al-Karadžī** (953.–ca. 1029.), prema većini izvora prva osoba koja je algebru potpuno oslobodila geometrije. Al-Karadžī je u svom djelu *Al-Fakhri* definirao monome (osim $x^0$, ali uključivo negativnih eksponenata, preciznije, $x^n$ za eksponente $n = \pm 1, \ldots, \pm 6$) i jasno izrekao pravilo kako ih množiti ($x^m x^n = x^{m+n}$, osim za eksponente 0), zatim je razmatrao „složene veličine" (polinome) i opisao kako ih zbrajati, oduzimati i množiti (te dijeliti s monomom). U nekim argumentima je koristio rani oblik matematičke indukcije, slično kao ranije Abū Kāmil, s tim da kod al-Karadžīja susrećemo i indukciju unatrag (od $n = 10$ do $n = 1$), kojom je primjerice dokazao identitet

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left( \sum_{i=1}^{n} i \right)^2 .$$

Opisao je i binomni teorem i njegovu vezu s Pascalovim trokutom (do eks-

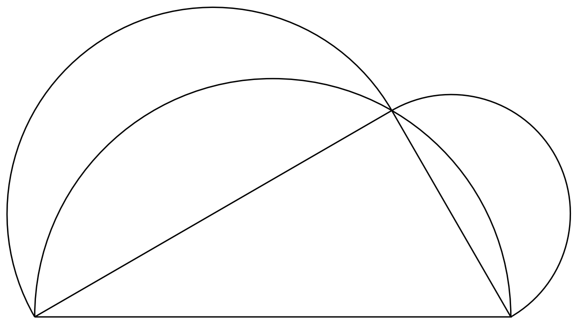
[2]Arapski matematičari i astronomi su od Indijaca preuzeli ideju polutetiva, tj. sinusa.

ponenta 5).[3] Bavio se i diofantskim jednadžbama te geometrijom.

**Al-Hayṭam** (poznat i pod latiniziranim imenom **Alhazen**, oko 965.–1040.) je jedan od najznamenitijih znanstvenika zlatnog doba islama. Dao je bitne doprinose matematici, optici, astronomiji, anatomiji, medicini, oftalmologiji, fizici, inženjerstvu općenito, filozofiji, psihologiji i dr. U srednjevjekovnoj Europi bio je poznati i kao Ptolomaeus Secundus (drugi Ptolemej), a danas se smatra ocem moderne optike. Proveo je mnoge optičke eksperimente i prvi pokazao da vid u oku nastaje uslijed loma zraka svijetla, da je Mjesečevo svjetlo posljedica refleksije, ... U matematici je znamenit **Alhazenov problem geometrijske optike**: Za dvije točke $A$ i $B$ u ravnini i zrcalnu kružnicu $k$ traže se točke $T$ na $k$ takve da se u njima zraka svjetla koja izlazi iz $A$ lomi točno prema $B$. Alhazen je riješio taj problem koristeći Apolonijevu teoriju konika, no to je rješenje vrlo komplicirano. U 17. st. je Huygens našao jednostavnije rješenje. Poznata je i Al-Hayṭamova generalizacija prvog tipa Hipokratovih mjeseca: Ako bilo kojem pravokutnom trokutu opišemo kružnicu te nacrtamo kružnice kojima su promjeri katete tog trokuta, onda je zbroj površina tako nastalih dvaju mjeseca jednak površini polaznog pravokutnog trokuta (slika 6.5). Al-Hayṭam je također pokušao svođenjem na kontradikciju dokazati i Euklidov postulat o paralelama, što je jedan od prvih pokušaja tom metodom i još ćemo ga spominjati (vidi str. 185). Bavio se i savršenim brojevima i navodno da je prije Eulera on bio prvi koji je dokazao teorem o parnim savršenim brojevima. Objasnio je i koristio **Wilsonov teorem** (broj $p > 1$ je prost ako i samo ako je $1+(p-1)!$ djeljivo s $p$), kojeg je otkrio još indijski matematičar Bhaskara I. u 7. st., a ime je dobio po engleskom matematičaru Johnu Wilsonu (1741.–1793.) koji ga je iskazao. Prvi poznati dokaz tog teorema dao je Joseph-Louis Lagrange 1773.

Pregled arapskih doprinosa matematici ne može biti potpun bez da se spomene **Omar Khayyam** (Umar al-Hayyām, 1048.–1131.), perzijski matematičar, astronom, filozof i pjesnik koji je djelovao u doba seldžučkih osvajanja i prvog križarskog rata. Bavio se Euklidovim petim postulatom. Pritom je uočio grešku prethodnika (da su kao pretpostavku, tj. postulat, uzimali nešto što nije lakše dokazati od izvornog postulata) i umjesto pokušaja dokaza iz ostalih postulata i aksioma, krenuo je od pretpostavke da je Euklid svoje *Elemente* postavio nepotpuno i temeljeno na Aristotelovim pretpostavkama o pravcima i kutovima. Pokušao je EEI29 (prvu propoziciju u *Elementima* za dokaz koje treba postulat o paralelama) zamijeniti s nekoliko pretpostavki i propozicija kojima bi se izbjeglo korištenje postulata o paralelama, no pritom je kao pretpostavku („postulat") uzeo ekvivalentno svojstvo

[3] U isto doba Pascalov trokut je bio poznat i u Kini.



Slika 6.5: Alhazenova generalizacija prvog tipa Hipokratovih mjeseca.

da su paralelni pravci posvuda jednako udaljeni.

Khayyam je koristio metodu sličnu starijim indijskim metodama za računanje $n$-tih korijena i poznavao je Pascalov trokut binomnih koeficijenata (kojeg je, kako smo rekli, prije njega opisao al-Karadžī).

Ipak, u matematici je najveći trag Khayyam je ostavio svojim djelom *Risālah fil-barāhin 'alā masā'il al-ğabr wa'l-Muqābalah*, poznato kratko kao „Algebra". U njemu je proširio Al-Hwārizmījevu klasifikaciju i na **kubne jednadžbe**. Tvrdio je da se njihova rješenja općenito ne mogu dobiti ravnalom i šestarom, što je dokazano tek u 19. st. Prvi je primijetio da postoje kubne jednadžbe s više od jednog rješenja, ali je uspio naći samo jedan primjer s dva rješenja. Kao i Al-Hwārizmī, koristeći operacije al-džabr i al-mukabalah svodio je sve kubne jednadžbe na kanonske forme u kojima su svi koeficijenti pozitivni (te vodeći koeficijent normiran, a zanemaruje one koje ne mogu imati pozitivnih rješenja). Tako je dobio ukupno 19 tipova jednadžbi, od kojih su njih 5 bez konstantnog člana pa se supstitucijom svode na kvadratne. Stoga se obično navodi samo 14 Khayyamovih tipova kubnih jednadžbi:

1. $x^3 = c$;
2. $x^3 + bx = c$;
3. $x^3 + c = bx$;
4. $x^3 = bx + c$;
5. $x^3 + ax^2 = c$;
6. $x^3 + c = ax^2$;

7. $x^3 = ax^2 + c$;

8. $x^3 + ax^2 + bx = c$;

9. $x^3 + ax^2 + c = bx$;

10. $x^3 + bx + c = ax^2$;

11. $x^3 = ax^2 + bx + c$;

12. $x^3 + ax^2 = bx + c$;

13. $x^3 + bx = ax^2 + c$;

14. $x^3 + c = ax^2 + cx$.

Prvi tip se može riješiti egzaktno ili numerički (korjenovanjem), a za ostale tipove Khayyam je opisao rješavanje pomoću konika. Mi ćemo dati samo jedan primjer njegovog pristupa.

**Primjer 24** *Riješimo jednadžbu*

$$x^3 + bx = c$$

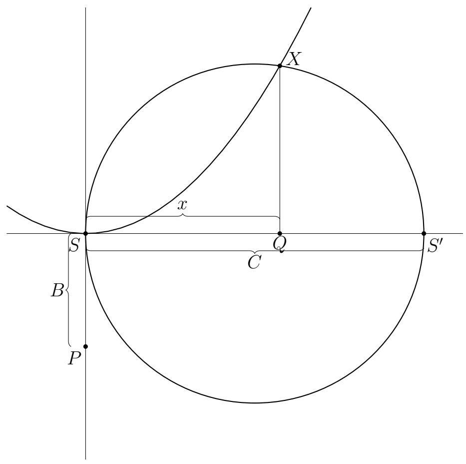
*na Khayyamov način. Prvo, koeficijenti $b$ i $c$ moraju poštivati princip homogenosti ($x^3$ je volumen kocke brida $x$, pa se može zbrajati i izjednačavati samo s drugim volumenima). Stoga je $b = B^2$, a iz toga slijedi da se $c$ može zapisati u obliku $c = B^2C$, gdje su $B$ i $C$ neke duljine. Dakle, Khayyam zapravo razmatra jednadžbu*

$$x^3 + B^2x = B^2C.$$

*Uzmimo kružnicu promjera $C$ i parabolu s tjemenom $S$ na toj kružnici (slika 6.6). Pritom je os parabole tangenta na kružnicu, a razmak fokusa i ravnalice jednak je $\frac{B}{2}$. Neka je $X$ sjecište kružnice i parabole, $Q$ projekcija $X$ na promjer kružnice $\overline{SS'}$ te $P$ točka na osi parabole sa svojstvom $|SP| = B$. Budući da $X$ leži na paraboli, vrijedi $|SQ|^2 = |SP| \cdot |XQ|$, tj. $|SQ| : |XQ| = B : |SQ|$. No, $X$ je i na kružnici pa je $\triangle SS'X$ pravokutan. Slijedi da je $\triangle SQX \sim \triangle XQS'$, pa vrijedi $|SQ| : |XQ| = |XQ| : |QS'|$. Stoga je*

$$B : |SQ| = \frac{|SQ|^2}{B} : (C - |SQ|),$$

*dakle je $x = |SQ|$ rješenje jednadžbe $x^3 + B^2x = B^2C$.*




Slika 6.6: Khayyamovo rješenje kubne jednadžbe tipa $x^3 + B^2x = B^2C$.

Dok je u 12. st. većina znanosti muslimanskog svijeta bila koncentrirana u zapadnom dijelu kalifata (Maroko, Iberski poluotok), u 13. st. mongolska osvajanja će s jedne strane dokrajčiti stoljetnu tradiciju Bagdada, dovest će i do novog centra u Samarkandu. **Nasīr ad-Dīn al-Tūsī** (1201.–1274.) je živio u sjevernom Iranu u doba mongolskih osvajanja. Nakon što je Hulegu-Han osvojio tvrđavu Alamut (u kojoj se dotad al-Tusi nalazio), al-Tūsī je ostao u njegovoj službi kao znanstveni savjetnik. Osnovao je opservatorij u Azerbejdžanu (Maragha), a sudjelovao je i u osvajanju Bagdada. Napisao je važna djela o logici, etici, filozofiji, matematici i astronomiji te mnoge komentare grčkih tekstova. Kao i neki drugi arapski matematičari prije njega, koristio je metode za približno računanje 2. i 3. korijena slične indijskim i kineskim. U komentaru Ptolemejeva *Almagesta* (1247.) uveo je razne trigonometrijske tehnike za izračunavanje tablica sinusa. Najvažniji doprinos mu je odvajanje **trigonometrije** kao zasebne matematičke discipline, tj. al-Tūsī je prvi znanstvenik koji ju nije gledao isključivo u službi astronomije. U svom *Traktatu o četverokutu* je dao prvi potpun prikaz ravninske i sferne trigonometrije (1260.).

**Al-Kāšī** (oko 1380.–1429.) je bio posljednji značajni matematičar arapskog srednjevjekovnog svijeta. Nakon siromašne mladosti dospio je u Samarkand, gdje je postojao znanstveni centar i opservatorij kojeg je osnovao Timurov unuk **Ulug Beg** (1394.–1449.). Doba Ulug Bega je poznato kao znanstveni vrhunac mongolskog doba. Tu je al-Kāšī postao predstojnik opservatorija i glavni tamošnji astronom i matematičar. Glavno djelo mu je *Ključ aritmetike*, koje sadrži binomnu formulu, računanje $n$-tih korijena, numeričko rješavanje jednadžbi iterativnim postupcima, konstrukcije kupola,

. . . . U jednoj raspravi posvećenoj Ulug Begu bavio se indijskim brojevnim sustavom i računanjem u njemu (čak i s iracionalnostima), a tu je i kasnija Newtonova metoda i teorija **decimalnih razlomaka** i računa s njima (u zapadnu Europu će decimalne razlomke uvesti tek Stevin 135 godina kasnije). Osmislio je originalni iterativni numerički postupak za izračunavanje trigonometrijskih tablica. Tako je (znamenku po znamenku iz kubne jednadžbe) odredio $\sin 1^\circ$ na 9 seksagezimalnih, tj. 18 decimalnih mjesta. Dvije zanimljivosti za kraj: U Francuskoj se poučak o kosinusima i dan danas naziva al-Kāšījevim teoremom, a $2\pi$ je al-Kāšī izračunao na 16 decimala ($n = 3 \cdot 2^{28}$ (tek 200 godina kasnije će van Ceulen dobiti bolju točnost).

# Poglavlje 7

# Srednjevjekovna europska matematika

U 4. st. u Europu su prodrli Huni i Germani, a 375. je podijeljeno Rimsko carstvo. Zapadno rimsko carstvo propalo je 476. i obično se ta godina uzima kao početak europskog srednjeg vijeka. Godine 529. bizantski car Justinijan I. je boreći se protiv pogana zatvorio atensku neoplatonsku Akademiju i time prekinuo tisućljetni razvoj grčke matematike. Postklasični helenistički filozof i matematičar Nikomah iz Geraze (1./2. st.) je napisao uvod u (teorijsku) aritmetiku pitagorejskog stila, na čijem temelju je filozof i političar **Anicius Manlius Severinus Boethius** (ca. 480.–525.) napisao *De institutione arithmetica*. Ta je knjiga usprkos niskog matematičkog nivoa bila najutjecajniji matematički tekst tijekom srednjeg vijeka, a korištena je u crkvenim školama sve do 17. st. Boethius je također u pitagorejskoj tradiciji uveo naziv ***quadrivium*** za „matematičke predmete" aritmetiku, geometriju, astronomiju i glazbu, koji su se tijekom srednjeg vijeka predavali u školama uz *trivium* (gramatika, retorika, dijalektika), čineći tako **septem artes liberales**, sedam slobodnih umijeća.

Početkom srednjeg vijeka u Europi je došlo do potpunog zamiranja znanosti (i obrazovanja), na što se odnosi izraz 'mračni srednji vijek'. Uzroci su mnogostruki, ali dio razloga bio je s jedne strane u rimskoj ne-znanstvenoj tradiciji, a s druge u nestabilnim političkim uvjetima. Stoga je za srednjevjekovne učenjake računanje datuma Uskrsa spadalo u najzahtjevnije matematičke zadatke. Do doba Karla Veklikog obrazovanje je bilo svedeno na apsolutni minimum: jedino plemstvo i redovnici su učili čitati i pisati (latinski), rijetko išta više od toga. Nešto računa je zasigurno bilo također potrebno znati, npr. radi izračuna poreza, no računanje u srednjem vijeku je bilo izuzetno naporno jer se koristio nepraktični rimski brojevni sustav, koji je sve do 13. st. bio u isključivoj upotrebi.

Situacija se malo popravila dolaskom na vlast **Karla Velikog** (747.–814., okrunjen 800. za prvog cara Svetog Rimskog Carstva). On je potaknuo prvu veliku europsku obrazovnu reformu, koja je uključivala osnivanje škola u svim samostanima i biskupijama, dostupnih odabranim dječacima. Uz vjeronauk i glazbu, u programe tih škola službeno su ušli i *trivium* te *computus*, računanje. Sve do 12. st. matematičko obrazovanje ostat će ipak samo na tom niskom nivou, a kao „udžbenici" (priručnici) korišteni su Boethiusova *De institutione arithmetica* i razni latinski tekstovi o mjeriteljstvu.

Prijatelj, savjetnik i učitelj sinova Karla Velikog bio je **Alkuin iz Yorka** (oko 735.–804.). Među ostalim, razvio je karolinške minuskule, temeljni alfabet za današnje latinično pismo, koji je omogućio lakše čitanje i pisanje, što je naravno utjecalo i na matematičko obrazovanje. Osnovao je niz crkvenih škola i pisao matematičke tekstove („udžbenike", u tipičnom srednjevjekovnom stilu 'pitanja i odgovori'). Pripisuje mu se najstarija latinska zbirka zabavnih matematičkih zadataka Propositiones ad acuendos iuvenes („Propozicije za izoštravanje uma mladih"), s elementarnim aritmetičkim, logičkim i kombinatornim zadacima i rješenjima (uglavnom bez postupka). Navodimo dva primjera tih zadataka, od kojih je prvi varijanta zadatka sto ptica.

**Primjer 25** *Jedan svinjogojac je rekao: „Želim kupiti* 100 *svinja za* 100 *libri. Prasac ko v sta deset libri, krmača košta pet libri, a dva praščića se mogu kupiti za jednu libru." Koliko prasaca, krmača i praščića taj svinjogojac može kupiti ako potroši sav novac?*

**Primjer 26** *Tri muškarca, svaki s po jednom sestrom, žele prijeći rijeku. Našli su samo mali čamac s kojim samo dvije osobe odjednom mogu prijeći rijeku. Kako su prešli rijeku, tako da nijedna od djevojaka ni u kojem trenu nije sama s muškarcem koji joj nije brat, ni u čamcu ni na obali?*

Kao i u Rimu, računanje se u srednjem vijeku učilo u glavi, s prstima i pomoću abakusa (srednjevjekovni europski abakus bio je varijanta rimskog abakusa). Kad je u 9. st. došlo do prvih kontakata Europljana s arapskom tradicijom, prvenstveno na Iberskom poluotoku, postepeno su upoznavali indoarapske brojke te su se razdvojile dvije „škole" računanja: **abacisti**, koji su zagovarali isključivo korištenje rimskih brojki s abakusom kao pomagalom, te **algoristi**, koji su se zalagali za korištenje indoarapskog dekadskog pozicijskog sustava. Jedan od prvih koji je u Europi koristio indoarapske brojke bio je **Gerbert iz Aurillaca** (oko 946.–1003.). Studirao je u Kataloniji, gdje je naučio koristiti indoarapske brojke i upoznao se s arapskom matematikom. Pisao je tekstove o aritmetici i geometriji koji su iz današnje perspektive elementarni, ali su za tadašnje Europljane bili napredni, a ujedno su prvi srednjevjekovni europski tekstovi s originalnim doprinosima. Zbog svog znanja računanja je čak bio optuživan da je sklopio pakt s vragom, no ipak je 999. izabran za papu Silvestra II. Opisao je novu verziju abakusa, prilagođenu indoarapskim brojkama, koja je koristila *apices* (kamenčiće s oznakama znamenki 1 do 9).

S dobom Gerberta iz Aurillaca započinje razdoblje poznato kao visoki srednji vijek (ca. 1000.–1300.). Iako se zadržala dominacija latinskog jezika i rimskih brojki te vrlo skromna razina obrazovanja, došlo je do jačeg razvoja kulture. Ovo je doba romanike i gotike, razdvanja katoličke i pravoslavne crkve, križarskih ratova, te kontakta s arapskim svijetom, prvenstveno preko Iberskog poluotoka. Al-Andalus, popularnije muslimanska Španjolska, nastala je kad su Arapi (Mauri) osvojili Iberski poluotok (711.), a završila predajom emirata Granade 1492. kraljici Izabeli I. od Castille. Od 929. do 1031. to je područje bilo samostalni kalifat Córdoba, a Córdoba je postala važan znanstveni centar s velikom knjižnicom. Pod maurskom vladavinom se poticalo prevođenje znanstvenih djela raznih izvora, što je doprinijelo oživljavanju grčke i otkriću arapske i indijske matematike u zapadnoj Europi.

U 11. i 12. st. je tako došlo do intenzivnijeg kontakta europske s grčkom i indijskom matematičkom tradicijom, dijelom putem direktnog kontakta s Arapima (osobito talijanski trgovci), dijelom putem kontakata s „muslimanskom Španjolskom". U to doba počinju se prevoditi matematički (i drugi) tekstovi s arapskog (i hebrejskog) jezika na latinski, dok su prije toga od antičkih matematičkih djela u opticaju su bili samo neki dijelovi Euklidovih i Heronovih djela u rimskom prijevodu. Među prevodiocima tog doba ističu se **Robert iz Chestera** (12. st.) i **Adelard iz Batha** (1075.–1160.), oba iz Engleske, te Talijan **Gerard iz Cremone** (ca. 1114.–1187.). Robert iz Chestera je na latinski preveo Al-Hwārizmījevu „Algebru" (1145.), dok se Adelardu pripisuje prvi prijevod Al-Hwārizmījeve „Aritmetike". Uz to, Adelard iz Batha preveo je s arapskog na latinski Euklidove „Elemente" (taj će prijevod sve do 1533., kad je nađen izvorni tekst, biti temelj svih europskih izdanja EE). Gerard je pak na latinski preveo (ne samo) Ptolemejev *Almagest.* Kroz nastavak srednjeg vijeka ti i drugi prijevodi bit će prepisivani, ali i dorađivani i prerađivani, te mnogi „prijevodi" arapskih tekstova poprimaju različite oblike.

U isto doba, u 11. i 12. st., Katolička crkva počela je sustavnije poticati obrazovanje i znanost. Tako su nastala prva sveučilišta[1] (Bologna, Paris, Oxford, Montpellier, Cambridge, Padova, Napoli, Toulouse, ...),[2] u kojima

[1]Zapravo, najstarije još uvijek aktivno sveučilište je Al-Quaraouiyine u Fesu u Maroku, izvorno džamija koju je 857. ili 859. osnovala Fatima al Fihri, u kojoj je uskoro nakon osnivanja započelo i obrazovanje.

[2]Za razliku od danas, nakon obrazovanja u latinskom jeziku, studenti koji su uopće

su se podučavale i prirodne znanosti i matematika. To je razdoblje crkvene i obrazovne povijesti poznato pod imenom **skolastika**, a izvorno se tim izrazom mislilo sustavno posredovanje znanja kroz predavanja i rasprave. U skolastici se cijenilo logičko zaključivanje (ponekad i do apsurda) temeljeno na aristotelovskoj logici, te je došlo do razvoja logike kao discipline.

Može se reći da je postojao točno jedan veliki srednjevjekovni europski matematičar: **Leonardo iz Pise** (poznatiji kao **Fibonacci**, što je skraćeno od član obitelji Bonacci, živio je otprilike 1170.–1250.). Već kao dječak putovao je s ocem, koji je bio carinik u mjestu Bugia (današnji Alžir, u Fibonaccijevo doba je Bugia bila trgovačka kolonija Pise), u sjevernu Afriku i kasnije u Egipat, Bizant, Siriju, Grčku i Siciliju. Tako je imao prilike upoznati matematičke spise Arapa, Indijaca, Pitagorejaca, Euklida i dr. Budući da je Leonardo trebao postati trgovac, puno je pažnje posvećeno tome da dobro nauči računati. U razdoblju 1200.–1225. boravio je u Pisi i bavio se matematikom. Napisao je pet matematičkih tekstova:

- *Liber Abaci* (1202., 1228.).
- *Practica Geometriae* (1220./21.).
- *Flos* (1225.).
- Pismo carskom filozofu Teodoru.
- *Liber Quadratorum* (1225.).

Najznačajniji od njih je *Liber Abaci* („Knjiga o računanju”), koja je, uz prijevode Al-Hwārizmījeve „Aritmetike”, najzaslužnija za širenje dekadskog pozicijskog sustava s indoarapskim brojkama po Europi. U tom djelu, nakon što je prvo opisao rimske brojke i računanje s prstima, Leonardo opisuje korištenje indoarapskog dekadskog pozicijskog sustava s nulom. Nakon opisa računa s prirodnim brojevima u tom sustavu, opisao je razlomke i računanje s njima (čini se da je upravo Leonardo prva osoba u povijesti koja je koristila razlomačku crtu). Slijede zadaci iz trgovačke računice, uključivo zadataka tipa zadatka sto ptica, te zadaci iz zabavne matematike, uključivo znamenitog zadatka sa zečevima čije rješenje su Fibonaccijevi brojevi.[3] Mnogi

nastavljali obrazovanje na sveučilištu, obično su se na isto upisivali u dobi od 14 ili 15 godina te bi prvo studirali *trivium* (gramatika, retorika, dijalektika), a zatim *quadrivium*. Time se postizao stupanj *baccalaureus*. Dalje se u to rano doba moglo studirati medicinu, pravo ili teologiju do stupnja magistra.

[3]Ime im je u 19. stoljeću dao Édouard Lucas (1841.–1891.). Zanimljivo je da se pojavljuju u mnogim neočekivanim, čak i prirodnim, kontekstima, a povezani su i sa zlatnim rezom.

Fibonaccijevi zadaci su algebarski, odnosno svode se na jednadbe i sustave jednadžbi. Pritom Leonardo nepoznanicu naziva *res* (stvar, prijevod arapske riječi šaj) ili pak *radix* (korijen). Kvadrat nepoznanice naziva *quadratus* ili *census*, a kub, četvrta i peta potencija nepoznanice su *cubus*, *census de censu*, *cubus cubi*. Za konstante koristi izraze *numerus*, *denarius*, *dragma*. Ne samo u odabiru izraza za nepoznanicu, u *Liber Abaci* jasno je vidljiv utjecaj arapske matematike na Fibonaccija (npr. klasifikacija i rješavanje kvadratnih jednadžbi). Među zadacima nalazimo i nekoliko zadataka o pronađenom novčaniku, od kojih ističemo jedan (od više njih) iz kojeg vidimo da je Leonardo razumio i negativne brojeve.

**Primjer 27** *Četiri čovjeka su našli novčanik. Prvi skupa s novčanikom ima dvostruko koliko drugi i treći zajedno, drugi skupa s novčanikom ima trostruko koliko treći i četvrti, treći skupa s novčanikom ima četverostruko koliko četvrti i prvi. Slično, četvrti skupa s novčanikom ima peterostruko koliko prvi i drugi. Kaže Fibonacci: Ovaj zadatak nije rješiv osim ako dozvolimo da je prvi u dugu, a tad u najmanjim brojevima drugi ima* 4*, treći* 1*, četvrti* 4*, u novčaniku je* 11*, a dug prvoga je* 1*.*

Godine 1220. Fibonacci je napisao *Practica Geometriae*, kompilaciju geometrijskih rezultata u kojoj razmatra kako euklidsku geometriju, tako i arapsku trigonometriju. Pritom potrebna algebarska pravila u arapskoj tradiciji izlaže bez pozivanja na geometriju. U *Liber quadratorum* (1225.), Leonardo je opisao metode za nalaženje pitagorejskih trojki i dao prvi dokaz identiteta

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2,$$

tj. umnožak dva zbroja kvadratnih brojeva je zbroj kvadratnih brojeva (što je bila još Diofantova tvrdnja). Iste godine se u *Flosu* bavio raznim algebarskim zadacima. Otprilike iste godine u pismu carskom filozofu Teodoru, koji je djelovao na dvoru Svetog Rimskog cara, naveo je nekoliko matematičkih zadataka.

Car Svetog Rimskog Carstva Friedrich II. je 1225. godine s dvorom došao u Rim te odgodio odlazak u križarski rat da bi organizirao natjecanje iz matematike. Na tom je natjecanju Friedrichov dvorski filozof Ivan iz Palerma zadao sljedeće zadatke:

1. Tri čovjeka posjeduju hrpicu novca, a udjeli su im $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{6}$. S vremenom, svaki je uzimao ponešto novca, sve dok ništa nije preostalo. Prvi je vratio $\frac{1}{2}$ od koliko je uzeo, drugi $\frac{1}{3}$ od onog što je uzeo i treći $\frac{1}{6}$ iznosa kojeg je uzeo. Ako se tako skupljen novac podijeli na tri jednaka dijela i svakom da po jedan, ispada da svaki posjeduje koliko mu po pravu i pripada. Koliko je novca bilo u početnoj hrpi i koliko je tko uzeo?

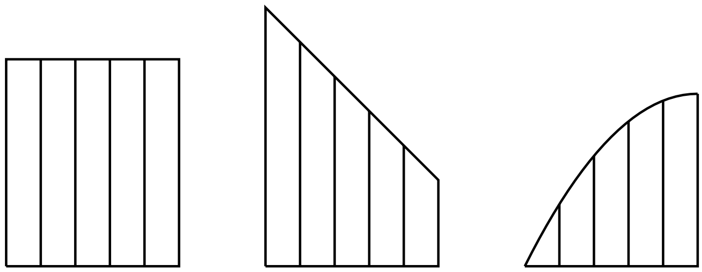
2. Naći broj $x$ takav da su $x^2 \pm 5$ kvadrati razlomaka.
3. Riješiti jednadžbu $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$.

Dok su prva dva zadatka jednostavna, treći je zadatak Ivan iz Palerma preuzeo iz Khayyamove *Algebre*. Fibonacci je svoje rješenje opisao u *Flos*. Dokazao da navedena jednažba nema rješenja u cijelim ni racionalnim brojevima niti među euklidskim kvadratnim iracionalnostima, a zatim je naveo aproksimativno rješenje $(1; 22, 07, 42, 33, 04, 40)_{60}$ (točno na devet decimala), no nije poznato kako je ga je dobio. O Fibonaccijevom životu iza 1228. se gotovo ništa ne zna, osim da mu je republika Pisa dodijelila stipendiju kao nagradu za savjetovanje u matematici vezano za računovodstvo i slična pitanja.

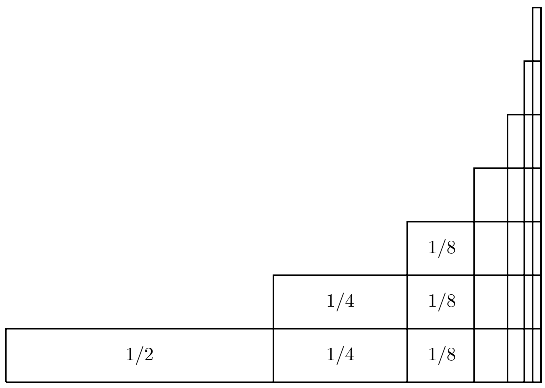
Nijemac **Jordanus Nemorarius** (ca. 1225.–1260.) je napisao više matematičkih djela, od kojih je najzanimljivije *De numeris datis*, prvo naprednije europsko algebarsko djelo nakon Diofanta. Nemorarius je u tom djelu kao prvi u povijesti koristio slova kao oznake nepoznanica, no njegova djela ostala su bez većeg neposrednog utjecaja.

Englez **Thomas Bradwardine** (ca. 1295.–1349.) je djelovao u Oxfordu, a kasnije je bio kancelar crkve St. Paul's u Londonu i kapelan kralja Edwarda III. Godine 1348. postao je nadbiskup Canterburyja, ali je kralj Edward poništio to imenovanje. Bradwardine je godinu kasnije ponovno izabran, ovaj put izgleda bez protivljenja kralja, no ubrzo je umro od kuge. Bavio se logikom, matematikom, teologijom i filozofijom. Prvi je pisao o zvjezdastim mnogokutima. Bavio se i izoperimetričkim likovima, proporcijama, ... Razlikovao je dva tipa beskonačnosti: katetičnu (odgovara našem pojmu transfinitnog, tj. onom što već otpočetka nedostaje ograničenost) i sinkatetičnu (odgovara našem pojmu infinitnog, tj. onom što iz konačnog nastaje neograničenim rastom).

Uz Fibonaccija, najznačajniji europski srednjevjekovni matematičar bio je **Nicole d'Oresme** (ca. 1330.–1382). Bio je biskup francuskog grada Lisieux i financijski savjetnik francuskog kralja Karla V. Koliko je poznato, bio je prvi koji je dozvolio razlomke kao eksponente. Specijalno, poznavao je pravilo $x^a x^b = x^{a+b}$ i za razlomljene eksponente. No, najvažniji njegov doprinos je razvoj ideja koje će tristotinjak godina kasnije rezultirati razvojem analitičke geometrije i ideje grafa funkcije. Kod d'Oresmea nalazimo rano poimanje funkcije i njezina grafa. Za njega su sve mjerljive veličine, osim brojeva (koje doživljava na starogrčki način), kontinuirane te se mogu prikazivati duljinama, površinama i volumenima. U *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum* i *Questiones super geometriam Euclidis* opisao je kako ilustrirati odnos protezanja (*extensio*) i iznosa (*intensio*) kvalitete (kvalitete su za d'Oresmea razne fizikalne pojave, npr. brzina, koje mogu imati različite intenzitete i koje se nalaze u odnosu s protezanjem, primjerice vremenom).



Slika 7.1: D'Oresmeov prikaz latituda u ovisnosti o longitudama.




Slika 7.2: Ilustracija dokaza konvergencije reda $\sum_n \frac{2}{2^n}$.

Intenzitete je nanosio vertikalno kao duljine (*latitudo*) nad vodoravnom crtom, na kojoj su protezanja prikazana isto kao duljine (*longitudo*). Tako je dobio dijagrame poput onih prikazanih na slici 7.1. To naravno još nisu bile funkcije ni njihovi grafovi, ali se danas lako naziru iz njegova prikaza. D'Oresme pritom nije zahtijevao okomitost latituda u odnosu na longitude, a spominje i mogućnost trodimenzionalne interpretacije. D'Oresme je dokazao i tzv. mertonski teorem, nazvan po oxfordskom *Merton College*, čiji znanstvenici su ga izrekli 1330ih godina: U slučaju „uniformno diformne" brzine (gibanja s konstantnom akceleracijom) prijeđeni put je jednak kao za „uniformnu" (konstantnu) brzinu, ako je to ona u srednjem trenutku. D'Oresme je to pokazao usporedbom površine pravokutnika i trapeza (srednja i lijeva ilustracija na slici 7.1) te se vidi da je put znao interpretirati kao površinu. To je jedan od najranijih primjera matematičke fizike.

Poznat je i po prvom dokazu divergencije nekog reda, konkretno: harmonijskog,

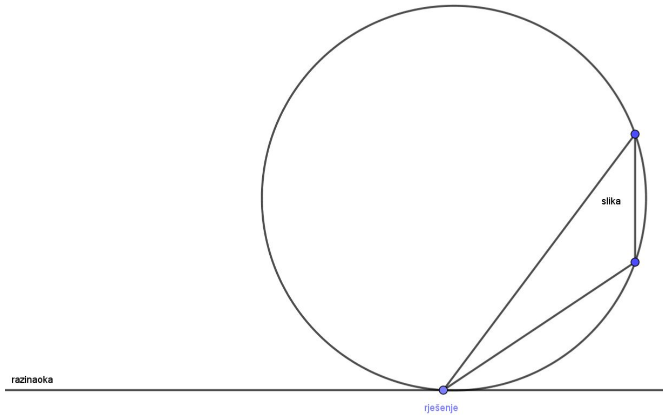
$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots.$$

Pokazao je i konvergenciju geometrijskog reda $\sum_n \frac{2}{2^n}$, koristeći dijagram poput prikazanog na slici 7.2.

# Poglavlje 8

# Matematika u doba renesanse

Razdoblje 15. i 16. stoljeća u Europi je poznato kao razdoblje renesanse, koje je donijelo ponovno „oživljavanje” antike, ali i mnoge napretke u umjetnosti, znanosti, tehnici, ... Jedan od važnih razloga porasta razine obrazovanja, a time i razvoja znanosti i tehnologije, bilo je otkriće tiska (J. Gutenberg, ca. 1440.). Kao prvi renesansni matematičar obično se ističe **Johann Müller Regiomontanus** (1436.–1476.). Rođen je u njemačkom gradu Königsbergu, po njemu je nazvan Regiomontanus. Od 1468. je bio dvorski astronom kralja Matijaša Korvina. Njegovi najznačajniji doprinosi su u trigonometriji i astronomiji: Na temelju arapskog izvora (Džābir ibn Aflaḥ poznat i kao Geber Hispalensis, ca. 1100.–1160., iz Seville) postavio je temelje moderne trigonometrije. U svom *De triangulis omnimodis* (napisano 1464., objavljeno posthumno 1533.), koje je prva sistematska obrada ravninske i sferne trigonometrije u povijesti, je prepisao dijelove iz Geberove *Islah al-Madžisti* (bez da ga navede kao autora). Godine 1472. zabilježio je pojavu kometa, a njegovi iznimno točni zapisi omogućili su da se taj komet 210 godina kasnije identificira kao Halleyev. Kopiju Regiomontanusovih astronomskih tablica na svoje četvrto putovanje ponio je Kolumbo i koristio predviđanje pomrčine mjeseca za 29. veljače 1504. da bi zaplašio neprijateljski nastrojeno pleme jamajkanskih Indijanaca. Regiomontanus je pisao i o reformi kalendara te ga je papa Siksto IV godine 1475. pozvao u Rim upravo da bi reformirao kalendar. Papa ga je imenovao i za biskupa grada Regensburga, ali je Regiomontanus umro prije nego je preuzeo dužnost (prema nekim izvorima otrovali su ga sinovi konkurentskog znanstvenika, a prema drugima je umro od kuge). Kao i i mnogi suvremenici, nepoznanicu je označavao riječju *res*, a kvadrat nepoznanice sa *census*. Godine 1471. postavio je svoj znameniti problem optimizacije. Taj **Regiomontanusov problem** glasi: „Slika visi na zidu. Ako je poznata visina vrha i dna slike iznad razine oka promatrača, na kojoj udaljenosti treba biti promatrač da ju najbolje vidi, tj. da je kut pod kojim




Slika 8.1: Geometrijsko rješenje Regiomontanusovog problema.

ju gleda najveći?' Najstarije poznato rješenje je geometrijsko: Povuče se horizontala na visini oka te kružnica kojoj je to tangenta, a koja prolazi kroz vrh i dno slike. Dirալište je optimalna pozicija oka (slika 8.1).

Početkom renesanse dolazi i do ubrzanog razvoja matematičke simbolike. Kao što je vidljivo iz prethodnog dijela gradiva, velik problem matematike u starih naroda, pa čak i Arapa i u europskom srednjem vijeku, bio je nedostatak sustavne notacije. Problemi, rješenja i dokazi izlagani su riječima, bez standardiziranog nazivlja i simbolike. Bila je to jedna od najvećih zapreka brzog daljeg razvoja matematike. Tijekom srednjeg vijeka postepeno su se uvele indoarapske brojke, te im se do renesanse ustalio i oblik. Fibonacci je uveo razlomačku crtu, a bio je i jedan od prvih koji su za nepoznanice koristili određene standardizirane riječi (*res*, *radix*; *census*; *cubus*). Tu je tzv. *res-census*-terminologiju koristio, kako smo maločas rekli, i Regiomontanus.

Tijekom kasnog srednjeg vijeka za zbrajanje se vrlo često koristio latinski veznik *et* (povremeno i riječ *plus*). Kod d'Oresmea (ili nekog njegovog prepisivača) mogu se naći simboli koji podsjećaju na +, vjerojatno pokrate za *et*. Svakako se znak + pojavio tijekom 15. stoljeća, a tako i −, za kojeg točno porijeklo simbola nije poznato. Tijekom 15. st. za zbrajanje i oduzimanje korišteni su i drugi simboli (često P i M). Simboli + i − su se u tisku prvi put pojavili 1489., u knjizi o aritmetici za trgovce češkog Nijemca **Johannesa Widmanna** (ca. 1462.–1498.). Ipak, smatra se da je Widmann te simbole, i to upravo kao oznake za operacije, vidio i preuzeo od nekog drugog autora. Ovisno o autoru, prva osoba koja je znakove + i − koristila u algebarskim izrazima je **Giel Vander Hoecke** u knjizi objavljenoj u Antwerpenu 1514., ili pak **Heinrich Schreiber (Heinrich Grammateus)** 1518. Sigurno je da su se tijekom 16. st. simboli + i − ustalili u upotrebi.

**Nicolas Chuquet** (ca. 1445.–1487.) je bio najznačajniji francuski matematičar u 15. st. Za život je zarađivao kao prepisivač, a bio je autor prve knjige o algebri na francuskom jeziku (*Triparty en la science des nombres*, 1484.). Ipak, ta je knjiga u to doba imala mali utjecaj jer je štampana tek 1880. Kod Chuqueta prvi put susrećemo izraze milijun, bilijun i trilijun. Bio je prvi matematičar koji je koristio zapis eksponenta nepoznanice kao superskripta i pritom je prvi koristio 0 kao eksponent i negativne eksponente. Njegovih $12^3$ je naš $12x^3$, njegov $12^0$ je naš 12, a njegov $12^{1\overline{m}}$ je naš $12x^{-1}$). Tako je za ono što danas zapisujemo kao $\sqrt{4x^2+4x}+2x+1$ Chuquet pisao

$$R^2\underline{4^2\tilde{p}4^1}\tilde{p}2^1\tilde{p}1$$

(najčešća renesansna oznaka drugog korijena bila je R (lat. *radix*), često s prekriženom „nogicom").

Vezano za intenzivnu likovnoumjetničku aktivnost u renesansi, počele su se razvijati i njene veze s matematikom, posebice teorija **perspektive**. Do renesanse ne postoji dokaz da je ikoji umjetnik razumio ili razradio matematičke zakone perspektivnog crtanja i slikanja. Oko 1420. **Filippo Brunelleschi** (1377.–1446.) izriče glavno pravilo linearne perspektive: Svi pravci danog smjera u nekoj ravnini (koja nije ravnina slike) „konvergiraju" istoj izbježnoj točki. Brunelleschi je razvio i precizna pravila za određivanje veličine objekta na slici ovisno o njegovoj udaljenosti od slike, ali nikad nije zapisao objašnjenje pravila linearne perspektive. Prvi je ta pravila objasnio **Leone Alberti** (1404.–1472.), u svoja dva djela *De pictura* (na latinskom, 1435., više razine) i *Della pittura* (na talijanskom, 1436., popularnije pisano). Među talijanskim umjetnicima ipak se svojim matematičkim doprinosima ističe jedan: **Pierro della Francesca** (1412.–1492.). U svoje djelo De prospectiva pingendi (oko 1470.) o perspektivi je uključio i dijelove o aritmetici i algebri te dug dio o geometriji, uključivo originalnih doprinosa. U tom djelu detaljno opisuje i Arhimedova tijela, uključivo i njihovih perspektivno pravilnih slika.

Na osnovi della Francescinih djela je fra **Luca Pacioli** (1445.–1517.) napisao svoj prikaz pravila perspektive u sklopu djela De divina proportione („O božanskom omjeru", 1509.). To je djelo napisao u Milanu, kamo je na poziv vojvode Ludovica Sforze oko 1496. došao podučavati matematiku na njegovu dvoru. Tamo je upoznao **Leonarda da Vincija** (1452.–1519.) i s njime se sprijateljio, te je upravo da Vinci ilustirao navedenu knjigu. Da Vinci je i sam imao mnogo interesa za geometriju i dao vlastite prikaze i objašnjenja perspektivnih pravila i konstrukcija, a bavio se i inverznim problemom perspektive (kako za danu sliku odrediti gdje se nalazi oko promatrača ako je prikaz perspektivno korektan). Sâm Pacioli je svoje znanje matematike usavršio u službi bogatog venecijanskog trgovca, a 1470-ih godina studirao je teologiju i postao franjevac. Mnogo je putovao i podučavao matematiku na raznim sveučilištima, među inim i u Zadru, koji je u to doba bio dio Mletačke republike. Bio je autor prvog značajnog algebarskog djelo u renesansi: *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* (poznato jednostavno kao *Summa*, 1494.). Radi se o izuzetno utjecajnom djelu, ne samo jer sadrži pregled matematike tog vremena, nego i jer je pisano na narodnom talijanskom jeziku i bilo je tiskano. Dio *Summe* je posvećen rješavanju onih jednadžbi 4. stupnja koje se mogu riješiti supstitucijom. Pacioli je koristio *res-census*-terminologiju, za $+$ koristi $p.$, za $-$ koristi $m.$, a za $\sqrt{\ }$ koristi $R.$.

Među renesansnim umjetnicima se, uz della Francescu, svojim matematičkim doprinosima ističe **Albrecht Dürer** (1471.–1528.). Bio je Nijemac mađarskog porijekla, unuk zlatara, treće od 18 djece u obitelji, a već s 13 godina se istaknuo kao slikar. Na putu u Italiju 1494. saznao je za Paciolijeva djela i važnost matematike u slikarstvu te po povratku u Nürnberg počeo proučavati matematička djela. Od oko 1500. nadalje se u Dürerovim djelima može otkriti matematički utjecaj. Znameniti su Dürerovi bakrorezi koji prikazuju vezu slike i originala po perspektivnim pravilima. Kako bi produbio znanje matematike, 1505.–1507. ponovno je putovao po Italiji te po povratku skupljao materijal za pisanje djela o primjeni matematike u umjetnosti, no to djelo nikad nije završio. Najpoznatija Dürerova „matematičk" slika svakako je Melencolia I (1514.), u kojoj vidimo zanimljiv poliedar, ali i jedan od prvih magičnih kvadrata u Europi (u kojem su u donjem redu brojevi 15 i 14 postavljeni tako da se očita godina nastanka). Dürer je 1525. objavio svoje znamenito djelo Underweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheyt, koje sadrži detaljan prikaz teorije sjena i perspektive, a ujedno se radi o prvoj matematičkoj knjizi na njemačkom jeziku koja donosi nove rezultate.

Talijanski matematičari 16. stoljeća bavili su se problemom rješivosti *u radikalima*[1] kubnih jednadžbi bez kvadratnog člana (reducirane kubne jednadžbe), tj. jednadžbi koje u skladu s Khayyamovom klasifikacijom imaju jedan od oblika

$$\begin{aligned} x^3 + b\,x &= c, \\ x^3 &= b\,x + c, \\ x^3 + c &= b\,x, \end{aligned}$$

pri čemu su radi principa homogenosti (duljine se mogu zbrajati samo s du-

[1]Algebarska jednadžba je rješiva u radikalima ako se njezina rješenja mogu izračunati iz njenih koeficijenata koristeći konačno mnogo operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i korjenovanja.

ljinama, površine s površinama, volumeni s volumenima) koeficijenti oblika $b = A^2 > 0$ i $c = B^3 > 0$. To su ujedno i jedini tipovi kubnih jednadžbi za koje je potrebno naći rješenje, jer se supstitucijom $y = x\pm$trećina koeficijenta uz kvadratni član svaka normirana kubna jednadžba svodi na jedan od navedenih tipova.

**Primjer 28** *Primjerice, jednadžba*

$$x^3 + 3x^2 = 12x + 18$$

*nakon supstitucije* $x = y - 1$ *postaje*

$$y^3 = 15y + 4.$$

Prvi matematičar koji je znao u radikalima riješiti neki od navedenih triju tipova reduciranih kubnih jednadžbi bio je **Scipione del Ferro** (ca. 1463.–1526.), profesor matematike u Bologni. On je oko 1515. našao je algebarsku metodu za rješavanje kubnih jednadžbi tipa $x^3 + b\,x = c$. Svoje je rezultate čuvao tajnim jer se u to doba u Italiji moglo dobro zaraditi rješavajući jednadžbe onima koji su ih trebali. Pred smrt je svoju metodu priopćio svom studentu Antoniu Maria del Fioreu, a njegove je bilješke naslijedio zet mu Hanninal Nave. Ubrzo nakon del Ferrove smrti se pročulo da je riješen prvi tip reducirane kubne jednadžbe.

U isto doba problem rješivosti kubne jednadžbe zanimao je i samouokog matematičara iz Bresciae, **Niccolò Fontana Tartaglia** (ca. 1500.–1557.). Tartaglia mu je zapravo bio nadimak značenja „mucavac", a dobio ga je zbog govorne mane koja je bila posljedica ozljede u djetinjstvu: Kad su Francuzi 1512. osvojili njegovu rodnu Bresciu, jedan mu je vojnik mačem rasjekao čeljust. Majka mu je uspjela spasiti život, ali ostala mu je govorna mana i velik ožiljak kojeg je u odrasloj dobi skrivao bujnom bradom. Kad je imao 16 godina trebao je naučiti abecedu, no novaca je bilo samo do slova K; Tartaglia je ukrao udžbenik i sam naučio dalje ne samo abecedu, već i latinski i kasnije matematiku. Taj mu je talent donio mjesta predavača matematike prvo u Veroni, a u doba naše priče u Veneciji. Osim po doprinosu rješenju kubne jednadžbe, poznat je po uvidu da projektil ima najveći domet ako se ispali pod kutom od 45°.

1530-ih godina je Tartaglia otkrio metodu za rješavanje kubne jednadžbe oblika $x^3 + p\,x^2 = q^3$ i svoje otkriće nije tajio. Del Ferrov student del Fiore, uvjeren da samo on zna riješiti tip $x^3 + b\,x = c$, izazvao je Tartagliu na javno natjecanje (1535.) na kojem je svaki trebao zadati drugome po 30 zadataka. Tartaglia je očekivao taj tip i uspio osmisliti vlastitu, u osnovi ponovno del Ferrovu metodu, za rješenje takvih zadataka. Tako je on riješio sve del

Fioreove zadatke, ali del Fiore nije znao riješiti sve njegove te je izgubio, a Tartaglia stekao slavu.

**Primjer 29** *Primjer del Fioreovog zadatka s tog natjecanja s: Nađi broj koji zbrojen sa svojim kubom daje* 6 *(dakle, riješi jednadžbu* $x^3 + x = 6$*).*

Za Tartagliainu pobjedu saznao je milanski liječnik i matematičar živopisne biografije, **Girolamo Cardano** (1501.–1576.). Rođen u Paviji kao izvanbračno dijete milanskog pravnika i mlade udovice. Studirao je medicinu i postao međunarodno poznat liječnik, čak je 1552. na zahtjev nadbiskupa Johna Hamiltona iz Edinburgha putovao u Škotsku da ga izliječi od astme. Paralelno sa svojom liječničkom praksom bavio se matematikom, ali i kockanjem i astrologijom. Osim o matematici, objavio je djela i o astrologiji, fizici, šahu, kockanju, utjehi, čudesnim lijekovima, otrovima, zraku, vodi, snovima, urinu, zubima, kugi, mudrosti, moralu i glazbi. Njegovo djelo o utjesi navodno je izvor za Hamletove komentare o snu i smrti. Stric mu je otrovan, a i samog Cardana i oca pokušavali su otrovati. Žena mu je umrla 1546. Imao je dva sina i jednu kćer. Starijem je sinu 1560. odrubljena glava jer je arsenom u kolaču otrovao ženu (koju je Cardano opisao kao bezvrijednu i besramnu, a koja se vlastitom mužu javno rugala da nije otac njihovo troje djece). Mlađi sin je kao i otac bio ovisnik o kocki i okrao je vlastitog oca, koji ga je istjerao iz Bologne, a navodno da mu je u napadu bijesa i odrezao uho. Kćer je umrla od sifilisa. Skandali oko Cardana su se tako gomilali te ga sveučilište pokušalo izbaciti, no Cardano je tih godina imao jaku zaštitu pape Grgura XIII. Ipak, godine 1570. uhapšen je kao heretik zbog objave horoskopa Isusa Krista, ali ga inkvizicija nije mučila. Po izlasku iz zatvora izgubio je posao i dobio zabranu objavljivanja radova. Kraj života je proveo u Rimu, uz malu mirovinu koju mu je osigurao papa. Prema legendi, izradio je horoskop po kojem je trebao umrijeti određenog dana te se ubio kako bi održao reputaciju točne izrade horoskopa. Dva najpoznatija Cardanova djela su *Ars Magna* (1545.) i *Liber de Ludo Aleae* (napisano oko 1562., ali objavljeno tek 1663.).

U doba Tartagliaine pobjede, Cardano se upravo spremao objaviti djelo *Practica arithmeticae.* Cardano je pozvao Tartagliau u Milano da ga pokuša nagovoriti da mu oda svoju metodu rješavanja kubne jednadžbe. Napisao mu je da ju želi objaviti u svojoj knjizi, ali Tartaglia je odgovorio da će ju sam objaviti. Na to je Cardano molio da mu metodu oda „u povjerenju”, no i to je Tartaglia isprva odbio. Cardano mu je pak zatim napisao da je o njemu razgovarao s milanskim guvernerom, te je Tartaglia, želeći poboljšati svoju zaradu, pristao doći u Milano, bilo je to 1539. Cardano ga je ugostio, ali guvernera nije bilo u gradu. Nakon puno nagovaranja Tartaglia je pristao odati metodu, uz uvjet da se Cardano zakune da ju neće objaviti prije nego ju sam Tartaglia objavi. Ipak, Cardano je zakletvu prekršio objavom djela *Ars Magna* šest godina kasnije (1545.). Tu je naveo Tartagliau kao autora metode, a uz nju objavljuje i svoje proširenje metode te rezultate svog studenta Ferrarija o rješenju jednadžbe četvrtog stupnja. U Cardanovu obranu može se reći da je Tartaglia dugo izbjegavao objaviti svoju metodu, a i da je njena modifikacija do općeg rješenja kubne jednadžbe Cardanov rezultat. Uz to, Cardano je u međuvremenu saznao da je metodu zapravo ranije otkrio već del Ferro. Za Tartagliau ova je objava bila katastrofa, jer je njome izgubio prednost na natjecanjima, koja su mu osiguravala određenu financijsku dobit, te je optužio Cardana za izdaju i izazvao ga na natjecanje. Na to natjecanje (1548.) Cardano je poslao Ferrarija, koji je pobijedio Tartagliau, a Tartaglia je bio prisiljen otići s natjecanja. Tako je Tartaglia izgubio i prestiž i dohodak te je život završio kako ga je i započeo: siromašan.

Iako i Cardano još razlikuje razne slučajeve kubnih jednadžbi, zahtijevajući oblik jednadžbe s pozitivnim koeficijentima i pozitivnim rješenjem, njegova (zapravo, **del Ferro-Tartaglia-Cardanova metoda) za rješavanje reduciranih kubnih jednadžbi** se uz modernu simboliku može objediniti u jedinstvenu metodu. Ona se može zapisati i formulom, ali lakše ju je shvatiti i zapamtiti kao postupak: Neka je dana reducirana kubna jednadžba

$$x^3 + bx + c = 0.$$

Prvo uvodimo supstituciju

$$x = u + v,$$

čime dobivamo

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + b(u + v) + c = 0,$$

tj.

$$u^3 + v^3 + (3u\,v + b)(u + v) + c = 0.$$

Da bismo dobili $x$, ne trebaju nam svi, nego samo neki $u$ i $v$ koji to zadovoljavaju. Stoga dodajemo uvjet

$$3u\,v + b = 0,$$

te od jednadžbe preostaje

$$u^3 + v^3 + c = 0.$$

Uvjet je moguće zapisati i kao $27u^3v^3 = -b^3$, pa smo dobili sustav

$$u^3 + v^3 = -c,$$

$$u^3v^3 = -\frac{b^3}{27},$$

koji se supstitucijom svodi na kvadratnu jednadžbu za $u^3$ (odnosno $v^3$). Diskriminanta te kvadratne jednadžbe zove se diskriminantom kubne jednadžbe. Danas znamo: ako je diskriminanta kubne jednadžbe 0, sva rješenja su realna (i jedno je bar dvostruko), ako je pozitivna, samo jedno rješenje je realno, a ako je negativna $u$ i $v$ su kompleksni, no kubna jednadžba ima tri različita realna rješenja. Napomenimo ovdje i da je Cardano svoje postupke opravdao geometrijski, „svođenjem na potpun kub".

**Primjer 30** *U* Ars Magna*, Cardano je među ostalim primjerima dao rješenje jednadžbe*

$$x^3 = 15x + 4,$$

*za koju je unaprijed znao da ima jedno realno pozitivno rješenje* $x = 4$*. U modernoj notaciji Cardanov postupak je sljedeći: Kao gore postavljamo sustav*

$$u^3 + v^3 = 4, \quad u^3v^3 = \left(\frac{15}{3}\right)^3 = 125.$$

*On se svodi na kvadratnu jednadžbu*

$$u^6 - 4u^3 + 125 = 0,$$

*tj.*

$$(u^3 - 2)^2 + 121 = 0,$$

*pa je*

$$u^3 = 2 \pm \sqrt{-121}.$$

*Ovo je prva pojava kompleksnih brojeva u povijesti! Iako nije smatrao da kvadratni korijen negativnog broja ima smisla, budući da je znao da polazna jednadžba ima rješenje* $x = 4$*, Cardano je* $\sqrt{-121}$ *prihvatio kao međukorak i zaključio da je* $u^3 = 2 + \sqrt{-121}$*,* $v^3 = 4 - u^3 = 2 - \sqrt{-121}$ *i stoga*

$$x = u + v = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

*Par desetljeća kasnije, R. Bombelli je pokazao da je to stvarno jednako* 4*.*

Recimo i par riječi o Cardanovom studentu Ferrariju, autoru rješenja jednadžbi 4. stupnja u radikalima. **Lodovico Ferrari** (1522.–1565.) je nakon što mu je otac poginuo, živio kod strica, čiji sin je pobjegao od kuće i zaposlio se kao sluga kod Cardana, no ubrzo je shvatio da mu je kod kuće bilo bolje te je bez obavijesti napustio Cardana i vratio se kući. Kad je Cardano kontaktirao njegova oca, on je Cardanu umjesto sina poslao tad 14-godišnjeg Lodovica. Lodovico je znao čitati i pisati pa ga je Cardano zaposlio kao tajnika, a ubrzo je uočio i njegov matematički talent, te ga je podučio i matematici. Ferrari je brzo napredovao i metodu za kubnu jednadžbu dopunio do metode za rješavanje jednadžbe četvrtog stupnja. Nakon natjecanja s Tartagliom, Ferrari je tražio bolje plaćen posao. Obogatio se u službi milanskog upravitelja, don Ferranda di Gonzage, ali ga je sklonost užicima koštala zdravlja. Otišao je živjeti sa sestrom, udovicom, u Bolognu, gdje je dobio i profesuru matematike na sveučilištu, no godinu kasnije je umro. Smatra se da ga je otrovala sestra, koja je odbila tugovati na pogrebu i dva tjedna nakon što je naslijedila njegovo bogatstvo ponovno se udala (no, kad je sve svoje vlasništvo prepisala mužu, on ju je odmah ostavio te je umrla u siromaštvu). Opišimo njegov postupak na primjeru.

**Primjer 31** *Riješimo*

$$x^4 + 4x^3 - 17x^2 - 24x + 36 = 0.$$

*Ferrarijevom metodom:*

- *Supstitucija* $x = y - 1$ *(*$x$ *je* $y$ *minus* $\frac{1}{4}$ *koeficijenta uz* $x^3$*) eliminira kvadratni član, a ostatak jednadžbe pišemo tako da lijevo ostanu članovi* 2. *i* 4. *stupnja:* $y^4 - 23y^2 = -18y - 40$.
- *Svodimo lijevu stranu na potpun kvadrat: Pribrojimo* $\frac{23^2}{4}$ *i dobijemo* $\left(y^2 - \frac{23}{2}\right)^2 = \frac{369}{4} - 18y$.
- *Uvodimo dodatnu nepoznanicu* $t$ *pribrajanjem* $t^2 + 2t(y^2 - 23/2)$ *(dakle,* $t^2 + 2t\,(x^2 + A)$*, gdje je lijeva strana prethodne jednadžbe* $(y^2 + A)^2$*):*
- $\left(y^2 - \frac{23}{2} + t\right)^2 = 2ty^2 - 18y + t^2 - 23t + \frac{369}{4}$.
- *Biramo jedan* $t$ *za koji je diskriminanta desne strane s obzirom na* $x$ *jednaka* 0*, npr.* $t = \frac{1}{2}$.
- *Onda preostaje* $\left(y^2 - 11\right)^2 = y^2 - 18y + 81 = (y - 9)^2$.
- $y^2 - 11 = \pm(y - 9)$*, dakle* $y_{1,2,3,4} = -5; -1; 2, 4$ *odnosno* $x_{1,2,3,4} = -6; -2; 1, 3$.

Maločas spomenuti **Rafael Bombelli** (1526.–1572.) je bio arhitekt iz Bologne. Smatrajući da su sukobi oko rezultata vezanih za rješenje algebarskih jednadžbi posljedica nedovoljno pažljiva izlaganja sadržaja, koje je uz to često bilo nepristupačno nematematičarima, Bombelli je odlučio napisati opći i lakše razumljiv prikaz tada poznate algebre. U planu je bilo pet dijelova (knjiga), no Bombelli je umro kratko nakon što su 1572. objavljene prve tri knjige njegove *Algebre*. Nezavršeni rukopis posljednje dvije knjige nađen je i objavljen 1929.

Bombellijeva *Algebra* je potpun prikaz tada poznate algebre, uključujući pravila aritmetike s pozitivnim i negativnim brojevima, dokaz da je problem trisekcije kuta ekvivalentan rješavanju kubne jednadžbe, te prvu detaljnu diskusiju **kompleksnih brojeva**. Dakle, Bombelli je prva osoba koja je prihvatila kompleksne brojeve kao smislene. Među ostalim, Bombelli je prvi pokazao da je Cardanovo rješenje (vidi primjer 30) $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ jednako 4. To je pokazao tako što je prvo uočio da ako taj izraz uopće ima smisla, onda mora biti $\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}} = a \pm b\sqrt{-1}$. Uzmimo

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = a + b\sqrt{-1}.$$

Kubiranjem dobivamo

$$2 + \sqrt{-121} = a(a^2 - 3b^2) + b(3a^2 - b^2)\sqrt{-1},$$

odnosno

$$2 = a(a^2 - 3b^2), \quad 11 = b(3a^2 - b^2).$$

Bombelli je onda uočio da su ti uvjeti zadovoljeni za $a = 2$ i $b = 1$. Stoga je $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$. Bombelli je i opisao pravila računanja s kompleksnim brojevima. Imaginarne brojeve je zapisivao kao kvadratne korijene negativnih brojeva te je dao pravila za njihovo zbrajanje, oduzimanje i množenje, npr. „plus od minusa puta plus od minusa je minus" $(+\sqrt{-n} \cdot +\sqrt{-n} = -n)$.

Bombelli je također dokazao da ireducibilni slučaj kubne jednadžbe (kad je njena diskriminanta negativna) ima tri realna rješenja. Kod Bombellija se može naći i geometrijska definicija realnih brojeva: Ako se odabere jedinična duljina, onda se brojevi mogu predstaviti kao duljine.

Vrijedi spomenuti i da je Bombelli koristio vlastitu sustavnu algebarsku notaciju: Za zbrajanje i oduzimanje kao i mnogi suvremenici koristi *p.* i *m.* Jednakost je izražavao s *eguale à* (tal. jednako je). I korjenovanje je označavao tada popularnom oznakom R (s prekriženom 'nogicom', ako se ističe 2. ili 3. korijen, onda Rq odnosno Rc). Kao naše zagrade koristio je $\lfloor$ i $\rfloor$. Monome je zapisivao poput razlomaka, iznad $\smile$ je eksponent monoma, a ispod je koeficijent. Primjerice, naš $4 + \sqrt{24 - 20x^2}$ bi kod Bombellija izgledao ovako: $4p.R.\lfloor \underset{24}{\overset{0}{\smile}}\ m.\ \underset{20}{\overset{2}{\smile}} \rfloor$.

U doba ovog zanimljivog algebarskog razvoja, došlo je i do intenzivnog razvoja primjene matematike u fizici i astronomiji. Dok se u 15. st. astronomija još temeljila na Ptolemejevom *Almagestu*, Kopernik je u svom djelu *De Revolutionibus Orbium Coelestium* predložio heliocentrički model Sunčeva sustava. No, budući da je još u antičkoj tradiciji pretpostavio kružne putanje planeta, njegov model se nije tako dobro kao Ptolemejev slagao s podacima dobivenim mjerenjem, te je ideja isprva naišla na otpor. Prvi koji je argumentirao mogućnost kretanja planeta oko Sunca bio je **Galileo Galilei** (1564.–1642.). No, za matematiku je Galileo važniji po tri druga doprinosa. Prvo, kod njega prvi puta eksplicitno susrećemo **beskonačne skupove** i njihova svojstva. Galileo je naime kroz korespondenciju (mi bismo rekli bijekciju)

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\ldots & \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & \ldots \end{array}$$

uočio da prirodnih brojeva ima jednako mnogo kao njihovih kvadrata (iako naizgled tih kvadrata ima manje), te ga tako možemo smatrati prethodnikom teorije skupova. Nadalje, u otprilike isto doba kad je Cardano napisao svoju *Liber de Ludo Aleae*, Galileo je također pokušavao racionalno objasniti neka vjerojatnosna pitanja. Možemo dakle reći da temelji moderne teorije **vjerojatnosti** sežu u sredinu 16. st., kad su Cardano i Galileo bili prvi koji su pitanjima slučajnosti pristupili racionalno (u starijim vremenima se rezultat slučajnog pokusa, primjerice bacanja kocke, isključivo smatrao rezultatom djelovanja neke izvanzemaljske sile: Boga, božanstva, duhova, . . . ). Namjena Cardanove knjižice bila je da pomogne profesionalnim kockarima. Iako i Cardano još uvijek sreću u igri shvaća kao uplitanje „prinčeva autoriteta", pokušao je racionalno opisati šanse za dobitak. Tako primjerice kaže da uloge treba stavljati u onom omjeru u kojem su brojevi povoljnih i nepovoljnih slučajeva, iskazano u terminima onog što danas zovemo koeficijentom za klađenje. Iako knjižica sadrži i mnoge greške, Cardano je prvi opisao zašto pri bacanju dvije kocke nisu svi zbrojevi jednako vjerojatni. S druge strane, Galileo je prvi objasnio zašto pri bacanju triju kockica nisu svi zbrojevi jednako vjerojatni. Iako stoga utemeljenje teorije vjerojatnosti kronološki možemo pripisati Galileu i Cardanu, ono se ipak pripisuje tek de Fermatu i Pascalu, jer navedeni Cardanovi i Galileovi rezultati nisu bili objavljeni sve do 1662. odnosno 1714. Treći važan Galileov doprinos matematici je što je postavio temelje **računa pogreške**. Naime, Galileo je bio svijestan da svako mjerenje nosi grešku, odnosno da nijedan rezultat mjerenja nije savršeno točan. U svom znamenitom djelu *Dialogo opra i due Massimi Sistemi del Mondo Tolemaico e Copernicano* (1632.) stoga tvrdi da ćemo dobiti pouzdanije podatke ako provedemo što više mjerenja, a da pritom vrijedi:

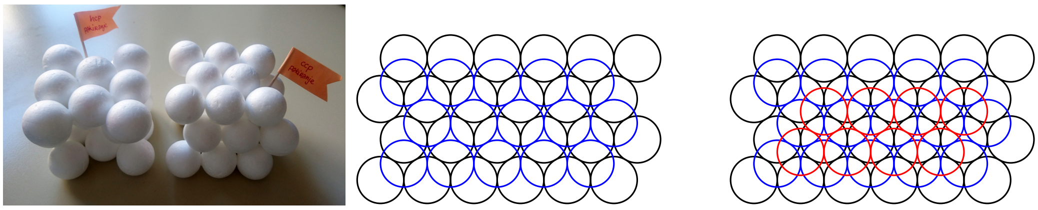
- Samo je jedna točna vrijednost fizikalne veličine (npr. udaljenost središta Zemlje do neke zvijezde).
- Mjerenja nose grešku uslijed nesavršenosti promatrača i mjernog instrumenta.
- Greške se raspoređuju simetrično s obzirom na 0 (jednako je vjerojatno izmjeriti rezultat koji za $\varepsilon$ nadmašuje točnu vrijednost koliko i rezultat koji je za $\varepsilon$ manji od nje).
- Manje greške su vjerojatnije od velikih.

Modernim načinom rečeno, Galileo je pretpostavio da je funkcija ovisnosti vjerojatnosti greške o njenom iznosu $\varepsilon$ parna pozitivna funkcija koja je padajuća za pozitivne (i naravno rastuća za negativne) greške $\varepsilon$. Ipak, Galileo još nije dao prijedlog kako iz rezultata mjerenja (podataka) dobiti procjenu stvarne vrijednosti.

Među trima znamenitim renesansnim astronomima, najviše matematičkih doprinosa ostavio nam je Nijemac **Johannes Kepler** (1571.–1630.). Znamenit je Keplerov prvi model Sunčevog sustava (objavljen u *Mysterium cosmographicum*, 1596.) kojim je razmake među susjednim planetima Sunčeva sustava (tad ih je bilo poznato šest) pokušao objasniti koristeći Platonova tijela. Godine 1599. Kepler je postao asistent danskog astronoma **Tycho Brahea** (1546.–1601.), koji je tad bio „carski matematičar" u Pragu (tada glavnom gradu Svetog rimskog carstva). Brahe je bio poznat po tome što je raspolagao za to doba najtočnijim mjernim podacima o kretanjima nebeskih tijela, a njegove podatke je nakon Braheove smrti naslijedio Kepler. Koristeći Braheove podatke, Kepler je (1609. odnosno 1619.) formulirao svoja tri znamenita zakona gibanja planeta:

1. Planeti se oko Sunca kreću po elipsama, u čijem jednom žarištu je Sunce.
2. Radij-vektori planeta (spojnice planeta sa Suncem) u jednakim vremenskim razmacima prelaze jednake površine.
3. Kvadrat godine (vremena obilaska) planeta je razmjeran kubu velike osi pripadne orbite.

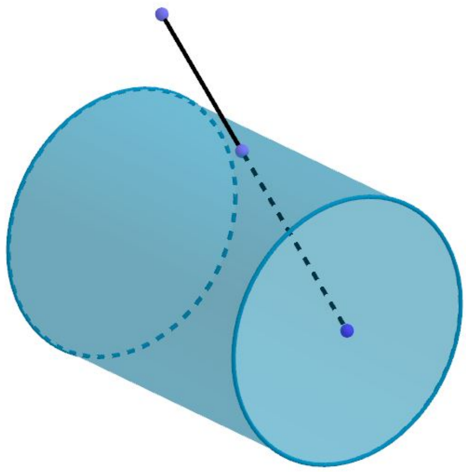
Kepler se bavio i poliedrima. Prvi im je pristupio sustavno i ponovno je otkrio Arhimedova tijela. Otkrio je novu klasu poliedara (antiprizme) i neke nove poliedre (rompski dodekaedar i rompski triakontaedar). Kepler je prvi



Slika 8.2: Keplerova hipoteza o najgušćem pakiranju kugli.

matematičar koji se bavio i zvjezdastim poliedrima. Važan je i u povijesti matematičke kristalografije. Naime, 1611. je postavio **Keplerovu hipotezu** da se jednake kugle najgušće slažu ako se slažu na jedan od dva načina danas poznata pod nazivima kubično i heksagonsko gusto pakiranje (slika 8.2), što je potpuno dokazano tek nedavno (konačni dokaz je prihvaćen tek 2017.). Naposlijetku, treba reći i da je Kepler jedan od važnih prethodnika otkrića infinitezimalnog računa. Dobro je iz opće kulture poznato da je renesansa ponovno otkrila antiku, a to vrijedi i za metodu ekshaustije. Kepler je u svom djelu *Nova stereometria doliorum vinariourum* (1615.) opisao određivanje volumena preko 90 rotacijskih tijela. Njegov račun je manje precizan od Arhimedovog, ali sličniji modernom: rotacijska je tijela dijelio u paralelne infinitezimalno tanke valjkaste slojeve. Posebno je poznat i jedan problem optimizacije kojeg je opisao Kepler, punukan problemom s kojim se susreo pri kupnji bačve vina za svoju drugu svadbu. Naime, trgovac je cijenu bačve doduše korektno uzimao razmjernu volumenu, no kao mjeru volumena uzimao je duljinu mokrog dijela štapa ako bi bačvu polegao na pod i kroz otvor na sredini na gornjem dijelu u bačvu ugurao štap sve dok na nasuprotnoj strani (dnu) ne dotakne rub poklopca (osnovice), vidi sliku 8.3. Kepler je primijetio da je to loša mjera volumena jer duljina mokrog dijela štapa može biti ista kod niske bačve velikog promjera i kod uske bačve malog promjera, a u prvoj će očito biti više vina nego u drugoj. **Keplerov problem bačve** glasi: Ako bačvu vina aproksimativno smatramo valjkom, za koji odnos promjera i visine (duljine) bačve će „mjerenje volumena" štapom poznate fiksne duljine rezultirati maksimalnim volumenom? Kepler je rješenje $h : r = \sqrt{2}$ dobio uspoređivanjem različitih vrijednosti $V$, no pritom je uočio da vrijedi: Ako su mjere bačve bliske „optimumu", male promjene mjera bačve rezultiraju u puno manjim promjenama volumena nego kod mjera koje su dalje od optimalnih. Drugim riječima, Kepler je uočio da se ekstremi (derivabilnih) funkcija pojavljuju u stacionarnim točkama.

Suvremenik Galilea i Keplera bio je i flamanski matematičar i fizičar **Simon Stevin** (1548.–1620.). Stevin je objavio nekoliko značajnih fizikalnih



Slika 8.3: Keplerov problem bačve.

djela. Osobito je važno njegovo djelo *De Beghinselen der Weegconst* iz 1586. u kojem se bavi paralelogramom sila, što možemo smatrati početkom vektorskog računa, zatim pitanjima ravnoteže i tlakom. Stevin tim i još nekim djelima ostvario je prvi napredak na području statike i hidrostatike nakon Arhimeda. Za matematiku je osobito značajna njegova knjižica *De Thiende* („Desetina") iz 1585., u kojoj daje prvo europsko izlaganje teorije decimalnih razlomaka (već smo rekli da ih je ranije u arapskom svijetu opisao Al-Kaši) i decimalnog mjernog sustava. Naš 27,847 kod Stevina izgleda ovako: 27 ⓪ 8 ① 4 ② 7 ③. No, trebat će još ca. 200 godina dok decimalni brojevi budu u široj uporabi.

U isto ovo doba, tijekom 16. st., pojavljuju se i još neki danas korišteni matematički simboli. Današnji znak za kvadratni korijen je vjerojatno pokrata od rukom pisanog slova r, a prvi put se pojavio 1525. u prvoj njemačkoj knjizi o algebri *Die Coss* poljskog Nijemca **Christoffa Rudolffa** (1499.–1545.). Naziv knjige, riječ *die Coss*, prilagođena je njemačka varijanta talijanske riječi *cosa*, koja pak odgovara latinskom *res*, što je tad još uvijek bila uobičajena 'oznaka' nepoznanice. Rudolffova knjiga je bila vrlo popularna te su se po njoj njemački renesansni algebraičari nazivali kosistima.

Razvoju matematičke simbolike bitno je doprinijeo znameniti francuski matematičar **François Viète** (poznat i pod latiniziranom verzijom svog prezimena Vieta, 1540.–1603.). On je bio prvi utjecajni matematičar koji je predložio korištenje slova za označavanje konstanti (koeficijenata)[2] i nepoznanica u algebarskim izrazima (koristio je suglasnike za konstante, a samoglasnike za nepoznanice). Za zbrajanje i oduzimanje je koristio tad već uobičajene simbole + i −, množenje je označavao rijčju *in*, dijeljenje razlomačkom crtom, a jednakostlatinskom riječju *aequibitur*. Tu svoju sustavnu notaciju predstavio je u djelu *In artem analyticem isagoge* (1591.). To je djelo postalo vrlo rašireno i utjecajno te nakon Viètea algebra postaje disciplina koja se bavi algebarskim jednadžbama oslonjena na simboličke oznake. On je također prvi koji je dao primjere jednadžbi koje imaju onoliko rješenja koliki im je stupanj, te je time nagovijestio osnovni teorem algebre. Viète je u navedenom djelu opisao neke već prije poznate, kao i neke svoje nove metode za rješavanje jednadžbi do stupnja 4 te iskazao vezu između koeficijenata i rješenja jednadžbe (Vièteove formule):

$$x^2 + ax + b = 0 : x_1x_2 = b, x_1 + x_2 = -a.$$

$$x^3+ax^2+bx+c = 0 : x_1x_2x_3 = -c, x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 = b, x_1+x_2+x_3 = -a.$$

No, čak i Viéte je još uvijek zahtijevao princip homogenosti u jednadžbama.

Viète je po struci bio pravnik i zastupnik u parlamentu, a matematikom se bavio u slobodno vrijeme. U njegovo doba španjolski agenti komunicirali su koristeći šifre s oko 500 znakova. Španjolski kralj Filip II., poznati borac protiv reformacije, zagovornik inkvizicije i pokretač armade protiv Engleske, je 1590. postavio zahtjev za francuskim prijestoljem na osnovi rodbinskih veza. Francuski kralj Henrik IV., protestant, odbio je te zahtjeve te je došlo do rata. Francuzi su presreli jednu španjolsku poruku te ju je kralj dao Vièteu da ju dešifrira. Viète je 15. ožujka 1590. kralju predao dešifriranu poruku, a poslije je dešifrirao i još neke druge poruke. Španjolci su da im je šifra 'razbijena' shvatili tek jedno dvije godine kasnije. Filip II. je tad tužio Francusku papi da se koristi crnom magijom, tražilo se da se Vièteu sudi kao čarobnjaku i nekromantu u paktu s vragom. No, tadašnji papa (vj. Klement VIII.) u to nije povjerovao, a čini se da ga je cijela situacija zabavljala. Ipak, pokrenuta je istraga koja do danas nikad nije službeno zaključena.

Uz Viètea je vezana još jedna matematičko-politička anegdota. Godine 1593. flamanski matematičar Adrian van Roomen postavio je zadatak s jednadžbom stupnja 45. Tadašnji nizozemski ambasador u Francuskoj je kralju Henriku IV. komentirao je da su francuski matematičari preslabi da ijedan od njih riješi Roomenov problem, ali je kralj taj zadatak dao Vièteu,

[2]Sam izraz „koeficijent" je uveo upravo Viète.

koji ga je brzo riješio uočivši da je u pozadini jednadžbe

$$
\begin{aligned}
x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} - 12300x^{39} + 111150x^{37} - 740459x^{35} + \\
3764565x^{33} - 14945040x^{31} + 469557800x^{29} - 117679100x^{27} + \\
236030652x^{25} - 378658800x^{23} + 483841800x^{21} - 488484125x^{19} + \\
384942375x^{17} - 232676280x^{15} + 105306075x^{13} - 34512074x^{11} + 7811375x^{9} - \\
1138500x^{7} + 95634x^{5} - 3795x^{3} + 45x = \sqrt{\frac{7}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{\frac{15}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}}.
\end{aligned}
$$

trigonometrijska relacija, koja je izvediva iz

$$\sqrt{\frac{7}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{\frac{15}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}} = 2\sin 12^\circ,$$

uz $x = 2\sin\frac{12^\circ}{45}$.

Zanimljivu algebrasku notaciju imao je i jedan od dva velika engleska renesansna matematičara, **Thomas Harriot** (1560.–1621.), matematičar, istraživač i astronom. On je za današnje $a$, $a^2$, $a^3$, ... pisao $a$, $aa$, $aaa$, ... Uveo je moderne znakove nejednakosti $<$ i $>$: *Signum majoritatis ut* $a > b$ *significet a majorem quam b*, *Signum minoritatis ut* $a < b$ *significet a minorem quam b*.

Suvremeni znak jednakosti također je engleskog porijekla. U Englesku je znakove $+$ i $-$ u upotrebu uveo velški liječnik i matematičar **Robert Recorde** (1510.–1558.), a on je prva osoba koja je (1557.) koristila znak $=$. Recorde je bio na raznim funkcijama u doba kralja Edwarda VI. Umro je u zatvoru u koji je dospio zbog duga vezanog za politička nadmetanja, a vjerojatno i težih zločina. Znak $=$ se nije ponovno pojavio u tisku do 1618., a uporaba tog znaka se proširila tek tijekom 17. stoljeća (tijekm 16. i 17. st. mnogi su autori za jednakost koristili $||$, a neki [, |, *ae*, *oe*, ...) [3].

Vidimo dakle da su se od modernih simbola tijekom renesanse pojavili simboli $+$, $-$, $\sqrt{.}$, $<$, $>$ i $=$. No, tijekom renesanse množenje se često označavalo s M (ili jednostavno nadopisivanjem), a dijeljenje s D (ili razlomačkom crtom), a znakovi $\times$ i $\cdot$ te $:$ i $\div$ pojavili su se tek u 17. st.

Jedna od popularnijih renesansnih notacija za dijeljenje potječe od Michaela Stifela, koji za suvremeno $24 : 8$ pisao 8)24 (a množenje označavao nadopisivanjem). Stifel je za naš $A$ piše $1A$, naš $A^2$ piše $1AA$, naš $A^3$ piše $1AAA$, .... **Michael Stifel** (1487.–1567.) je bio njemački redovnik, jedan od ranih Lutherovih sljedbenika. Neko vrijeme je čak živio kod Luthera, koji mu je našao mjesto pastora. To je mjesto Stifel izgubio nakon krivog predskazivanja kraja svijeta za 18. listopada 1533., nakon kojeg je čak morao bježati iz gradića jer su u iščekivanju kraja svijeta mještani rasprodali svoje imanje te je po nastavku postojanja svijeta Stifel bio u opasnosti za život. U kasnijem razdoblju je stjecajem okolnosti više puta morao mijenjati mjesto službe, a u to doba se počeo i ozbiljnije baviti matematikom. Kod Stifela susrećemo spominjanje iracionalnosti kao brojeva, iako mu se razmatranje temelji na EEX. Stifel kaže da iracionalni broj ne može biti racionalan, ali može biti između dva racionalna, te time nagovješćuje svojstvo gustoće skupa racionalnih brojeva u skupu realnih brojeva. Prihvaćao je samo pozitivne brojeve, a negativne smatrao besmislenim, fiktivnim (ali ih ipak proglašava manjima od nule, te kaže da se dobiju oduzimanjem brojeva od nule i da je nula između pozitivnih i negativnih brojeva). Tako je Stifel jedan od prvih matematičara koji počinju razvoj prema preciziranju pojma **skupa realnih brojeva**. Najznačajnije Stifelovo djelo je *Arithmetica integra* (1544.). U tom se djelu po prvi put u Europi pojavljuje i Pascalov trokut, a koriste se i znakovi $+$, $-$, $\sqrt{}$, no posebno je značajno jer je postalo temelj otkrića logaritama.

Da bismo opisali kako je do tog otkrića došlo, moramo se vratiti stotinjak godina unatrag. Dobro je poznato da su tijekom rane i visoke renesanse Europljani razvili moreplovstvo i oplovili čitav svijet. Tadašnja navigacija ovisila je o korištenju astronomskih instrumenata i izračuna pozicija i smjerova koristeći trigonometriju, tj. trigonometrijske tablice i formule. Pritom je nerijetko trebalo množiti i dijeliti višeznamenkaste brojeve, što je također bio težak zadatak za moreplovce zbog nedostatka ikakvih kalkulatora boljih od abakusa. Stoga se počela tražiti metoda kojom bi se množenje i dijeljenje brojeva svelo na zbrajanje i oduzimanje, po principu: Ako želim izračunati $x \cdot y$, odnosno $x : y$, onda želimo neku tablicu u kojoj bi se za $x$ očitao neki broj $X$, a za $y$ neki broj $Y$, pa se izračuna $X+Y$, odnosno $X-Y$, pa se taj zbroj odnosno razlika nađe u istoj tablici i iz nje onda očita traženi rezultat.

Prva takva metoda u široj upotrebi bila je poznata pod nazivom *prosthaphaeresis*. Ona je izvedena iz ideje njemačkog matematičara i astronoma **Paula Witticha** (ca. 1546.–1586.), koji je oko 1580. više mjeseci boravio u u Uraniborgu, opservatoriju danskog astronoma Tycho Brahea na otoku Hvenu (danas pripada Švedskoj). Wittichova ideja je bila da se koriste poznate formule tipa

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

u svrhu svođenja množenja na zbrajanje i oduzimanje.

**Primjer 32** *Recimo da želimo izračunati*

$$0{,}99027 \cdot 0{,}17365$$

*koristeći metodu prosthaphaeresis. Prvo iz trigonometrijskih tablica (recimo nekih s točnošću na pet decimala) nađemo da je* 0,99027 = $\sin 82°$ *i* 0,17365 = $\sin 10°$*. Sad izračunamo:* $\alpha - \beta = 72°$, $\alpha + \beta = 92°$*. Opet iz tablica očitamo* $\cos 72° = 0{,}309017$, $\cos 92° = -0{,}034899$*. Oduzmemo i podijelimo s 2:*

$$0{,}99027 \cdot 0{,}17365 = \frac{0{,}309017 - (-0{,}034899)}{2} = 0{,}17463.$$

No, lako je uočiti da metoda *prosthaphaeresis* nije baš prikladna ni za pojednostavljivanje dijeljenja ni potenciranja, te su matematičari nastavili tražiti bolju metodu za svođenje množenja i dijeljenja na zbrajanje i oduzimanje. Začeci te metode, tj. otkrića logaritama, mogu se naći još u 14. st., kad je d'Oresme poznavao pravilo $a^m a^n = a^{m+n}$ za pozitivne racionalne eksponente $m$ i $n$. To je u 15. st. Chuquet proširio na slučajeve kad su kao eksponenti dozvoljeni i 0 i negativni (cijeli) brojevi. Michael Stifel je pak uočio i u *Arithmetica integra* istaknuo: *Zbrajanje u aritmetičkom nizu odgovara množenju u geometrijskom nizu, a isto tako oduzimanje u prvom odgovara dijeljenju u drugom.* Stifel tu razmatra aritmetički niz prirodnih brojeva te geometrijski s kvocijentom 2:[3]

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & \dots \end{array}$$

Tu je primijetio da se primjerice $8 \cdot 16$ može računati tako da zbrojimo $3+4=7$ i u drugom redu očitamo rezultat. No, ako bismo tako htjeli pomnožiti primjerice 7 s 20, zbog velikih razmaka u drugom redu (tj. brzog rasta geometrijskog niza s kvocijentom 2), teško bi bilo procijeniti koje brojeve bi trebalo uzeti u prvom redu (teško bi bilo procijeniti ono što danas zovemo $\log_2 7$ i $\log_2 20$). Uočimo ipak da je ovdje jasna temeljna ideja: Za $x$ i $y$ koje želimo pomnožiti ili podijeliti („brojevi geometrijskog niza" s kvocijentom $q$) želimo naći odgovarajuće eksponente („brojevi aritmetičkog niza"', tj. ono što danas zovemo logaritmima od $x$ i $y$ po bazi $q$), koje onda zbrojimo odnosno oduzmemo pa nađemo taj rezultat u aritmetičkom nizu i konačni rezultat očitamo iz geometrijskog niza. Ukratko, htjelo se postiči ono što danas zapisujemo formulama

$$\log_q(xy) = \log_q x + \log_q y, \quad \log_q \frac{x}{y} = \log_q x - \log_q y.$$

Da bi se smanjili razmaci i time procjene međuvrijednosti učinile pouzdanijima, očito nam treba kvocijent geometrijskog niza bliži 1. To je shvatio

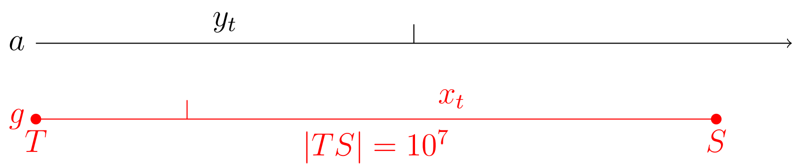
[3]Mi bismo danas rekli: U prvom redu su logaritmi po bazi 2 brojeva u drugom redu tablice.

i iskoristio **John Napier**, Laird of Merchiston (1550.–1617.). Napier bio je škotski plemić i fanatični protestant te je napisao tekst kojim je htio pokazati da je papa Antikrist, a zbog sklonosti nošenja dugih halja i noćnih šetnji po dvorcu smatrali su ga nekromantom. Matematikom se bavio samo iz hobija. Osim po otkriću logaritama, koje ćemo sad ukratko opisati, poznat je i po tome što je raniju Fibonaccijevu rešetkastu metodu za množenje učinio praktičnijom (Napierove kosti), a uveo je i decimalnu točku (znajući za Stevinove decimalne razlomke).

Napier je 20 godina života potrošio na konstrukciju prve tablice **logaritama** u povijesti. Objavio ju je 1614., a (posthumno) 1619. je pod nazivom *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio* objavljena i pripadna teorija. Kao što vidimo, on je odmah logaritme nazvao logaritmima. Izraz logaritam izveo je iz grčkih riječi *logos* i *arithmos*. Ovaj kolegij je preskromnog opsega da detaljno opišemo njegovu konstrukciju, pa ćemo samo opisati njezine glavne ideje. Tu još jednom moramo istaknuti što je bio cilj konstrukcije tablice logaritama: olakšati množenje i dijeljenje brojeva koje nalazimo u trigonometrijskim tablicama (sinusa, kosinusa, ...). U Napierovo doba se sinus još uvijek gledao kao duljina polutetive u krugovima različitih polumjera, a ono što bismo mi zvali točnošću na više decimala se, uz naravno razne tehnike izračuna tablica, postizalo uzimanjem kruga većeg polumjera. Najtočnije tadašnje tablice su uzimale polumjer $10^7$, dakle je u njima, primjerice, $\sin 30^\circ$ iznosio 5.000.000, a $\sin 90^\circ$ je bio $10.000.000 = 10^7$. Tražila se dakle metoda kojom ćemo za sinuse koje želimo množiti odnosno dijeliti dobiti tablicu njihovih logaritama koje onda možemo zbrojiti odnosno oduzeti. Napier je iz Stifelove ideje i ideje uzimanja kvocijenta geometrijskog niza bliskog 1 (uzet će $q = 1 - 10^{-7} = 0{,}9999999$) uz nekoliko međukoraka izračunao tablicu koja je sadržavala 1380 brojeva u rasponu 4.998.609,4034 i 10.000.000 (dakle, 1380 sinusa kutova u rasponu od $29{,}99^\circ$ do $90^\circ$). No, (ne jedini) problem je s tom tablicom bio taj da se nije radilo o jednom geometrijskom nizu s jedinstvenim kvocijentom, već o umnošku dva geometrijska niza. Tu je Napier pokazao svoju genijalnost i „okrenuo stvar": Umjesto da traži cjelobrojne logaritme (eksponente u geometrijskom nizu) za decimalne sinuse, Napier je odlučio uzeti cjelobrojne sinuse i tražiti odgovarajuće eksponente (logaritme).

U tu svrhu osmislio je sljedeće objašnjenje što bi to bio logaritam: Dvije čestice $a$ i $g$ gibaju se pravocrtno i kreću u istom trenutku. Čestica $a$ se giba jednoliko, konstatnom brzinom $10^7$, a čestica $g$ ima početnu brzinu $10^7$ i u svakom trenutku $t$ joj je brzina $v_t$ razmjerna trenutnoj udaljenosti $x_t$ do cilja $S$ (slika 8.4). Napier definira: Udaljenost $y_t$ koju je do trenutka $t$ prešla čestica $a$ je logaritam od „sinusa" $x_t$ (mi ćemo pisati $y = \mathrm{NapLog}\, x$).

Očigledno je ovako dobro definirana veza između $y$ i $x$. Kako bismo danas




Slika 8.4: Napierova definicija logaritma: $y_t$ je logaritam od $x_t$.

opisali ovisnost $y$ o $x$, tj. funkciju koju smo označili s NapLog? Prvo primijetimo da je očito $\mathrm{NapLog} 10^7 = 0$ (u početnom trenutku $a$ je na poziciji 0, a $g$ još mora prijeći udaljenost $10^7$), odnosno umjesto danas uobičajene nultočke 1, Napierov logaritam ima nultočku $10^7$, dakle on očito nije logaritam u suvremenom smislu. Također je očigledno Napierov logaritam padajuća funkcija (što je $g$ dalje od cilja, $a$ je bliža polazištu). Napier još nije na raspolaganju imao diferencijalni račun (ni funkcije exp i ln), ali mi ih možemo iskoristiti za otkrivanje formule Napierovog logaritma. Neka je $v_t$ brzina čestice $g$ u trenutku $t$, kad još treba prijeći put $x_t$, dakle kad je prešla put $10^7 - x_t$. Po definiciji brzine je $v = \frac{\mathrm{d}(10^7 - x)}{\mathrm{d}t} = -\dot{x}$. S druge strane, po Napierovoj pretpostavci o gibanju čestice $g$ znamo da je $v_t = k\, x_t$ za svaki $t$, $x_0 = 10^7$ i $v_0 = 10^7$. Dakle, imamo diferencijalnu jednadžbu $-\dot{x} = k\, x$, koju lako riješimo separacijom varijabli i dobijemo njeno opće rješenje $x_t = C \exp(-k\, t)$. Zbog početnog uvjeta $x_0 = 10^7$ dobijemo $C = 10^7$, dakle $x_t = 10^7 \exp(-k\, t)$. Deriviramo li to po $t$, dobit ćemo $v_t = -10^7 k \exp(-k\, t)$. Zbog početnog uvjeta $v_0 = 10^7$ sad slijedi $k = 1$. Vidimo dakle da je $x_t = 10^7 \exp(-t)$. S druge je strane, zbog jednolikog gibanja čestice $a$, $\dot{y} = 10^7$ za svaki $t$ i $y_0 = 0$, odnosno $y_t = 10^7 t$. Napierovo logaritam od $x_t$ je $y_t$, dakle $\mathrm{NapLog}(10^7 e^{-t}) = 10^7 t$. Iz $x = 10^7 \exp(-t)$ vidimo da je $t = \ln \frac{10^7}{x}$, dakle zaključujemo

$$\mathrm{NapLog}\, x = 10^7 \ln \frac{10^7}{x}.$$

Kako je Napier, nemajući na raspolaganju ovaj rezultat, postupio? Prvo je dokazao da (za jednake vremenske razmake, tj. za $t = 0, 1, 2, \dots$) pozicije $y_t$ (Napierovi logaritmi pozicija $x_t$) čine aritmetički niz s početnim članom 0 i diferencijom $10^7$, a udaljenosti $x_t$ čine geometrijski niz s početnim članom $10^7$ i kvocijentom 0,9999999. Zatim je izveo određena svojstva svog logaritma te je, među ostalim koristeći linearnu interpolaciju, izračunao tablicu logaritama sinusa ($x$-eva) u rasponu od 5.000.000 do 10.000.000. Za $x$-eve u rasponu od 0 do 5.000.000 je zatim iskoristio svojstvo

$$\mathrm{NapLog} x = \mathrm{NapLog}(2x) + \mathrm{NapLog} \frac{10^7}{2}.$$

Napier je to svojstvo, kao i svojstva

$$\text{NapLog}\,(10^7 ab) = \text{NapLog}\,(10^7 a) + \text{NapLog}\,(10^7 b),$$

$$\text{NapLog}\,(10^7 \frac{a}{b}) = \text{NapLog}\,(10^7 a) - \text{NapLog}\,(10^7 b)$$

te

$$\text{NapLog}\,(10^7 \sqrt{a}) = \frac{\text{NapLog}\,(10^7 a)}{2}$$

izveo iz već spomenute, tj. ranije dokazane, činjenice da je $y_n = \text{NapLog}\, x_n = 10^7 n$ (aritmetički niz) i $x_n = 10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^n$ (geometrijski niz), no mi te četiri formule za Napierove logaritme možemo lakše dokazati iz izvedene formule Napierovog logaritma (zadatak za čitatelja!).

Za Napierovu konstrukciju tablice logaritama saznao je **Henry Briggs** (1561.–1631.), profesor geometrije u Oxfordu. Briggs je 1615. otputovao u Edinburgh da se susretne s Napierom, te se tom prilikom Napier složio s Briggsovim prijedlogom da bi puno zgodniji bili logaritmi kojima je nultočka 1, jer time dobivamo uobičajena svojstva logaritama s obzirom na $\cdot$ i $:$. Uz to su se složili i da bi bilo zgodno da 10 puta veći broj ima za 1 veći logaritam. Drugim riječima, suglasili su se da bi ono što danas zovemo **dekadskim logaritmom** i označavamo s log bio prikladniji logaritam od izvornog Napierovog logaritma. Briggs je nakon Napierove smrti nastavio rad na logaritmima i 1624. objavio svoju tablicu *Arithmetica Logarithmica* dekadskih logaritama, koji su zbog toga ponekad poznati i kao Briggsovi logaritmi. Tablice dekadskih logaritama su sve do prije nekih 30 godina bile važno računsko pomagalo, pa ćemo kratko opisati kako se koriste. Uporaba logaritamskih tablica temelji se na pojmovima mantisa i karakteristika, a koje je uveo Briggs. Naime, svaki decimalni broj možemo zapisati notaciju koju danas nazivamo znanstvenom notacijom: $x = m \cdot 10^k$, gdje je $1 \leq m < 10$ i $k$ cijeli broj. Budući da je $\log(m \cdot 10^k) = k + \log m$, dovoljno je znati samo logaritme mantisa. Tako npr. iz tablice dekadskih logaritama možemo očitati $\log 1{,}73 = 0{,}23805$, a onda je je $\log 0{,}173 = 0{,}23805 - 1 = -0{,}76195$ i $\log 173 = 2 + 0{,}23805 = 2{,}23805$.

Za kraj ovog pregleda renesansnih (i ranih postrenesansnih) matematičkih rezultata spomenimo da je neovisno o Napieru i u isto doba kao on svoju tablicu logaritama konstruirao i **Joost Bürgi** (1552.–1632.), najpoznatiji švicarski urar svog doba. Bürgi je od 1604. radio i na carskom dvoru u Pragu, gdje je tada carski matematičar bio Keplera. Vjerojatno je da ga je upravo Kepler nagovorio da objavi svoju konstrukciju logaritama, koja je pak vjerojatno, kao i Napierova, bila inspirirana Stifelovim razmatranjima. Svoj je rad Bürgi objavio 1620. pod nazivom *Progress Tabulen*. Za razliku od Napiera, on je kao kvocijent geometrijskog niza uzeo 1,0001. Za broj

$N = 10^8 \cdot 1{,}0001^L$, Bürgi je broj $10L$ nazvao „crvenim brojem crnog broja” $N$. Suvremene oznake povlače da je Bürgijev logaritam zapravo $\frac{10}{\ln 1{,}0001} \cdot \ln \frac{x}{10^8}$.

# Poglavlje 9

# Razvoj matematike u 17. stoljeću

U prethodnom smo poglavlju već zašli u 17. stoljeće, u kojem se matematika intenzivno dalje nastavila razvijati. U ovom će stoljeću biti utemeljene analitička geometrija, teorija vjerojatnosti i infinitezimalni račun, a zanimljivi novi rezultati bit će ostvareni i na području teorije brojeva i algebre kao i primijenjene matematike. Najznačajniji matematičari ovog stoljeća bili su Descartes, de Fermat, Pascal, Newton i Leibniz.

Kao što smo vidjeli, oko 1620. kao prvo ozbiljnije računsko pomagalo osmišljene su logaritamske tablice. Ubrzo zatim (1623.) je engleski matematičar Edmund Gunter (1581.–1626.) razvio pomagalo za množenje temeljeno na svojstvima logaritama (Gunterov štap), prethodnik logaritmara. Prvi **logaritmar** konstruirao je engleski matematičar i anglikanski svećenik **William Oughtred** (1574.–1660.), prvo 1630. kružni, a onda 1632. kombinacijom dva Gunterova štapa pravi. Logaritmari će sve do 70ih godina 20. stoljeća ostati glavno računsko pomagalo u znanosti i tehnici. Uz otkriće logaritmara, Oughtred je poznat i po tome što je u svom djelu *Clavis mathematicae* (1631.) uveo simbol $\times$ za množenje [3].

U isto doba, nakon više stoljeća „mrtvila", dolazi i do oživljavanja interesa europskih matematičara za teoriju brojeva. Za to je posebno zaslužan francuski matematičar **Claude Gaspard Bachet de Méziriac** (1587.–1638.). Poznat je po svojim doprinosima području zabavne matematike; otkrio je jednu metodu konstrukcije magičnih kvadrata neparnog reda. Napisao je djelo o diofantskim jednadžbama, koje je rješavao pomoću verižnih razlomaka. No, oživljavanju interesa za teoriju brojeva najviše je doprinijeo time što je izdao novo izdanje latinskog prijevoda Diofantove *Aritmetike* s komentarima (1621.). Jednu kopiju tog izdanja posjedovao je nešto kasnije i Fermat. Ona je postala znamenita po tome da je Fermat na margini iste zapisao iskaz

**velikog Fermatovog teorema**:

> Nije moguće kub rastaviti na dva kuba ili bikvadrat na dva bikvadrata niti općenitije neku potenciju veću od druge na dvije potencije s istim eksponentom. Za to imam stvarno čudesan dokaz, no rub je ovdje preuzak, da ga zapišem.

Jedna od ključnih osoba u francuskoj, a time i europskoj matematici prve polovice 17. st. bio je redovnik **Marin Mersenne** (1588.–1648.). Bio je teolog, matematičar i teoretičar glazbe. Za matematiku je posebno značajan zbog korespondencije sa svim važnim matematičarima svoga doba, čime je omogućena razmjena ideja u doba u koje još nisu postojali matematički znanstveni časopisi niti brzi načini komunikacije. Nakon njegove smrti nađena je korespondencija s čak 78 znanstvenika (Fermat, Huygens, Pell, Galileo, Torricelli, ...). U borbi protiv praznovjerja i misticizma, podržavao je nove znanstvene ideje i branio Descartesa i Galilea od teoloških prigovora te se trudio eksponirati alkemiju i astrologiju kao pseudoznanosti. Bavio se i nekim fizikalnim problemima. Primjerice, predložio je Huygensu korištenje njihala za mjerenje vremena, čime je inspirirao njegovo otkriće prvog sata s njihalom. Mersenneov glavni matematički interes su bili prosti i savršeni brojevi, a želio je otkriti opću formulu za proste brojeve pa je počeo razmatrati brojeve oblika $M_n = 2^n - 1$. Podsjetimo se: Jošu pitagorejci znali da ako je $M_n$ prost, onda je $2^{n-1}M_n$ savršen. Lako se pak vidi da ako je $n$ složen, onda je i $M_n$ složen. Za $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19$ već su i prije Mersennea bili poznati prosti brojevi oblika $M_n$, a znalo se i da $M_{11}$ nije prost. Mersenne je smatrao se za $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127$ i $257$ dobiju prosti brojevi. Bio je u krivu za $n = 67$ i $n = 257$, a u tom rasponu nedostaju mu $n = 61, 89$ i $107$. Danas se prosti brojevi oblika $M_n$ zovu **Mersenneovim brojevima**. Do danas ih je otkriveno 51, dosad najveći je $M_{82589933}$ (2020.), a ne zna se ima li ih beskonačno mnogo.

Jedan od matematičara s kojima je Mersenne komunicirao bio je **Pierre de Fermat** (1601.–1665.). On je posebno zaslužan za obnovu interesa za teoriju brojeva, ali je i suutemeljitelj teorije vjerojatnosti i analitičke geometrije te neposredni prethodnik otkrića deriviranja. Uz iskaz velikog Fermatovog teorema, za koji se danas smatra da je sam Fermat imao dokaz samo za eksponente 3 i 4, najpoznatiji de Fermatovi rezultati iz teorije brojeva su:

- **Mali Fermatov teorem**, kojeg je iskazao u jednom pismu 1640. godine, no prvi oobjavljeni dokaz ovog teorema dao je Euler 1736. Eulerova formulacija ovog teorema glasi: Ako $p$ označava neparan prost broj, onda je formula $a^{p-1} - 1$ uvijek djeljiva s $p$, osim ako je sam $a$ djeljiv s $p$.

- Svaki neparan prost broj jednoznačno se može zapisati kao razlika dva kvadratna broja.
- Dokazao je Diofantovu tvrdnju da zbroj dva kvadratna broja ne može imati ostatak 3 pri dijeljenju s 4.
- Postavio je hipotezu da se prosti brojevi oblika $4n + 1$ jednoznačno mogu zapisati kao zbrojevi dva kvadratna broja (to je dokazao Euler).
- Otkrio je par prijateljskih brojeva $(17296, 18416)$.
- U jednom od pisama Mersenneu postavio je hipotezu da su brojevi oblika $2^{2^n} + 1$ prosti. To je provjerio za $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Ipak, 1732. Euler je pokazao da Fermatova hipoteza nije točna: broj $2^{32}+1 = 4.294.967.297$ je djeljiv sa 641, dakle nije prost. Danas se prosti brojevi koji su oblika $2^{2^n} + 1$ nazivaju **Fermatovim brojevima**.

Kao i Viète, de Fermat je bio samo hobi-matematičar, a po struci pravnik. Svoje rezultate nije objavljivao, već ih je zapisivao na marginama knjiga ili u pismima prijateljima, posebice Mersenneu. U pismenoj komunikaciji tipičan je de Fermatov stil: u svojim pismima poziva druge da pokažu rezultate koje je on već dobio. Pierre Fermat je diplomirao pravo i 1631. postao član parlamenta u Toulouseu, čime je ostvario pravo na titulu *de* u imenu. Još u doba studija počeo se baviti matematičkim problemima i iz tog doba potječu njegovi prvi rezultati o ekstremima funkcija. Tijekom svog rada u parlamentu postepeno je napredovao do viših pozicija te je 1652. dosegao najviši mogući položaj na kaznenom sudu. Ipak, ta napredovanja bila su manje posljedica posebne ambicioznosti ili zasluga, a više tada glavnog kriterija: senioriteta. Imao je niz matematičkih prijatelja, a jedan od njih, Pierre de Carcavi, je 1636. ostvario kontakt sa Mersenneom i zainteresirao Mersennea za de Fermata. De Fermatova matematička reputacija brzo je rasla, no zbog nesklonosti prema sređivanju rezultata nije ih objavljivao. S druge strane, rast de Fermatova ugleda i kompliciranost problema koje je riješio počeli su izazivati prigovore i ljutnju drugih matematičara. Među tim sukobima najpoznatiji je onaj s Descartesom. U razdoblju 1643.–1654. de Fermat nije komunicirao s ostalim znanstvenicima zbog prevelike količine posla u parlamentu, no i dalje se bavio matematikom, posebice teorijom brojeva. Nastavio je sa zadavanjem matematičkih problema drugim matematičarima, ponajviše iz teorije brojeva, no kako to područje mnogi nisu smatrali bitnim nije bilo velikog odaziva. Na molbu jednog Descartesovog studenta koji je skupljao Descartesovu korespondenciju, de Fermat je iznova pregledao svoja pisma iz doba sukoba s Descartesom te se ponovno vratio geometrijskim pitanjima vezanim za optiku. Tada je razvio zakon, poznat kao Fermatov, koji je jedan od temeljnih zakona optike: Svjetlost uvijek ide najkraćim putem.

Neovisno o Descartesu, o čijem ćemo otkriću analitičke geometrije više reći malo poslije, de Fermat je također razvio osnove analitičke geometrije razvio je. No, njegov je doprinos postao poznat tek poshumno 1679., iako je vjerojatno svoje ideje razvio nekoliko godina prije Descartesa (razlog je, naravno, u de Fermatovoj nesklonosti objavljivanju rezultata). Godine 1636. opisao je prvu spiralu različitu od Arhimedove. **Fermatova spirala** se može opisati slično kao Arhimedova, ali je udaljenost $r$ točke do ishodišta razmjerna ne kutu $\varphi$ zaokreta radij-vektora, već njegovom drugom korijenu — polarna jednadžba joj je $r = a\sqrt{\varphi}$. Krajem 1630ih godina, kad je analitička geometrija već postala poznata, posebice da se krivulje u ravnini mogu opisati jednadžbama, de Fermat je izveo i vlastitu metodu određivanja tangenti i točaka ekstrema. Taj doprinos ćemo opisati nešto kasnije, uz Descartesovu metodu.

De Fermat je kroz korespondenciju s Pascalom utemeljio i teoriju vjerojatnosti. Podsjetimo se: Iako su ljude igre na sreću fascinirale od davnina, tek u doba renesanse pomalo se prestaje rezultate primjerice bacanja kocke gledati kao rezultat utjecaja nadnaravnih sila. Prvi pokušaj matematičko-racionalnog pristupa potječe od Cardana, koji je svoju *Liber de ludo aleae* napisao oko 1562., no ona je objavljena tek 1662., dakle nakon de Fermatove i Pascalove smrti. Slično, Galileov rani racionalni pristup vjerojatnosti postao je poznat tek po objavi 1718. To je glavni razlog zašto se utemeljiteljima **teorije vjerojatnosti** smatraju Pierre de Fermat i Blaise Pascal, a ne Cardano i Galileo. Pascal i de Fermat su se godine 1654. dopisivali su se vezano za određene kockarske probleme koje je postavio tad poznati pariški kockar Antoine Gombaud, poznatiji kao  (1607.–1684.):

1. **Problem kocaka**: Isplati li se uz koeficijent 1 : 1 kladiti da će u 24 bacanja para kocaka bar jednom pasti par šestica?

2. **Problem bodova** Dva igrača igraju pravednu igru u krugovima. Onaj koji prvi ostvari 6 pobjeda dobiva sve uloge. Kako podijeliti ulog ako je igra prekinuta pri stanju 5 : 3?

Problem kocaka je naravno lako rješiv, što su ubrzo shvatili i Pascal i de Fermat: Vjerojatnost da u jednom bacanju ne padne par šestica je $\frac{35}{36}$. Stoga je vjerojatnost da u 24 bacanja nijednom ne padne par šestica jednaka $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$, dakle je vjerojatnost da u 24 bacanja bar jednom padne par šestica $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 49$ %. Dakle, odgovor na prvo pitanje je 'ne'.

Problem bodova je puno važniji i zapravo je upravo on potakao razvoj vjerojatnosti. Pascal i de Fermat su se kroz pisma suglasili oko njegova rješenja i generalizirali ga te tako u biti otkrili **binomnu raspodjelu**. Mi ćemo odmah opisati rješenje općeg slučaja. Neka je igra prekinuta u trenutku kad prvom igraču treba još $a$ bodova, a drugom još $b$ bodova do pobjede. Uzmimo $a \leq b$. Igra će najdulje trajati ako bi sad drugi igrač zaredom dobio $b-1$ put, a zatim prvi $a$ puta, odnosno da se može nastaviti, igra bi završila najkasnije za $a+b-1$ krugova. U svakom od tih $a+b-1$ krugova može nastupiti $2^{a+b-1}$ jednako vjerojatnih nizova pobjeda. Ako bi u $k$ od njih pobijedio prvi, a preostalih $l$ drugi igrač, pravedna podjela uloga je u omjeru $k : l$ (dakle, u izvornom problemu $7 : 1$).

Uočimo da je u slučaju da je $a+b-1$ velik ispisivanje svih $2^{a+b-1}$ jako teško, možda i u praksi neizvedivo. Stoga su Pascal i de Fermat razmatrali kako izbjeći ispisivanje svih mogućnosti. Pascal je pritom uočio da nisu bitni redoslijedi pobjeda, nego samo koliko krugova bi koji igrač pobijedio. Tako je shvatio da samo treba efikasan način da prebroji binarne nizove (nizove dva slova, recimo A i B za pobjede prvog odnosno drugog igrača) duljine $n = a+b-1$ u kojima jedno od slova (recimo A) dolazi točno odnosno bar $2^{a+b-1}$ puta. u tu svrhu je upotrijebio trokut koji je po njemu dobio ime.

**Pascalov trokut** je bio poznat još davno prije Pascala — rekli smo već da je binomni teorem za eksponente 2 i 3 je u Indiji i Kini bio poznat već u prvim stoljećima naše ere, a sama tablica binomnih koeficijenata koju danas nazivamo Pascalovim trokutom bila je poznata u 11. stoljeću u Kini, ali i u arapskom kalifatu (Omar Khayyam odnosno Jia Xian). Naṣīr Al-Ṭūsī je 1265. opisao konstrukciju aritmetičkog trokuta u kojem su koeficijenti razvoja $(a+b)^n$ (i to primjenjuje na računanje korijena), a u isto doba (1261.) je kineski matematičar Yang Hui (ca. 1238.–1298.) opisao razna svojstva tog trokuta. U Europi se Pascalov trokut prvi put pojavio na naslovnici djela *Kaufmanns Rechnung* (1527.) njemačkog učenjaka Petrusa Apianusa, a prvi opis u već spomenutoj *Arithmetica integra* (1544.) Michaela Stifela. *Le Traité du triangle arithmétique* (1654.). No, do Pascala interpretacija ovog trokuta bila je vezana za binomni teorem i njegovu primjenu na korjenovanje, a kombinatorna interpretacija nije eksplicitno prisutna. Tek Pascal je u svom *Le Traité du triangle arithmétique* (1654.) detaljno opisao sva bitna svojstva ovog trokuta, kojeg je zapisivao u pravokutnom obliku (slika 9.1).

Tako je Pascal uočio, a de Fermat se s njime složio, da u problemu bodova brojeve nizova s $k = 1, 2, 3, \ldots$ pobjeda prvog igrača možemo direktno očitati iz Pascalovog aritmetičkog trokuta. Recimo, za izvorni problem u kojem prvom nedostaje 1 pobjeda, a drugome 3 pobjede za osvajanje uloga, treba pogledati 4. dijagonalu (mi bismo rekli red) u trokutu: 1, 3, 3, 1. Dakle, u 1 od 8 moguích daljnjih razvoja ($1+3-1=3$ kruga igre) prvi ne bi pobijedio triput, u 3 slučaja točno dvaput, u 3 slučaja točno jednom i u 1 slučaju nijednom. Budući da mu je dovoljna jedna pobjeda za ukupni dobitak, znači

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | |
| 3 | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 | | |
| 4 | 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | 56 | 84 | | | |
| 5 | 1 | 5 | 15 | 35 | 70 | 126 | | | | |
| 6 | 1 | 6 | 21 | 56 | 126 | | | | | |
| 7 | 1 | 7 | 28 | 84 | | | | | | |
| 8 | 1 | 8 | 36 | | | | | | | |
| 9 | 1 | 9 | | | | | | | | |
| 10 | 1 | | | | | | | | | |

Slika 9.1: Pascalov aritmetički trokut.

da je pravedna podjela uloga $(1+3+3):1=7:1$, tj. odgvor na pitanje je da prvi treba dobiti $\frac{7}{8}$ uloga, a drugi $\frac{1}{8}$.

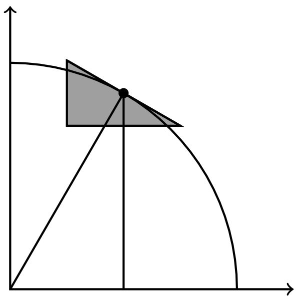
Tako vidimo da su kroz svoju korespondenciju Pascal i de Fermat uveli binomnu raspodjelu, tj. uočili da ako se neki slučajni pokus sa dva jednako vjerojatna moguća ishoda ponavlja (nezavisno) $n$ puta, vjerojatnost da se 'uspjeh' ponovi točno $k$ puta je $\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$.

Kao što smo rekli, Pascalovo i de Fermatovo utemeljenje kombinatorne teorije vjerojatnosti nije sređeno djelo, već se radilo o korespondenciji. Prva objavljena knjiga o teoriji vjerojatnosti bila je *De ratiociniis in ludo aleae* (1656.). Njen autor je bio znameniti nizozemski znanstvenik **Christiaan Huygens** (1629.–1695.), najpoznatiji po svom patentu prvog sata s njihalom. On je sistematizirao i proširio Pascalove i de Fermatove rezultate, te objavio navedenu knjigu u kojoj po prvi puta susrećemo ideju **očekivanja**, no Huygensova definicija je još malo nejasno opisana kao vrijednost igre: „Ako imamo jednaku šansu osvojiti 3 ili 7 novčića, igra „vrijedi" 5 novčića, dakle je to prikladan ulog." Sam izraz *očekivanje* potječe od jednog drugog nizozemskog matematičara, Fransa van Schootena (1615.–1660.), koji je Huygensovu knjigu preveo na latinski jezik. Od matematičkih doprinosa Christiaana Huygensa spomenimo ovdje još da je dokazao mnoge nove rezultate o konikama, a pomoću hiperbole je riješio Alhazenov problem.

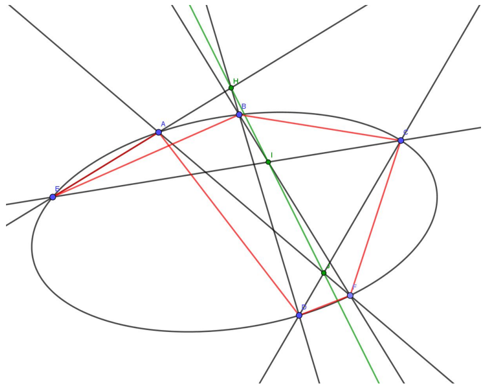
**Blaise Pascal** (1623.–1662.) je bio sin pravnika Étienna Pascala, koji se iz hobija bavio i matematikom. Otac je bio odlučio da Blaise ne smije učiti matematiku dok ne navrši 15 godina, no s 12 godina Blaise se sam počeo baviti geometrijom te ga je otac našao kako ugljenom na zidu ispisuje dokaz da je zbroj kutova u trokutu jednak dva prava kuta. To je oca tako impresioniralo da je dozvolio Blaiseu da proučava Euklidove *Elemente*. Blaise je u dobi od 14 godina počeo pratiti oca na sastanke Mersenneovog kruga. Budući da mu je otac bio zaposlen kao sakupljač poreza, Pascal je u razdoblju 1642.–1645. izumio mehanički kalkulator, poznat kao *Pascaline*. Godina 1646. bila je prekretnica u Pascalovom životu: od te godine intenzivno se posvetio vjeri i filozofiji. Povod prekretnici bila je očeva ozljeda nakon koje su ga njegovala dva brata iz jednog vjerskog pokreta koji su ostavili dubok dojam na Pascala. U isto doba Pascal se počeo baviti i fizikom. Tako je 1647. dokazao postojanje vakuuma. Nakon toga susreo se s Descartesom, koji nije vjerovao u postojanje vakuuma i koji je poslije susreta u pismu Huygensu napisao da Pascal „*... ima previše vakuuma u glavi*". Pascal je 1653. objavio djelo o ravnoteži u tekućinama u kojemu se može naći Pascalov zakon tlaka, na osnovi kojega je SI jedinica za tlak dobila ime paskal (Pa). U doba dopisivanja s de Fermatom Pascalovo zdravlje počelo je pokazivati prve znakove slabljenja. U listopadu iste godine zamalo je izgubio život u nezgodi, kad su se uplašili konji koji su vukli njegovu kočiju te je kočija ostala visjeti na mostu nad Seinom. Slabljenje zdravlja i opisana nezgoda ostavile su i psihološke posljedice te se on još više okreće vjeri. Usmjerio se na jansenizam, izvorno katolički pokret koji je 1656. proglašen heretičkim zbog neprihvaćanja potpune slobode volje. U ovom razdoblju Pascal je pisao filozofska djela, od kojih je najznamenitije *Pensées* (*Misli*), skup osobnih razmišljanja o ljudskoj patnji. U tom djelu zapisana je poznata Pascalova vaga: „Ako Bog ne postoji, ne gubi se ništa ako se vjeruje u njega, ali ako postoji, ako se ne vjeruje u njega, izgubit će se sve." Od mladih dana boležljiv i u jakim bolovima (bio je sklon migrenama), u to je doba postajao sve bolesniji. Umro je 1662. u Parizu, s 39 godina, nakon metastaziranja raka iz želuca u mozak.

Osim po utemeljenju teorije vjerojatnosti, Pascal je dao još dva velika doprinosa matematici. Jedan od njih je poznat pod nazivom **Pascalov karakteristični trokut**. Pascal je 1659. razmatrao luk kružnice i opisao trokut kojeg će kasnije Leibniz nazvati *triangulum characteristicum* i iskoristiti u svom utemeljenju infinitezimalnog računa. Za danu točku na kružnici (ili općenitijoj krivulji), Pascalov karakteristični trokut je pravokutni trokut kojemu je hipotenuza dio tangente oko promatrane točke, a katete su paralelne koordinatnim osima (u Pascalovo doba već je bilo poznato korištenje koordinatnog sustava), kao što je istaknuto sivo na slici 9.2. Pritom je taj trokut sličan pravokutnom trokutu kojemu je hipotenuza odsječak normale od točke do osi apscisa, a katete su također paralelne koordinatnim osima.

Posljednji, ali zapravo prvi, veliki Pascalov rezultat je teorem kojeg je dokazao u dobi od 16 godina (*Essai pour les coniques*, 1640.). Radi se o znamenitom **Pascalovom teoremu o mističnom heksagramu**. Pascalov cilj je bio pojednostavniti svojstva konika, ali je tako dobio i jedan od prvih



Slika 9.2: Pascalov karakteristični trokut



Slika 9.3: Pascalov teorem o mističnom heksagramu

teorema **projektivne geometrije**, koji je poopćenje Papusovog teorema:[1] Ako je u koniku upisan heksagram $ABCDEF$ (slika 9.3), onda su sjecišta tri para nasuprotnih stranica $AE$ s $BD$, $BF$ s $CE$ i $AF$ sa $CD$ kolinearna.

Dokazom ovog teorema, Pascal je postao suutemeljitelj **projektivne geometrije**. Glavnim utemeljiteljem ipak se smatra francuski matematičar Girard Desargues. Ideje projektivne geometrije (svaka dva paralelna pravca se sijeku u beskonačno dalekoj točki) zasigurno potječu iz renesansne teorija perspektive. Te je ideje dalje razvio **Girard Desargues** (1591.–1661.), francuski arhitekt i matematički autodidakt, član Mersenneovog kruga. Glavno djelo mu je *Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du Cone avec un Plan* (1639.), u kojem opisuje geometriju u kojoj se svi međusobno paralelni pravci sijeku u beskonačno dalekoj točki, a sve takve beskonačno daleke točke čine beskonačno dalek pravac. Tako, među ostalim,

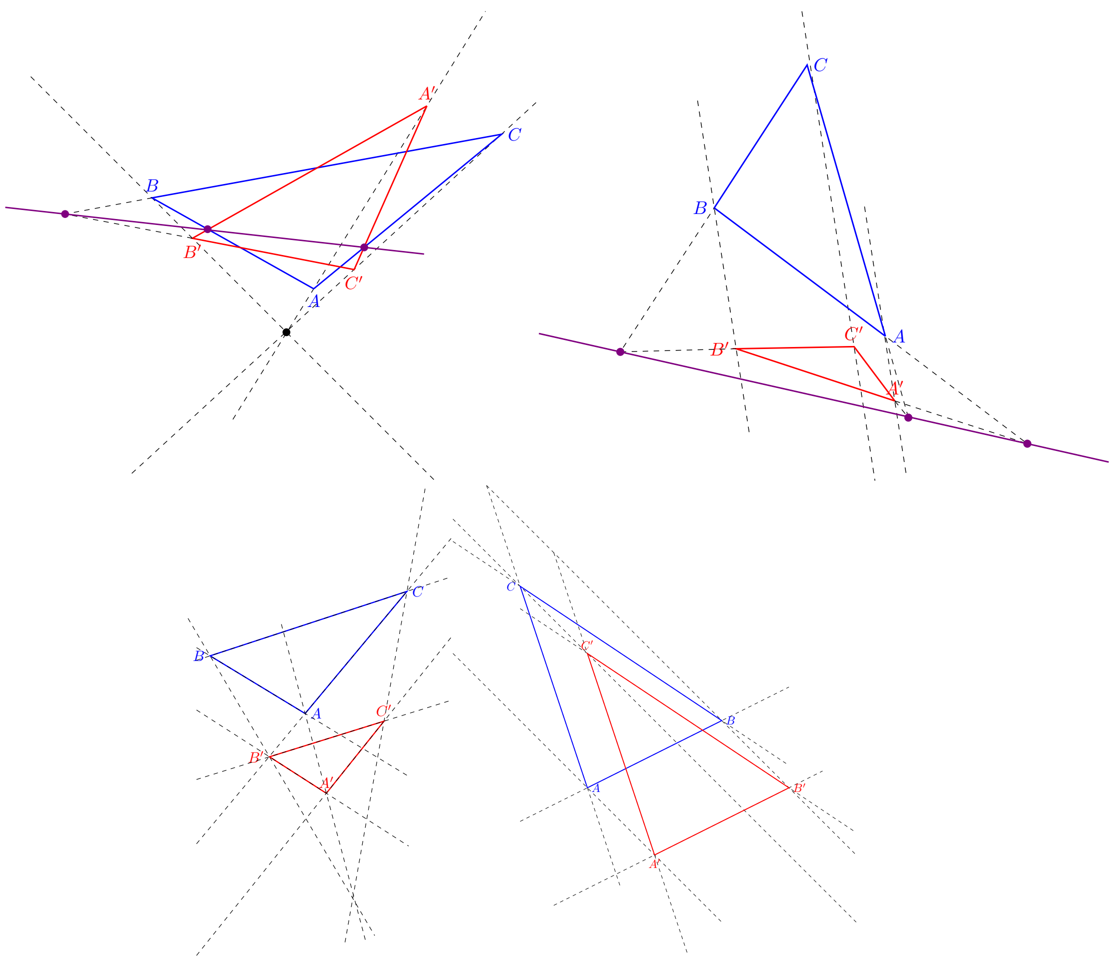
[1] Heksagram $ABCDEF$ je unija dužina $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ i $\overline{FA}$.

asimptote krivulja postaju zapravo tangente u beskonačno dalekim točkama. Te je ideje poopćio i na trodimenzionalni slučaj: paralelne ravnine sijeku se u beskonačno dalekom pravcu, a svi beskonačno daleki pravci čine jednu beskonačno daleku ravninu. Desargues je uočio i projektivnu ekvivalenciju konika (hiperbola je u projektivnoj geometriji također zatvorena, a ima dvije beskonačno daleke točke, dok parabola ima jednu; asimptote hiperbole su tangente u tim beskonačno dalekim točkama, a u beskonačno dalekoj točki parabole tangenta na parabolu je beskonačno daleki pravac). Inače, najpoznatiji je Desarguesov rezultat teorem kojeg sam nikad nije objavio: **Desarguesov teorem**. On glasi: Neka su dani trokuti $ABC$ i $A'B'C'$. Ako se pravci $AA'$, $BB'$ i $CC'$ sijeku u jednoj točki[2] onda su sjecišta $AB$ s $A'B'$, $AC$ s $A'C'$ i $BC$ s $B'C'$ kolinearna. Pritom svako od sjecišta može biti i u beskonačnosti. Mogući slučajevi Desarguesovog teorema ilustrirani su slikama 9.4.

No, projektivna geometrija se nije bitnije razvijala do 19. stoljeća. Jedan razlog je što je Desarguesovo djelo bilo tiskano u malo primjeraka, koji su svi nestali dok jedan nije otkriven 1950., a dotad je ostalo poznato samo kroz jednu kopiju u obliku rukopisa. Uz to, radi se o jako sažetom djelu kompliciranom za čitanje pa dugo vremena nije imalo bitan utjecaj. Naposlijetku, a možda i najvažnije, u isto doba Descartes utemeljio bitno praktičniju i neposredno primjenjiviju **analitičku geometriju**.

Neposredni prethodnik utemeljenja analitičke geometrije bio je Dubrovčan **Marin Getaldić** (1568. – 1626.). Godine 1607. objavio je *Variorum problematum collectio*, u kojoj započeo razvijati primjenju algebru na gemetriju, što je u jasnijem i dorađenijem obliku učinio u svom glavnom, ujedno posljednjem, matematičkom djelu *De resolutione et de compositione mathematica, libri quinque* (objavljeno posthumno, Rim, 1630.). U prvom od ta dva djela Getaldić daje 42 geometrijska zadatka s rješenjima. Dio, 15, od njih rješava metodom metodom sinteze (compositione) uz dodatak consectarium (posljedica, odnosno dodatni zaključak uz numerički komentar). Ta je metoda doduše čisto geometrijska, ali u consectarium-ima Getaldić, na temelju Vièteovih djela, donosi zaključke koji iskazuju određene odnose među zadanim i traženim geometrijskim veličinama, a koji bi se mogli izraziti i algebarski. No, Getaldić ih nije zapisao u obliku jednadžbi. Dodatnim numeričkim primjerima, kakvih nema u Vi?tea, Getaldić ovdje dodatno ističe algebarsku stranu pojedinog zadatka. U *De resolutione et de compositione mathematica* je sustavno i detaljno primijenio algebarski način razmišljanja, a koji se svodi na opis geometrijskih odnosa kao algebarskih identitea. Uz to tu razmatra i neodređene probleme, dakle situacije s nejedinstvenim rješenjem i upravo

[2]Ako za trokute vrijedi to svojstvo, kažemo da je jedan projekcija drugog.




Slika 9.4: Desarguesov teorem

taj aspekt ga ističe kao neposrednog prethodnika analitičke geometrije. Primjerice, Getaldić opisuje konstrukciju trokuta za kojeg je poznata duljina jedne stranice i to da je razlika duljina drugih dviju stranica jednaka polovini duljine zadane stranice. Getaldić uvodi algebarske oznake ($B$ za zadanu duljinu i $A$ za nepoznatu razliku duljina dijelova na koje visina na zadanu stranicu dijeli tu stranicu) pa iz podataka algebarski izvodi rezultat da je umnožak od $4A$ i $B$ jednak sebi samom, te budući da to vrijedi za sve $A$ i $B$ zaključuje da zadatak ima beskonačno mnogo rješenja. Moguće je, ali nipošto pouzdano, da su ova Getaldićeva djela utjecala i na oca analitičke geometrije, Descartesa.

Kao što smo rekli, u antičkoj Grčkoj su se zadaci koje danas smatramo algebarskima razmatrali geometrijski. Ipak, neki grčki matematičari su koristili pojmove poput duljina, širina i visina da opišu pozicije (Apolonije, Arhimed). Kasnije su neki arapski matematičari (Al-Māhānī) pokušali neke geometrijske probleme formulirati algebarski. Krajem srednjeg vijeka, d'Oresme je dao prikaze ovisnosti *latitude* o *longitudi*. Kroz renesansu, do početka 17. st. je postalo očito da su za opis fizikalne prirode bitne i druge krivulje osim kružnica i pravaca. No, jedna od glavnih prepreka uvođenja koordinatnog sustava i korištenja jednadžbi za opis krivulja bio je još uvijek standardni princip homogenosti u jednadžbama. To je konačno uspio nadići znameniti matematičar i filozof **René Descartes** (1596.–1650.), poznat i pod svojim latiniziranim prezimenom Cartesius.

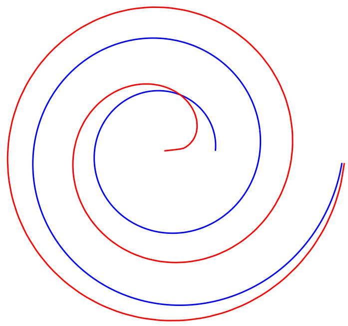
Descartes je bio iz ugledne obitelji. Bio je boležljivo dijete, a od osme godine odgajan je u isusovačkoj školi. Usprkos strogoj disciplini, zbog slabog zdravlja imao je dozvolu ležati ujutro do 11 sati u krevetu. Taj je običaj i kasnije zadržao. Kad je 1647. posjetio Pascala, rekao mu je da je jedini način za dobro raditi matematiku i sačuvati zdravlje ne ustajati ujutro ranije nego što imaš potrebu za ustajanjem. Studirao je pravo, a zatim odabrao vojničko zanimanje te je 1617. otišao u tridesetogodišnji rat. Prema vlastitim riječima, svoje prve ideje nove filozofije i analitičke geometrije dobio je u tri sna u noći 10. studenoga 1619., u doba ratovanja na Dunavu. Iz vojske je izašao 1620. te idućih pet godina proveo putujući Europom. U Parizu se nastanio 1626. te se dvije godine kretao u društvu i bavio konstrukcijama optičkih instrumenata. 1628. godine je upoznao kardinala de Bérullea, koji je bio toliko impresioniran Descartesom da ga je nagovorio da život posveti otkrivanju istine. Descartes je pristao te se, kako bi mogao voditi mirniji život, preselio u Nizozemsku gdje je živio dvadeset godina potpuno posvećen filozofiji i matematici. Tu je napisao i svoje poznato djelo *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la verité dans les sciences* o univerzalnoj znanosti. 1649. godine ga je švedska kraljica Kristina pozvala na svoj dvor da bi ju podučavao matematiku. Descartes je prihvatio, ali je ona zahtijevala ranojutarnju poduku te je Descartes, dotad naviknut do kasna jutra biti u krevetu, bio prisiljen u pet sati ujutro prolaziti hladan put iz jednog dijela dvorca u drugi. Tako je dobio upalu pluća i unutar dva mjeseca boravka u Stockholmu umro. Descartes ostaje jedan od najvećih filozofa i znanstvenika u povijesti, iako nije bio široko obrazovan jer je bio nesklon učenju koje ne daje konkretnu korist. Nikad se nije ženio i nema potomaka, iako je imao jednu vanbračnu kćer koja je rano umrla.

Osnove analitičke geometrije izložio je u prilogu *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la verité dans les sciences* (1637.). Taj prilog nosi naslov *La Géométrie* i sastoji se od tri dijela. u tome prilogu Descartes je uveo danas uobičajene oznake za konstante (početak abeced) i varijable (kraj abecede).

Prema anegdoti, Descartes je inspiraciju za uvođenje koordinatne ravnine dobio promatrajući muhu na stropu i pokušavajući opisati njezine pozicije. Descartesova je ideja bila da se svaka točka u ravnini može jednoznačno opisati parom realnih brojeva $x$ i $y$, koji opisuju udaljenosti te točke od dva fiksna, međusobno okomita pravca (koordinatne osi). Uočio je da jednadžbe $f(x,y)=0$ mogu biti neodređene, ali se njihova rješenja mogu opisati kao koordinate točaka koje čine neku krivulju. Posebno, linearne jednadžbe $ax+by+c=0$ predstavljaju pravce, a kvadratne $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ konike. Tako su, primjerice, kod Descartesa $x$, $x^2$ i $x^3$ jednostavno brojevi kojima odgovoaraju jednodimenzionalni objekti (krivulje), odnosno $x^2$ više ne mora predstavljati površinu kvadrata stranice $x$, već je to broj kojemu geometrijski odgovara jednodimenzionalni objekt (parabola). Također, sad se može konstruirati krivulja koja predstavlja kubnu jednadžbu, a ne samo rješenja kubne jednadžbe pomoću krivulja. Time je, očito, izbjegao ovisnost o principu homogenosti. Descartes je komentirao i da bi se iste ideje mogle primijeniti u prostoru korištenjem tri koordinate, no tu ideju nije dalje razradio.

Prvi dio *La Géométrie* sadrži osnovne crte analitičke geometrije, opisane kroz diskusiju Papusovog problema: Neka je zadano po $n$ pravaca i kutova u ravnini, te duljina $a$. Udaljenost točke $T$ do pravca $p_i$ definirajmo kao duljinu odsječka pravca koji prolazi kroz $T$ i s $p_i$ tvori kut $\phi_i$. Zadatak je pronaći geometrijsko mjesto točaka $T$ u ravnini za koje je umnožak udaljenosti do prvih $n/2$ pravaca u konstantnom omjeru prema umnošku udaljenosti prema ostalim pravcima, ako je $n$ paran, odnosno umnožak udaljenosti do prvih $(n+1)/2$ pravaca u konstantnom omjeru prema umnošku udaljenosti prema ostalim pravcima i $a$, ako je $n$ neparan.

U drugom dijelu *La Géométrie* se bavi krivuljama, koje je podijelio dijeli



Slika 9.5: Logaritamska spirala (plavo) vs. Fermatova spirala (crveno)

na geometrijske i mehaničke.[3] Tu je opisao i kubičnu krivulju koja danas nosi ime po njemu: **Kartezijev list** $x^3 + y^3 = 3axy$. Njegov je oblik točno opisao samo u prvom kvadrantu, no pretpostavio je simetriju četvrtog reda, dok zapravo postoji samo jedan list i radi se o otvorenoj krivulji. Spomenimo ovdje da je godinu kasnije, 1638., Descartes otkrio **logaritamsku spiralu**, krivulju kod koje je za svaku njenu točku kut radijvektora s tangentom u toj točki konstantan. Nju je kasnije detaljno analizirao Jacob Bernoulli, koji ju je nazvao *spira mirabilis*. Na slici 9.5 vidi se usporedba logaritamske spirale (plavo) s Fermatovom (crveno).

U trećem dijelu *La Géométrie* se Descartes doduše bavi problemima vezanim za krivulje, ali se u biti radi o pregledu tada poznate algebre. Prije nego kažemo više o tome, zaključimo dakle da su Descartes i neovisno od njega, ali u to doba nepoznato, de Fermat utemeljili analitičku geometriju,[4] koja je izuzetno brzo postala poznata jer je omogućila niz novih primjena, a postala je i temelj utemeljenju infinitezimalnog računa.

Također, Descartesov pristup je (to smo već spomenuli) povezan i s nerješivošću tri klasična problema. Naime, posljedica njegove jednodimenzionalne interpretacije veličina je da se množenjem duljina dobije duljina, a ne površina, dijeljenjem duljina ne dobijemo samo omjer, nego također duljine, a i kvadriranje pravokutnika odgovara drugom korijenu duljine (tj. uočio je kako EEVI12 i EEVI13 iskoristiti za množenje i dijeljenje duljina). Dakle, Descartes je uočio da se rezultati primjene sve četiri osnovne računske operacije i drugih korijena na duljine mogu konstruirati ravnalom i šestarom. To

[3]To odgovara današnjoj podjeli na algebarske i transcendentne krivulje koju je uveo Leibniz.

[4]Ni Descartes ni Fermat nisu koristili negativne koordinate. To će poopćenje uvesti nekoliko desetljeća kasnije Newton i Leibniz. Newton je također, čini se, prvi koji je koristio polarne koordinate i naziv analitička geometrija.

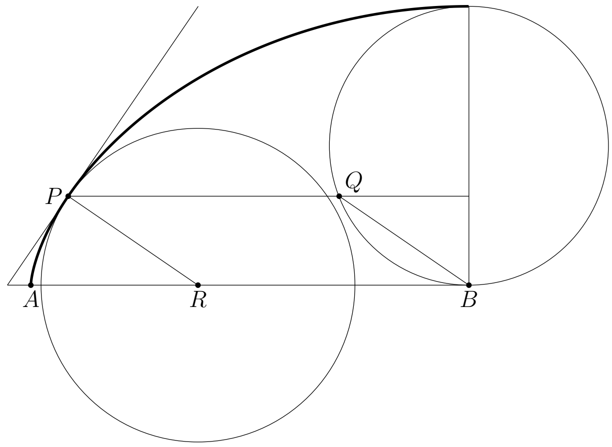
znači i da se svi problemi koji se svode na kvadratne jednadžbe s racionalnim koeficijentima mogu se riješiti ravnalom i šestarom. No, danas znamo da vrijedi i obrat: Ako je zadana jedinična duljina 1, ravnalom i šestarom se mogu konstuirati one i samo one duljine koje se iz 1 mogu izračunati s konačno mnogo operacija $+$, $-$, $\cdot$, $:$ i $\sqrt{\cdot}$. Brojevi koji odgovaraju tim konstruktibilnim duljinama zovu se euklidski brojevi i u njih, među ostalim, spadaju i Euklidove iracionalnosti iz EEX. Posebno, budući da je $\pi$ transcendentan (što je 1882. dokazao Ferdinand von Lindemann), slijedi da problem kvadrature kruga nije rješiv. S druge strane, može se dokazati da ako kubni polinom s cjelobrojnim koeficijentima ima rješenje u euklidskim brojevima, onda ima bar jedno racionalno rješenje. Stoga ni problem duplikacije kocke ni trisekcije kuta od $60°$ nisu rješivi ravnalom i šestarom.

Osvrnimo se sad na algebarski doprinos René Descartesa. Kao što smo vidjeli, krajem 16. st. prve primjere polinomijalnih jednadžbi stupnja $n$ s $n$ rješenja dao je Viète.[5] S druge strane, Thomas Harriot je u isto doba znao da ako su $a$, $b$ i $c$ rješenja kubne jednadžbe, ona se može zapisati u obliku $(x-a)(x-b)(x-c)=0$. No, prva osoba koja je ustvrdila da vrijedi **osnovni teorem algebre**, tj. da svaki polinom stupnja $n$ (s kompleksnim ili realnim koeficijentima) ima točno $n$ nultočaka u skupu kompleksnih brojeva, bio je 1629. francuski matematičar **Albert Girard** (1595.–1632.). On je ustvrdio da svaka jednadžba stupnja $n$ (s realnim koeficijentima) ima $n$ rješenja, s tim da dozvoljava da se ta rješenja nalaze u nekom još većem skupu nego je to skup kompleksnih brojeva. Tvrdnju o broju rješenja su tadašnji matematičari prihvatili kao očitu, pa se posljedično gotovo 200 godina nije pokušavalo dokazati da *postoji n rješenja*, nego da *su rješenja kompleksni brojevi.* Descartes pak navodi i da se može zamisliti da svaka jednadžba $n$-tog stupnja ima $n$ rješenja, ali da ta „zamišljena rješenja” ne odgovaraju nikakvoj realnoj vrijednosti.[6] Zahvaljujući Descartesu postalo je poznato i Harriotovo otkriće da ako je $x_0$ nultočka polinoma $p$, onda je $p(x)=(x-x_0)q(x)$.[7] Ta činjenica je, naravno, bitan korak u dokazu osnovnog teorema algebre. Zanimljivo je spomenuti i **Descartesovo pravilo**, koje je bez dokaza naveo u trećem dijelu *La Géométrie*: Broj pozitivnih rješenja jednadžbe jednak je ili za paran broj manji od broja promjena predznaka koeficijenata (u standardnom redoslijedu).

[5]Al-Hvarizmi je znao primjer kvadratne jednadžbe s dva rješenja.

[6]Upravo Descartes je prvi koristio naziv imaginaran u kontekstu kompleksnih brojeva.

[7]Citirano iz *La Géométrie*: „Iz gornjega je očigledno da je suma jednadžbe koja ima više korijena uvijek djeljiva binomom koji se sastoji od nepoznanice umanjene za vrijednost jednog od istinitih korijena, ili plus vrijednost jednog od lažnih korijena.” Descartes pod sumom jednadžbe misli na polinom kojeg dobijemo kad sve članove prebacimo na lijevu stranu. Istiniti korijeni su pozitivni, a negativne smatra ’lažnim’.



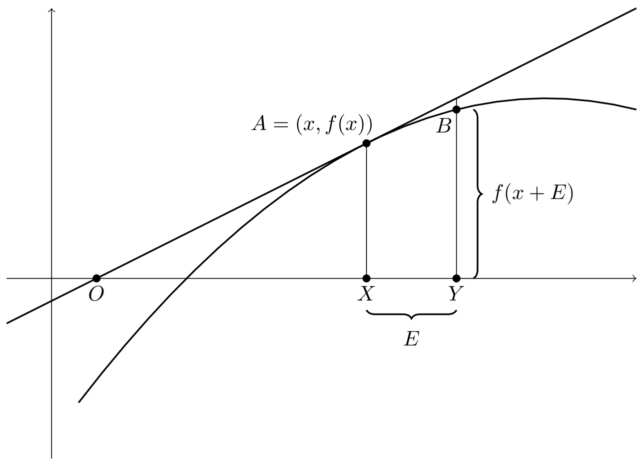

Slika 9.6: Descartesova konstrukcija tangente na cikloidu.

**Primjer 33** *Jednadžba* $7x^5 - 6x^2 + 8x - 9 = 0$ *prema Descartesovom pravilu ima ili* 3 *ili* 1 *pozitivno realno rješenje. Supstitucija* $x$ *s* $-x$ *daje jednadžbu* $-7x^5 - 6x^2 - 8x - 9 = 0$*, koja po Descartesovom pravilu nema pozitivnih rješenja, dakle polazna jednadžba nema negativnih rješenja. Budući da* 0 *očito nije rješenje, zaključujemo: Jednadžba* $7x^5 - 6x^2 + 8x - 9 = 0$ *ima ili točno jedno (pozitivno) realno rješenje (a ostala četiri su kompleksna) ili pak ima tri (pozitivna) realna rješenja (i dva kompleksna).*

Brzo prihvaćanje analitičke geometrije i veza tangente s brzinom je već za Descartesovog života otvorila pitanje: Kako odrediti tangentu na krivulju čija je jednadžba u Kartezijevom koordinatnom sustavu poznata? Budući da je pravac u Kartezijevom koordinatnom sustavu jednoznačno određen točkom (ovdje: točkom krivulje u kojoj tražimo tangentu) i koeficijentom smjere, vidimo da se radi o problemu određivanja koeficijenta smjera tangente, dakle onog što danas nazivamo derivacijom. Vidili smo da je Pascal primjerice razmatrao karakteristike tangente na kružnicu. Descartes i de Fermat imali su bitno općenitije metode određivanja tangenti, koje ćemo sad kratko opisati jer se radi o važnim neposrednim prethodnicima otkrića diferencijalnog računa.

Descartes je problem određivanja tangente svodio na problem određivanja normale na oskulacijsku kružnicu.[8] Tako je primjerice odredio tangentu na krivulju **cikloidu**. Podsjetimo se: Cikloida je krivulja koja nastaje kao trajektorija točke na kružnici, ako se ta kružnica kotrlja po pravcu. Ta je krivulja

[8]Oskulacijska kružnica u nekoj točki ravninske krivulje je kružnica koja prolazi kroz tu točku i u toj točki ima istu tangentu i zakrivljenost kao krivulja.




Slika 9.7: Fermatova konstrukcija tangente na krivulju $y = f(x)$.

u 17. stoljeću bila predmet interesa mnogih matematičara,[9] među ostalim i jer ima razna zanimljiva fizikalna svojstva (primjerice, ima svojstvo tautohrone, što je Huygens iskoristio u svojoj konstrukciji sata s njihoalom), a ime joj je dao Galileo. Neka je $P$ točka cikloide u kojoj tražimo tangentu (slika 9.6). Neka kružnica koja generira cikloidu dodiruje pravac po kojem se kotrlja u točki $B$ kad se nalazi u položaju $*$ u kojem bi označena točka bila na najvišem položaju (a $A$ je polazna pozicija točke na toj kružnici, dakle je $AB$ pravac po kojem se kotrlja kružnica). Kroz $P$ povučemo paralelu s $AB$ i odredimo njezino sjecište $Q$ s kružnicom u položaju $*$. Tada je paralela s $QB$ povučena u $P$ normala na cikloidu u točki $P$, njeno sjecište $R$ s $AB$ je središte oskulacijske kružnice, a okomica na $PR$ u $P$ je naravno tražena tangenta.

De Fermatova metoda je sličnija suvremenom pristupu. Neka je $A = (x, f(x))$ točka u kojoj tražimo tangentu $y = kx + l$ na krivulju $y = f(x)$ (slika 9.7). Tangenta siječe os apscisa u točki $O$. Uočimo da je koeficijent smjera tangente $k = \frac{f(x)}{|OX|}$, dakle cilj nam je odrediti $|OX|$. Za mali prirast $E$ su $\triangle OXA$ i $\triangle OYB$ približno slični jer je $f(x+E) \approx k(x+E)+l$ (tangenta je pravac koji najbolje aproksimira krivulju oko dane točke), dakle

$$|OX| : (|OX| + E) \approx f(x) : f(x+E),$$

odnosno

$$|OX| \approx \frac{f(x)}{\frac{f(x+E)-f(x)}{E}}.$$

[9] Primjerice, Pascal je odredio volumen i oplošje odgovarajućeg rotacijskog tijela.

Fermat nakon izračunavanja desne strane uzima $E = 0$ i tako dobiva $|OX|$. Primjerice, ako tražimo tangentu na krivulju $y = x^3$ u nekoj njezinoj točci $(x, x^3)$, imamo $|OX| : (|OX| + E) \approx x^3 : (x + E)^3$, dakle

$$|OX| \cdot (x^3 + 3x^2E + 3xE^2 + E^3) \approx |OX| \cdot x^3 + Ex^3,$$

$$|OX| \cdot (3x^2E + 3xE^2 + E^3) \approx Ex^3,$$

$$|OX| \approx \frac{Ex^3}{3x^2E + 3xE^2 + E^3} = \frac{x^3}{3x^2 + 3xE + E^2},$$

pa uz $E = 0$ dobijemo $|OX| = fracx^3 3x^2 = \frac{1}{3}x$, odnosno koeficijent smjera tangente je $k = \frac{x^3}{\frac{1}{3}x} = 3x^2$, što je naravno točno (to je $f'(x)$).

Fermat je svoju metodu dopunio i za određivanje ekstrema. To ćemo samo opisati na primjeru.

**Primjer 34** *Potrebno je zadanu dužinu duljine a podijeliti na dva dijela maksimalnog umnoška duljina. Dakle, tražimo x tako da je* $0 \leq x \leq a$ *i* $x \cdot (a - x)$ *maksimalno. De Fermat izjednačuje* $f(x)$ *i* $f(x + E)$,[10] *odnosno*

$$x(a - x) = (x + E)(a - x - E)$$

*, što daje*

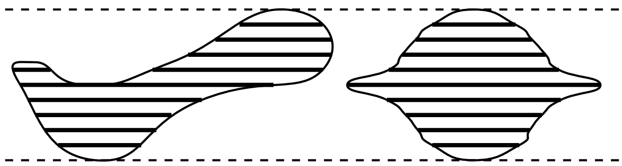
$$Ea - 2xE - E^2 = 0.$$

*Budući da je E malen, ali nije* 0*, podijelimo s E. Nakon toga ga kao u zadnjem koraku određivanja koeficijenta smjera tangente zanemarimo i dobijemo* $x = a/2$.

Fermat doduše nije objavio ove svoje metode, ali tadašnji su matematičari znali za njih te su se mnogi nadostavili. Ubrzo, samo par desetljeća nakon Descartesa i de Fermata, Newton i Leibniz će utemeljiti infinitezimalni račun. No, spomenimo još nekoliko važnih prethodnika tog otkrića. Dok su de Fermat, Pascal i Descartes važni kao prethodnici otkrića deriviranja, glavni prethodnici otkrića integriranja sredinom 17. stoljeća su Cavalieri, Torricelli i de Roberval.

Talijanski matematičar **Bonaventura Francesco Cavalieri** (1598.–1647.) je bio Galileov student. Nastavio je razvijati Keplerove metode računanja površina i volumena. Svoju metodu nedjeljivih veličina objavio je 1635. pod naslovom *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*. Cavalieri ravninske figure smatra sastavljenim od paralelnih dužina,

[10] Očito je i on bio svijestan karakteristike ekstrema koju je uočio Kepler, a to je da se radi o stacionarnim točkama, a to su sad točke u kojima je koeficijent smjera tangente jednak 0.



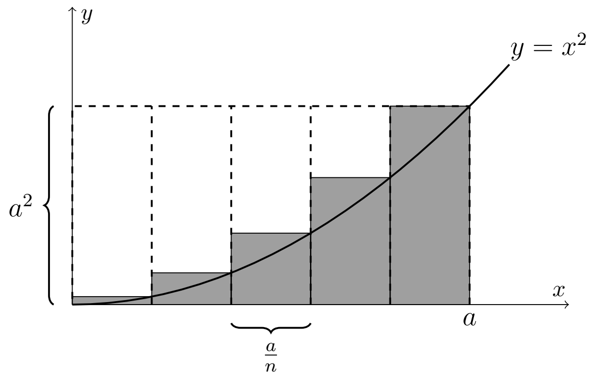
Slika 9.8: Cavalierijev princip

a prostorne od paralelnih likova, odnosno Cavalierijeve nedjeljive veličine su beskonačno tanke. Stoga je **Cavalierijev princip** u izvornoj formulaciji ovako iskazan: Ravninske (prostorne) figure, tj. njihove površine (volumeni), stoje u istom omjeru kao ukupnost njihovih nedjeljivih veličina (slika 9.8). Koristeći taj princip, Cavalieri je uspio odrediti površine, koje bismo danas zapisali kao $\displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{d}x$. Među ostalim, tako je jednostavnije dobio Arhimedov rezultat o volumenu kugle.

Kao i Cavalieri, talijanski znanstvenik **Evangelista Torricelli** (1608.–1647.) bio je Galileov student. Važan je i u povijesti fizike, a za našu temu je bitan jer je kombinirao izvornu metodu ekshaustije s Cavalijerijevom metodom nedjeljivih veličina. Dobio je mnoge rezultate, od kojih je najznamenitija **Torricellijeva truba**, koja je primjer neograničenog tijela ograničenog (konačnog) volumena. Radi se o rotacijskom tijelu koje nastaje rotacijom hiperbole $x\,y = 1$ ($1 \leq x < \infty$) oko $x$-osi. Toricelli je pokazao da je njen volumen jednak $\pi$ (mi bismo pisali $\int_1^\infty \frac{\pi \mathrm{d}x}{x^2} = \pi$, pa se radi o prvom primjeru konvergentnog nepravog integrala u povijesti). Poznati filozof i Torricellijev suvremenik Thomas Hobbes to je otkriće komentirao 1672.: *Da bi se to smatralo razumnim, ne treba biti geometar ni logičar, nego lud.*

Torricelli je također pokazao da je površina ispod jednog luka cikloide točno tri put veća od površine kruga koji ju generira. Taj rezultat je dobio i Torricellijev suvremenik, francuski znanstvenik **Gilles Personne de Roberval** (1602.–1675.). On je najznačajniji po toma da je precizirao Cavalierijevu metodu: Prema Robervalu, površina mora biti sastavljena od površina, a ne duljina (i analogno za volumene). Tako popravljenom metodom, dijeljenjem na tanke pravokutnike, odredio je površine ispod $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$), tj. ono što danas označavamo s $\displaystyle\int_0^X x^n \, \mathrm{d}x$.

Ovih nekoliko rezultata koji jasno vode prema deriviranju i integriranju nisu jedini iz ovog doba. No, u usporedbi s modernim pristupom vidimo da u svim slučajevima nedostaju dvije bitne karakteristike **infinitezimalnog računa**: veza između određivanja tangente i površine (brzine i puta,




Slika 9.9: Wallisovo određivanje površine ispod $y = x^2$.

tj. između deriviranja i integriranje), te efikasne računske metode. Pod utjecajem Cavalierijevih i Torricellijevih rezultata prvi korak u smjeru svođenja ovakvih izvoda na račun učinio je John Wallis, a osim Torricellija je još i Isaac Barrow uočio vezu između problema puta i brzine.

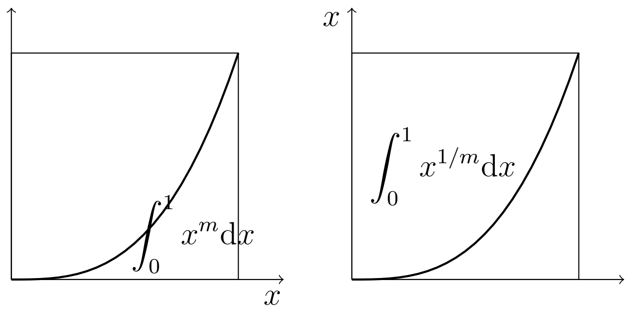
**John Wallis** (1616.–1703.) je bio najutjecajniji engleski matematičar prije Newtona. Bio je profesor geometrije u Oxfordu. U doba engleskog građanskog rata angažirao se na strani parlamenta i bio poznat po svom znanju kriptografije. Bio je i jedan od ranih povjesničara matematike, a bavio se i logikom i engleskom gramatikom. Iz grupe matematičara s kojima se nalazio nastao je *Royal Society*. U svom djelu *De sectionibus conicis* (1655.) uveo je simbol $\infty$. Najznačajnije Wallisovo djelo je *Arithmetica infinitorum* (1656.),[11] čiji naslov sugerira glavni Wallisov doprinos: preciznije i efikasnije računske metode za površine i volumene.

**Primjer 35** *Kako je Wallis odredio površinu ispod $y = x^2$ između $0$ i $a$? Rastavio ju je na $n$ uskih pravokutnika širine $\frac{a}{n}$ (slika 9.9). Traženu površinu usporedio je s površinom površinom pravokutnika $[0, a] \times [0, a^2]$, koja je naravno jednaka $a^3$, ali ju isto gleda rastavljenu na $n$ pravokutnika površine $\frac{a}{n} \cdot a^2$. Stoga je omjer tih površina jednak:*

$$\frac{\frac{a}{n} \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^2 + \frac{a}{n} \cdot \left(\frac{2a}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{a}{n} \cdot \left(\frac{na}{n}\right)^2}{\frac{a}{n} \cdot a^2 + \frac{a}{n} \cdot a^2 + \ldots + \frac{a}{n} \cdot a^2} =$$

$$= \frac{0^2 + 1^2 + \ldots + n^2}{n^2 + n^2 + \ldots + n^2} = \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

[11]U ovom djelu se može naći i Wallisov produkt $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \ldots$.




Slika 9.10: $\int_0^1 x^n \mathrm{d}x + \int_0^1 x^{1/n} \mathrm{d}x = 1$.

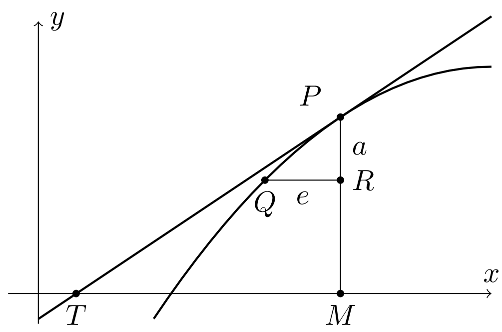
*pa je zaključio da je taj omjer za velike $n$ sve bliži $\frac{1}{3}$, odnosno da je tražena površina $\frac{1}{3}a^3$.*

Veća novost kod Wallisa je da je iz tako dobivenih površina ispod $y = x^n$ dobio površine ispod $y = x^{1/n}$. Naime, uočio je (slika 9.10) da je površina ispod $y = x^{1/n}$ komplementarna (u odnosu na kvadrat $[0, 1] \times [0, 1]$) površini ispod $y = x^n$, odnosno dobio je zaključak kojeg danas bilježimo ovako:

$$\int_0^1 \sqrt[n]{x} \mathrm{d}x = \frac{n}{n+1}.$$

Neposredni prethodnik Newtonu je bio **Isaac Barrow** (1630.–1677.). Kao dječak je navodno bio tako naporan, da se njegovog oca moglo čuti u molitvi, da ako Bog uzme k sebi koje od njegove djece, najlakše bi mu bilo ostati bez Isaaca. Studirao je (bez specijalizacije, kako je tada bilo uobičajeno) na *Trinity College* u Cambridgeu. Po završetku studija ostao je raditi kao *fellow* s istaknutim znanjem grčkog, teologije i prirodnih znanosti. U razdoblju 1655.–1659. putovao je Mediteranom, a tijekom puta u Tursku preživio je i aktivno sudjelovao u obrani broda od gusarskog napada. Boravio je u Smirni pa u Konstantinopolu, baveći se prvenstveno pravoslavnom teologijom. Po povratku u Englesku postao je profesor grčkog jezika u Cambridgeu, a od 1662. je vodio katedru za prirodne znanosti. Među ostalima, student mu je bio i Newton. Barrowova predavanja iz matematike i optike kasnije su i objavljena. Kad je 1669. napustio poziciju na sveučilištu, postao je kraljevski kapelan u Londonu. Godine 1677. obolio je od vrućice i pokušao se sam, kao ranije u Konstantinopolu, izliječiti postom i opijumom, ali je umro.

Barrow je tangentu smatrao graničnim slučajem sekante, kad se njezina sjecišta s krivuljom međusobno približavaju. Još važnije je da je Barrow (a tako i malo ranije Torricelli) primijetio: Brzina se može odrediti iz puta, kao i




Slika 9.11: Barrowljeva metoda određivanja tangente.

obrnuto. Također, put se može dobiti kao površina ispod grafa brzine u ovisnosti o vremenu, a brzina kao koeficijent smjera tangente na graf ovisnosti puta o vremenu. Vidimo da je time najavio osnovni teorem infinitezimalnog računa. Svoju metodu određivanja tangente i geometrijski opis upravo navedene inverznosti objavio je 1670. u sklopu *Lectiones Geometricae*.

**Barrowljeva metoda određivanja tangente** je slična Fermatovoj, a temelji se na korištenju trokuta sličnog Pascalovom karakterističnom trokutu, a koji je poznat kao Barrowljev diferencijalni trokut. Neka je $f(x, y) = 0$ jednadžba krivulje i $P = (x, y)$ točka na njoj . Da bismo dobili tangentu u $P$, treba nam još jedna točka $T$ na tangenti, npr. sjecište tangente s $x$-osi. Neka je $e$ malo smanjenje $x$ i $a$ odgovarajuća promjena $y$ (slika 9.11, na toj slici je $\triangle PQR$ Barrowljev diferencijalni trokut). Budući da je $e$ mali, $\triangle TMP$ je približno sličan $\triangle QRP$, pa vrijedi

$$|TM| : y \approx e : a.$$

Ta približna jednakost je to točnija što je $e$ manji.

Ako je $P = (x, y)$, onda je $Q = (x - e, y - a)$ također točka na krivulji, pa vrijedi i $f(x, y) = f(x - e, y - a) = 0$. To iskorištava da dobije jednakost koja povezuje $x$, $y$, $e$ i $a$. U toj jednakosti se članovi s potencijama od $e$ i $a$ većim od 1 i njihovim međusobnim umnošcima zanemare, te se odredi $e : a$ iz čega se $|TM|$ dobije kao $y \cdot \frac{e}{a}$.

**Primjer 36** *Zadana je jednadžba Kartezijevog lista* $x^3 + y^3 = k\,x\,y$. *Ona vrijedi kako za točku* $(x, y)$, *tako i za točku* $(x - e, y - a)$, *tj. vrijedi i*

$$(x - e)^3 + (y - a)^3 = k(x - e)(y - a),$$

*odnosno*

$$x^3 - 3x^2e + 3xe^2 - e^3 + y^3 - 3y^2a + 3ya^2 - a^3 = kxy - key - kax + kea.$$

*Budući da je* $x^3 + y^3 = k\,x\,y$, *preostaje*

$$-3x^2e + 3xe^2 - e^3 - 3y^2a + 3ya^2 - a^3 = -key - kax + kea.$$

*Zanemarimo članove s potencijama od* $e$ *i* $a$ *većim od* $1$ *i njihovim međusobnim umnošcima, pa ostane*

$$3x^2e + 3y^2a = kax + key,$$

*iz čega se dobije*

$$e : a = (kx - 3y^2) : (3x^2 - ky).$$

*Stoga je*

$$|TM| = y\frac{e}{a} = \frac{kxy - 3y^3}{3x^2 - ky},$$

*odnosno* $T = \left(x - \frac{kxy-3y^3}{3x^2-ky}, 0\right)$. *Sad imamo dvije točke tangente te se može odrediti njezina jednadžba.*

Često se kaže: „Newton i Leibniz otkrili su deriviranje i integriranje"? Što se time želi reći, da su definirali derivaciju preko limesa, a integral preko Darbouxovih suma? Da su bili prvi koji su znali izračunati ono što mi zovemo derivacijom i integralom? Ni jedno ni drugo. Do preciznih definicija derivacije i integrala trebat će proći skoro 200 godina nakon Newtona i Leibniza. Kao što smo dosad vidjeli, svakako nisu bili prvi, jer su mnogi njihovi prethodnici znali odrediti koeficijent smjera tangente ili pak površinu ispod krivulje. Jesu li možda Newton i Leibniz bili precizniji u svom pristupu? Ni to. Razlog zašto se Newtonu i Leibnizu pripisuje utemeljenje **infinitezimalnog računa** je što su njih dvojica, nezavisno jedan od drugog, iz mnoštva pojedinačnih metoda i rezultata dobili jedinstvenu računsku metodu za rješavanje opisanih tipova problema, te jer su oni prvi jasno iskazali međusobnu inverznost deriviranja i integriranja (osnovni teorem infinitezimalnog računa). Newtonovi i Leibnizovi rezultati su matematički ekvivalentni, ali su pristupi bitno različiti: Newton pristupa fizikalno, a Leibniz apstraktnije. Opisat ćemo glavne crte oba pristupa.

Isaac Newton (1642.–1727.) je rođen nakon smrti svog oca. Kad je imao tri godine, njegova majka se preudala. Kad je po drugi put ostala udovica, majka je htjela da Isaac postane farmer, ali je on taj posao mrzio i njegov učitelj ju je uspio uvjeriti da mu dopusti školovanje. Studirao je na *Trinity College* u Cambridgeu i tijekom studija je otkrio interes za matematiku. Nakon diplome 1665. ostao je na *Trinity College*, ali je taj zbog epidemije kuge zatvoren te se Isaac povukao na obiteljsko imanje u Woolsthorpe. U dvije godine koje je tamo boravio razvio je svoje revolucionarne nove ideje infinitezimalnog računa, optike i gravitacije. Kasnije je naslijedio Barrowljevu poziciju na *Trinity Colleg*. Tijekom 1670-ih se upleo u mnoge sukobe s drugim znanstvenicima. Prvi slom živaca doživio je 1678., godinu kasnije mu je umrla majka, poslije je živio sve povučenije. Najvažnije Newtonovo djelo je *Philosophiae naturalis principia mathematica* (*Principia*, 1687.), koje među ostalim sadrži i Newtonov zakon gravitacije. U to je doba postao sve više politički aktivan, posebno jer je katolički kralj James II. na sve pozicije postavljao katolike neovisno o sposobnostima. Nakon drugog sloma živaca 1693. potpuno se povukao iz znanosti i ostatak života bavio politikom. Postigao je mnoge visoke pozicije i obogatio se. Od 1703. je bio predsjednik *Royal Society*, a 1705. je postao prvi znanstvenik s titulom viteza (*sir*). Zadnje godine njegova života obilježene su sukobom s Leibnizom oko prvenstva u otkriću infinitezimalnog računa.

Prvi Newtonovi tekstovi o infinitezimalnom računu su *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas* (1669., objavljen 1711.), *De Methodis Serierum et Fluxionum* (1671., objavljen 1736.) i *Tractatus De Quadratura Curvarum* (1691.–1693., objavljen 1704.). Uočljiv je veliki razmak između termina nastanka i objave tih djela, što je, navodno, prvenstveno bilo uzrokovano time što londonske tiskare u to doba nisu bile sklone tiskati znanstvena djela zbog neisplativosti. Newtonova varijanta infinitezimalnog računa poznata je pod nazivom **metoda fluksija**. Naime, Newton je promatrao veličine ovisne o vremenu (fluense) $x$, $y$, $\dots$, a njihove brzine nazvao je fluksijama. 1690-ih godina Newton je fluksije počeo označavati s $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dots$, a fluksije fluksija (akceleracije fluensâ) s $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\dots$

Ako gledamo česticu koja se giba u koordinatnoj ravnini, njena pozicija je opisana dvama fluensima: apscisom $x$ i ordinatom $y$. Oba fluensa su funkcije vremena: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Drugim riječima, Newtonov pristup krivuljama u ravnini ekvivalentan je modernim parametarskim jednadžbama krivulje. Ako se u nekom trenutku čestica nalazi na poziciji $(x(t), y(t))$, onda su njena horizontalna i vertikalna komponenta brzine fluksije $\dot{x}(t)$ i $\dot{y}(t)$, odnosno vektor brzine je na pravcu s koeficijentom smjera $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Budući da je vektor brzine uvijek tangencijalan na krivulju po kojoj se čestica kreće, zaključujemo da je kod Newtona koeficijent smjera tangente na krivulju kvocijent dviju *konačnih*, a ne infinitezimalnih veličina (kvocijent fluksija $\dot{y}$ i $\dot{x}$).

U *De Methodis Serierum et Fluxionum* Newton je iskazao temeljni zadatak infinitezimalnog računa: Iz odnosa fluensâ odrediti odnos njihovih fluksija te obrnuto, odnosno kako bismo mi danas rekli: deriviranje i integriranje.

U konkretnim računima Newton koristi male priraste $o\,\dot{x}$ fluensa $x$, gdje s $o$ označava „beskonačno mali" prirast vremena. Metoda je vrlo slična ranijem de Fermatovom i Barrowljevom pristupu, ali „računskija". Objasnit ćemo je na primjeru „deriviranja na Newtonov način".

**Primjer 37** *Zadana je odnos fluensâ, tj. implicitna jednadžba krivulje:*

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0.$$

*Prvo u nju supstituiramo $x + o\dot{x}$ za $x$ i analogno $y + o\dot{y}$ za $y$:*

$$x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2o^2x + \dot{x}^3o^3 - ax^2 - 2a\dot{x}ox - a\dot{x}^2o^2 + axy+$$

$$+a\dot{x}oy + a\dot{y}ox + a\dot{x}\dot{y}o^2 - y^3 - 3\dot{y}oy^2 - 3\dot{y}^2o^2y - \dot{y}^3o^3 = 0.$$

*Budući da $(x, y)$ mora zadovoljavati polaznu jednadžbu, preostaje:*

$$3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2o^2x + \dot{x}^3o^3 - 2a\dot{x}ox - a\dot{x}^2o^2 + a\dot{x}oy + a\dot{y}ox+$$

$$+a\dot{x}\dot{y}o^2 - 3\dot{y}oy^2 - 3\dot{y}^2o^2y - \dot{y}^3o^3 = 0.$$

*Budući da $o$ nije $0$ (radi se o malom prirastu), podijelimo s $o$:*

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + a\dot{y}x + a\dot{x}y - 3y^2\dot{y} + 3xo\dot{x}^2 + o^2\dot{x}^3 - ao\dot{x}^2 + ao\dot{x}\dot{y} - 3yo\dot{y}^2 - o^2\dot{y}^3 = 0.$$

*Naposlijetku zanemarimo $o$, jer je on ujedno i jako blizu $0$. Tako dobijemo*

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{y}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 = 0.$$

*Iz ovog lako odredimo koeficijent smjera tangente na našu krivulju, u njezinoj točci $(x, y)$:*

$$k = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3x^2 - 2ax + ay}{3y^2 - ax}.$$

Za inverzni problem, dakle za ono što danas nazivamo integriranjem, Newton kreće od odnosa fluksija, tj. neke diferencijalne jednadžbe.[12] Dakle, ono što danas nazivamo integriranjem od svog samog početka povezano je s rješavanjem **diferencijalnih jednadbi**. Ako u takvoj jednadžbi imamo točno dvije fluksije ($\dot{x}$ i $\dot{y}$), prvi je korak odrediti njihov kvocijent (tj. već spomenuti koeficijent smjera tangente na krivulju). Primjerice, ako je $\dot{y}^2 = \dot{x}\dot{y} + \dot{x}^2y^2$, onda je

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + x^2}.$$

[12]Newton je primijetio da u jednadžbi koja sadrži fluksije, svi članovi moraju biti istog stupnja: $\dot{x} + \dot{x}\dot{y}x - ax^2 = 0$ se mora interpretirati kao $\dot{x}\dot{z} + \dot{x}\dot{y}x - ax^2\dot{z}^2 = 0$ uz $\dot{z} = 1$.

Tipična karakteristika Newtonovog računa fluksija je korištenje redova, posebno za integriranje. Za upravo navedeni primijer, Newton koristi binomni red

$$\sqrt{\frac{1}{4}+x^2} = \frac{1}{2} + x^2 - x^4 + 2x^6 - 5x^8 + 14x^{10} + \ldots,$$

što daje $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 + x^2 - x^4 + 2x^6 - 5x^8 + 14x^{10} + \ldots$ odnosno

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = x^2 - x^4 + 2x^6 - 5x^8 + 14x^{10} + \ldots.$$

Znajući da ako je fluksija $x^n$, onda je odgovarajući fluens $x^{n+1}/(n+1)$ (što je znao još Wallis), na kraju zaključuje (mi bismo rekli: integrirao je član po član)

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = (x+)\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{7}x^7 - \frac{5}{9}x^9 + \frac{14}{11}x^{11} + \ldots$$

Kao što vidimo, Newton još nije obraćao pozornost na područje konvergencije reda potencija, ali je jedan od prvih matematičara koji su ih uopće razmatrali.

Newton u predgovoru svoje *The method of fluxions and infinite series with its application to the geometry of curve-lines* kaže i: „Računanje s brojevima i varijablama je slično, pa je stoga prirodno, prikaz brojeva kao decimalnih razlomaka analogno primijeniti na varijable.” Iskazuje i čudjenje, da to još nikome osim njemačkom matematičaru **Nicolausu Mercatoru** (Niklaus Kauffman, 1620.–1687.) nije palo na pamet. Mercator je naime 1668. objavio tekst *Logarithmotechnia* u kojem za određivanje površine ispod istostrane hiperbole (tj. $\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$) koristi (riječima opisan) Mercatorov red

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

kojeg je dobio iz geometrijskog reda $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots$. Zbog toga se N. Mercatora smatra utemeljiteljem teorije **redova potencija**. Pritom je Mercator naveo i da bi se to moglo zvati „prirodnim” logaritmom od $1+t$ (no još uvijek se u to doba logaritmi ne gledaju kao inverzne funkcije eksponencijalnih funkcija, tj. kao funkcije definirane putem baze, tako da ne možemo još govoriti o tome da je Mercator razmatrao logaritam s bazom e).

Newton je otkrio više razvoja u redove potencija, od kojih je najpoznatiji binomni red, kojeg je opisao u jednom pismu H. Oldenburgu 1676.,[13] a razvio je i metodu za invertiranje redova potencija (određivanje reda potencija koji predstavlja inverznu funkciju od danog reda potencija).

[13]Newton je koristio za suvremenog čitatelja neobičnu notaciju: $(P+PQ)^{m/n} = P^{m/n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \ldots$, gdje $A$, $B$, $C$, $D$, ... predstavljaju uvijek redom neposredno prethodeći član: $A = P^{m/n}$, $B = \frac{m}{n}AQ = \frac{m}{n}P^{m/n}Q$, ....

Njemački filozof i matematičar **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646.–1716.) je kao mladić je 1672. posjetio Paris i ondje upoznao Huygensa, koji ga je podučio u matematici i fizici. Među ostalim, dao mu je neke Pascalove spise za proučavanje. U to je doba Leibniz osmislio poboljšanje *Pascaline*, što spominjemo i zato jer je Leibniz u povijesti matematike zapamćen kao prethodnik **računarstva**. Naime, 1703. je opisao račun, kojeg je osmislio dvadesetak godina ranije, u prvom pravom pozicijskom ne-dekadskom brojevnom sustavu u povijesti, u **binarnom brojevnom sustavu** (pri čemu je otkriće tog sustava pripisao starim Kinezima vezano uz već spomenuti *I-Ching*). Također, njegov je glavni cilj bio razviti univerzalni simbolički jezik (*Lingua characteristica universalis*), kojemu bi svrha bila lakše sporazumijevanje neovisno o materinjem jeziku, te vezano za to *Calculus ratiocinator* računica razuma), u kojoj bismo manipulacijom simbola uz određena pravila dobili i provjeravali tvrdnje. Prema Leibnizu, to bi omogućilo konstrukciju strojeva koji bi izvodili korektne logičke zaključke. Tako je s jedne strane prvi imao ideju umjetnog, simboličkog jezika logike i uočio analogiju logičkog zaključivanja i računice, zbog čega ga se smatra utemeljiteljem **matematičke logike**. Zbog navedenog je veliku pozornost pridavao simbolici pa nije iznenađujuće da mnogi moderni matematički simboli potječu od njega: $\int \ldots \mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x$,[14] $\cdot$ za množenje, : za dijeljenje, ...

Godinu dana nakon Parisa posjetio je London i postao član *Royal Society*. Po povratku u Paris bavio se proučavanjem Pascalovih i Descartesovih tekstova i tamo do 1676. razvio svoje prve ideje infinitezimalnog računa, od kojih je prve objavio 1680-ih godina. U isto doba, točnije 1683., Leibniz postaje i jedan od dvojice prvih matematičara koji su računali **determinante**. Naime, još Cardano je znao rješavati $2 \times 2$-sustave linearnih jednadžbi koristeći Cramerovo pravilo, ali bez ispisivanja matrica: Znao je da je rješenje sustava

$$ax + by = f$$

$$cx + dy = g$$

dano s

$$x = \frac{fd - bg}{ad - by}, \; x = \frac{ag - fc}{ad - by}.$$

Godine 1683. su Leibniz i neovisno o njemu japanski matematičar **Takakazu Shinsuke Seki** (1642.–1708.) uveli brojeve, koji se danas zovu determinantama, a u istu svrhu, tj. kao pomoć za rješavanje sustava linearnih jednadžbi. Leibniz je te godine u pismu L'Hôpitalu opisao uvjet da neki sustav ima netrivijalno rješenje, a dokazao je i razne rezultate o sustavima koji se danas

[14]Označavanje parcijalnih derivacija uveo je 1786. Legendre.

formuliraju pomoću determinanti (Cramerovo pravilo, Laplaceov razvoj), no to se nalazi u njegovim neobjavljenim radovima. S druge strane, Seki je opisao starije kineske metode rješavanja sustava i kao pomoć računa brojeva koje bismo danas zvali determinantama do veličine $5 \times 5$.

Od 1676. živio je u Hannoveru, prvo kao knjižničar, kasnije kao savjetnik vojvode od Braunschweig-Lüneburg. Na tom namještenju provodio je i razne geološke projekte, ali se i dalje bavio matematikom i dinamikom. Kasnije je u službi vojvode putovao Europom i tako upoznao mnoge velike znanstvenike. U posljednjem dijelu života ponajviše se bavio filozofijom, a okupirao ga je i sukob s Newtonom. No, poznat je i njegov pokušaj opovrgavanja tvrdnje iz osnovnog teorema algebre: tvrdio je da se $x^4 + a^4$ ne može faktorizirati na dva kvadratna polinoma jer je mislio da $\sqrt{i}$ nije kompleksan broj.

Dok su Newtonovi rezultati u izvornom obliku danas teško čitljivi, Leibnizov stil postao je temelj moderne analize. Poticaj bavljenju tom temom bio je zadatak kojeg mu je 1672. postavio Huygens: Koliko iznosi suma reda recipročnih trokutastih brojeva

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \ldots ?$$

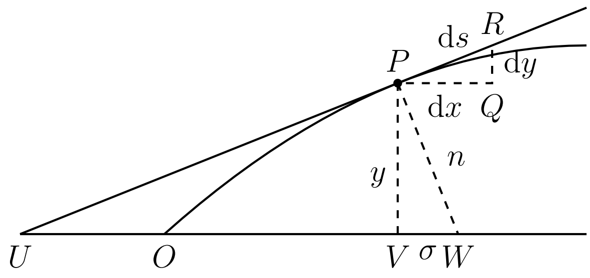
Leibniz je uočio da su svi sumandi oblika $\frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$ pa su parcijalne sume tog reda jednake $2 - \frac{1}{n+1}$. Što je $n$ veći, to je to bliže 2, odnosno Leibniz je zaključio da je suma reda 2. Uz to je primijetio da vrijedi: Ako je svaki pribrojnik $d_n$ razlika dva uzastopna člana nekog niza $(a_n)$, onda je $\sum_{i=1}^{n} d_i = a_1 - a_{n+1}$, odnosno diferenciranje je inverzno sumiranju. Iz tog će nešto kasnije dokazati inverznost deriviranja i integriranja, tj. osnovni teorem infinitezimalnog računa. Godinu kasnije, 1673., je otkrio i **Leibnizov red**

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Taj red je skupa s po njemu nazvanom kriteriju konvergencije reda objavio 1682. Leibnizov je red bio već 1671. poznat škotskom matematičaru **James Gregory-ju** (1638.–1675.), koji je naveo i neke razvoje u redove potencija (prvih 5-6 članova redova za tangens, arkustangens, sekans, logaritam sekansa, binomni red). Gregory je koristio i varijantu kriterija uspoređivanja. Red za arkustangens

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

se danas naziva **Gregory-Mādhavin red**om jer ga je još ranije otkrio i za račun $\pi$ na 11 decimala koristio indijski matematičar **Mādhava** (1350.–1425.). Ovakvi redovi kasnije su nazvani Taylorovim redovima jer je Gregory umro mlad (od moždanog udara) i relativno nepoznat.




Slika 9.12: Leibnizov pristup infinitezimalnom računu.

Leibnizov infinitezimalni račun se temelji na analitičkoj geometriji i generalizaciji Pascalovog karakterističnog trokuta. Neka je zadana krivulja $y = f(x)$ i točka $P$ na njoj (slika 9.12). Tada je karakteristični trokut oko te točke ($\triangle PQR$ s katetama $\mathrm{d}x$ i $\mathrm{d}y$ kojem je hipotenuza dio tangente na krivulju u točki $P$) sličan $\triangle PVW$ kojeg tvore normala, os apscisa i okomica iz $P$ na nju. Stoga vrijedi $\sigma \mathrm{d}x = y\mathrm{d}y$ . „Sumacija” daje $\int \sigma \mathrm{d}x = \int y\mathrm{d}y$. Iz poznavanja veze $\sigma$ i $y$ dobiva se veza $x$ i $y$, tj. rješava se problem integriranja.

**Primjer 38** *Neka je* $\sigma = \frac{a^2}{y}$. *Tada je* $a^2\mathrm{d}x = y^2\mathrm{d}y$. *Dobije se* $\frac{y^3}{3} = a^2x$ *kao jednadžbu krivulje zadanog svojstva.*

Leibniz je isprva kao oznaku integriranja koristio *omn.*: vidljiv je utjecaj Cavalierija, koji je kvadrature nazivao *omnes lineae figurae*. U to doba je Leibniz za diferenciju dviju susjednih ordinata (kasniji d$y$) koristio $l$. Tako primjerice 1675. formulu parcijalne integracije piše u obliku $\text{omn.}\, xl = x\,\text{omn.}\, l - \text{omn.}\overline{\text{omn.}\, l}$. No, upravo te godine se odlučio za simbol $\int$ kao prikladniji za integriranje, jer je ono za njega bilo oblik sumacije. Primijetio je i da aku su $l$-ovi i $x$-evi duljine, onda je $\int l$ površina, a $\int xl$ volumen. Ubrzo je uveo i simbol diferencijala, d, isprva u nazivniku ($\frac{y}{\mathrm{d}}$), onda u modernom obliku d$y$. Koristeći tu simboliku je 1677. dokazao formule za diferenciranje (ne deriviranje!) produkata i kvocijenata funkcija.

Iako Newtonov i Leibnizov koncept infinitezimalnog računa sadržajno vrlo slični, vidljive su i bitne razlike. Možda najbitnija je poimanje koeficijenta smjera tangente: kod Newtona on je kvocijent dviju konačnih veličina (fluksija $\dot{y}$ i $\dot{x}$), a kod Leibniza dviju infinitezimalnih (diferencijala d$y$ i d$x$).

Newtonov stil brzo se proširio britanskim otočjem, a Leibnizov kontinentalnom Europom, te su još za njihova života mnogi matematičari dobili nove rezultate. Praktične primjene su se posebno brzo razvile, ali je dugo ostao problem rigoroznog utemeljenja: Prirasti ($o$ kod Newtona, d$x$ kod Leibniza) su čas različiti od 0 (kad dijelimo s njima), a čas jednaki 0 (kad brišemo članove koji ih sadrže iz jednadžbi). Kako nešto može istovremeno biti jednako i različito od 0? Najpoznatiji kritičar bio je irski biskup i filozof **George Berkeley** (1684.–1753)., koji je 1734. postavio pitanje: *Što su fluksije? Brzine nestajućih prirasta? A što su ti nestajući prirasti? Niti su konačne veličine nit beskonačno male, a nisu niti ništa. Bismo li ih smjeli nazvati duhovima umrlih veličina?* Trebat će još 200 godina dok Bolzano, Cauchy i Weierstraß u potpunosti razriješe ovaj problem, tj. dok infinitezimalni račun dobije i korektnu matematičku podlogu.

Zanimljivo je, posebno jer se radi o jednom od najznamenitijih sukoba velikih znanstvenika u povijesti, ukratko opisati tijek sukoba Newtona i Leibniza oko prvenstva u otkriću infinitezimalnog računa. Neosporno je da su Newtonovi rezultati desetak godina stariji od Leibnizovih, a moguće je i da je Leibniz pri svojim posjetima Londonu (1673. i 1676.) vidio Newtonove rukopise, no bar 1673. ih sigurno još nije bio u stanju razumiti. Leibnizovi prvi rezultati potiču iz 1675., a godinu kasnije Newton mu je poslao pismo koje je dugo putovalo. Leibniz je u odgovoru pohvalio Newtonove zasluge u teoriji redova, no Newton je smatrao da je Leibniz odugovlačio i napisao mu drugo pismo iz kojeg je jasno da ne želi odati detalje svojih rezultata. Među ostalim to pismo sadrži znameniti anagram *6a 2c d ae 13e 2f 7i 3l 9n 4o 4q 2r 4s 9t 12v x.* značenja *Data Aequatione quotcumque, fluentes quantitates involuvente fluxiones invenire, et vice versa*, tj. Newtonov opis osnovnog zadatka infinitezimalnog računa. To je pismo putovalo još dulje, a Leibniz je u odgovoru opisao osnovne crte svoje metode, na što mu je Newton odgovario da u tom nema ništa novog. To je sve potaklo Leibniza da što prije objavit svoje rezultate, što je i učinio 1684., dok je objava Newtonovih rezultata dio njegove *Principia*-e (1687.). Svađa se intenzivirala 1710., kad je škotski matematičar i član *Royal Society* John Keill u časopisu *Transactions of the Royal Society of London* optužio Leibniza za plagijat. Godinu kasnije Leibniz je zatražio ispriku od *Royal Society* te je imenovana komisija za utvrđivanje prvenstva. Bez da se Leibniza pitalo za mišljenje, komisija je 1713. utvrdila da je prvenstvo Newtonovo (vrijedi istaknuti da je u to doba Newton bio predsjednik *Royal Society* da je on sam napisao konačni izvještaj komisije). Leibniz je za to saznao od Johanna Bernoullija, te objavio anonimni tekst u kom spominje Newtonovu pogrešku koje nema u njegovim rezultatima, na što je Keill objavio odgovor, nakon čega se Leibniz povukao iz rasprave uz izgovor da neće davati odgovore idiotu. Iako je 1716. Leibniz umro, sukob se nastavio još dugo, pa čak i do danas.

Upravo spomenuti švicarski matematičar **Johannom Bernoullijem** (1667.–1748.) bio je dobar Leibnizov prijatelj i prva je osoba koja je, u jednom pismu Leibnizu 1694., u matematičkom smislu koristila izraz **funkcija**. Johann Bernoulli u tom pismu kaže: „Ovdje funkcijom nazivamo varijablu neke veličine, koja je na bilo kakav način sastavljena od te veličine i konstanti." Johann Bernoulli je zaslužan i za naziv „integriranje": Dok je Leibniz isprva predlagao naziv *calculus summatoris* (i simbol $\int$), Johann je predložio *calculus integralis* (i simbol $I$). Na koncu su se složili oko kompromisa: simbol $\int$ i naziv *calculus integralis*.

Skupa sa starijim bratom Jacobom, Johann je prvi nastavio Leibnizove rezultate. Oba brata su posebno mnogo novih rezultata dobili vezano za diferencijalne jednadžbe.[15] Oba su bitno doprinijeli i širenju ideja infinitezimalnog računa. Johann je, kao i Leibniz i Huygens, 1691. uspio odrediti jednadžbu lančanice.[16]

Johann je tijekom boravka u Parizu podučio markiza **Guillaume François Antoine Marquis de L'Hôpital** (1661.–1704.) tehnikama infinitezimalnog računa, a L'Hôpital je 1696. objavio prvi udžbenik *diferencijalnog* računa, čiji veći dio sadržaja se pripisuje Johannu, uključivo poznatog **L'Hôpitalovog pravila**, no L'Hôpital je samo u predgovoru zahvalio Bernoullijima.

Johann Bernoulli je 1696. postavio **problem brahistohrone**: Potrebno je među svim krivuljama koje prolaze kroz dvije točke koje nisu na istoj visini niti jedna točno iznad druge odrediti onu krivulju po kojoj će se materijalna točka koja klizi bez trenja, samo pod utjecajem sile teže, najbrže spustiti od više do niže točke. Da je rješenje cikloida pokazali su kako Johann, tako i Jacob, Newton, Leibniz i L'Hôpital. Zanimljiva je usporedba Johannovog i Jacobovog rješenja. Johannovo $\boxed{\text{rješenje}}$ je elegantnije (uočio je analogiju s lomom svjetlosti te koristeći Fermatov princip i Snellusov zakon loma dobio diferencijalnu jednadžbu $\mathrm{d}x = \frac{k\sqrt{y}}{\sqrt{1-k^2a^2y}}\mathrm{d}y$ i pokazao da je njezino rješenje cikloida). Jacobovo rješenje je kompliciranije, ali je imalo puno veći utjecaj na razvoj matematike. Jacob je naime uočio da je ovo potpuno novi tip problema: Dotad su se rješavali zadaci u kojima se traže točke ekstrema na zadanoj krivulji, a ovdje se traži „ekstremalna krivulja". Stoga je njegovo rješenje utemeljilo **varijacijski račun**, u kom se traži krivulja $y$ za koju je neki $I(y) = \int_a^b F(x, y, y')\mathrm{d}x$ minimalan ili maksimalan.[17]

Stariji brat Johanna Bernoullija, **Jacob Bernoulli** (1655.–1705.) je osim po analizi logaritamske spirale i upravo spomenutim doprinosima u analizi

[15] Bernoullijevu diferencijalnu jednadžbu $y' + p(x)y = q(x)y^n$ za $n \neq 0, 1$ je proučavao Jacob.

[16] Hiperbolne funkcije prvi je uveo Vincenzo Riccati (1707.–1775.) ca. 1760, a prvi sustavno proučavao Lambert.

[17] U slučaju problema brahistohrone, minimizira se

$$\int_a^b \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{y}}\mathrm{d}x.$$

posebno poznat po svom djelu *Ars Conjectandi*, objavljenom posthumno 1713., koje se smatra prvim bitnim, sređenim tekstom o vjerojatnosti (i kombinatorici). Štoviše, mnogi autori smatraju da je upravo ovim djelom utemeljena teorija vjerojatnosti. To nije samo zato jer se radi o vrlo opsežnom djelu, nego i jer sadrži mnoge novosti. Sastoji se od četiri dijela. Prvi dio prenosi Huygensovu *De ratiociniis in aleae ludo*, ali uz Jacobove komentare i dopune, uključivo preciziranja pojma očekivanja i eskplicitnog uvođenja binomne distribucije. Drugi dio opisuje kombinatorne principe bitne za vjerojatnost. Posebno, tu su klasični rezultati o permutacijama i kombinacijama te prvi potpun dokaz binomnog teorema za prirodne eksponente. U trećem dijelu se prvi i drugi dio primjenjuju na 24 konkretna zadatka vezana uz igre na sreću.

**Primjer 39** *Prvi zadatak u trećem dijelu glasi: Netko je u urnu stavio dvije kuglice, jednu crnu i jednu bijelu, te je ponudio nagradu onome od triju igrača $A$, $B$, $C$ koji prvi izvuče bijelu kuglicu. Ako nijedan od igrača ne izvuče bijelu kuglicu, onda nitko ne dobiva nagradu. Prvo izvlači $A$, pa vrati kuglicu u urnu. Onda drugi izvlači $B$ i učini isto. Naposlijetku kao treći izvlači $C$. Kolike su nade*[18] *triju igrača?*

Najvažniji dio je četvrti, koji je ostao nezavršen. On se bavi pitanjima primjene vjerojatnosti na „civilna, moralna i ekonomska" pitanja. Ovdje je postavljeno pitanje veze vjerojatnosti *a priori* i *a posteriori*: Ako imamo dovoljno mnogo rezultata nekog slučajnog pokusa, možemo li iz njih procijeniti teorijsku vjerojatnost? Ovaj dio završava teoremom kojeg je Jacob Bernoulli nazvao „zlatnim teoremom" i na kojeg je bio jako ponosan: „Neka se broj povoljnih slučajeva prema broju nepovoljnih slučajeva odnosi točno ili približno kao $\frac{r}{s}$, dakle prema broju svih mogućih slučajeva kao $\frac{r}{r+s} = \frac{r}{t}$ (ako se stavi $r + s = t$), gdje je posljednji omjer između granica $\frac{r+1}{t}$ i $\frac{r-1}{t}$.[19] Sad se mogu, kako je dokazano, izvesti toliko opažanja da proizvoljno mnogo (npr. $c$) puta bude vjerojatnije da je omjer povoljnih prema svim provedenim opažanjima unutar tih granica, nego da je izvan njih, dakle da niti je veći od $\frac{r+1}{t}$ , niti je manji od $\frac{r-1}{t}$."[20] Ovo je, naravno, prvi **zakon velikih brojeva**,

[18]Pod nadom, očigledno, misli na vjerojatnost osvajanja nagrade.

[19]Dana je vjerojatnost $p$ uspjeha i vjerojatnost $q = 1 - p$ neuspjeha u pojedinom slučajnom, Bernoullijevom, pokusu. Uočavamo da je $p - \varepsilon < p < p + \varepsilon$ za $\varepsilon = \frac{1}{t}$. Primijetimo da budući da se početni razlomci uvijek mogu proširiti i tako povećati $t$, ovdje zapravo imamo proizvoljni $\varepsilon > 0$.

[20]Za svaki $c > 0$ postoji broj $n$ izvođenja tog slučajnog pokusa (svaki nezavnisno u odnosu na ostale) da vjerojatnost da relativna frekvencija $f$ uspjeha zadovoljava $p - \varepsilon < \frac{k}{n} < p + \varepsilon$ iznosi $\frac{c}{1+c}$.

poznat pod nazivom Bernoullijev slabi zakon velikih brojeva. Danas govorimo o konvergenciji po vjerojatnosti relativnih frekvnecija prema teorijskoj vjerojatnosti: Ako slučajni pokus provodimo neograničen broj puta, uvijek u istim uvjetima, te tako da je svako izvođenje nezavisno od ostalih, relativne frekvencije uspjeha će sve manje varirati i s vjerojatnošću 1 težiti prema $p$. No, naziv „zakon velikih brojeva uveo je tek **Siméon-Denis Poisson** (1781.–1840.) u svom djelu *Recherches sur la probabilité des judgements en matière criminelle et matière civile* (1837.).

Kao motivaciju za dokaz Bernoullijevog zakona velikih brojeva, Jacob je uzeo sljedeći zadatak: Stvarni sastav urne je 3000 bijelih i 2000 crnih pokusa, ali to nije poznato osobi koja će iz urne izvlačiti kuglice jednu po jednu, s vraćanjem. Pitanje je, može li ta osoba to učiniti neki broj puta tako da 10, 100, 1000, . . . puta bude vjerojatnije (i naposlijetku 'moralno sigurno') da omjer frekvencija izvučenih bijelih i crnih kuglica bude jednak stvarnom (3 : 2), nego da taj omjer bude neki drugi. Drugim riječima, Jacob Bernoulli je motivirao svoj teorem statističkim pitanjem određivanja teorijske vjerojatnosti (vjerojatnosti *a priori*) iz poznavanja empirijske vjerojatnosti (vjerojatnosti *a posteriori*). Koristeći svoj „zlatni teorem", Bernoulli je na kraju četvrtog dijela *Ars Conjectandi* pokazao da ako želimo 1000 puta veću vjerojatnost da omjer apsolutnih frekvencija bijelih i crnih kuglica bude 3 : 2 nego neki drugi, minimalni broj izvlačenja je 25500.

# Poglavlje 10

# Razvoj matematike u 18. stoljeću

Nakon vjerojatnosne digresije, vratimo se na matematičku analizu. Kao što su braća Bernoulli bili važni neposredni nastavljači Leibnizovog stila infinitezimalnog računa u kontinentalnoj Europi, tako su se i na britanskom otočju neki matematičari istakli kao nastavljači s Newtonovim pristupom. Među njima se ističu Taylor i Maclaurin, koje danas obično asociramo s redovima potencija.

Engleski matematičar, jedan od članova komisije za utvrđivanje prvenstva u sukobu Newtona i Leibniza, **Brook Taylor** (1685.–1731.) danas je najpoznatiji po Taylorovim redovima, no kako smo vidjeli, neki Taylorovi redovi bili su poznati već i prije njega. No, Taylor je 1715. objavio tekst *Methodus incrementorum directa et inversa*, u kojem je dobio opći oblik **Taylorovog reda** dane funkcije iz Newton-Gregoryjeve interpolacijske formule[1] kad „prirast nestaje" ($\Delta x \to 0$). Taylorove redove je tako nazvao škotski matematičar **Colin Maclaurin** (1698.–1746.). On je 1742. je objavio knjigu *Treatise of fluxions* (s čak 763 stranice!), koja je prvi sustavni prikaz Newtonovog računa fluksija. Sedam godina kasnije je prevedena na francuski i tako doprinijela širenju Newtonovih ideja u kontinentalnoj Europi. Djelo sadrži i mnoge primjene, posebno na fiziku. Maclaurin se nadao tim djelom barem dijelom odgovoriti na Berkeleyevu kritiku. Stoga je, primjerice, osnovni teorem infinitezimalnog računa dokazao oslanjajući se na algebarske nejednakosti. Po njemu danas nazivamo specijalni slučaj Taylorovih redova za razvoj oko 0, a to su **Maclaurinovi redovi**, jer ih je u tom djelu koristio koristio za

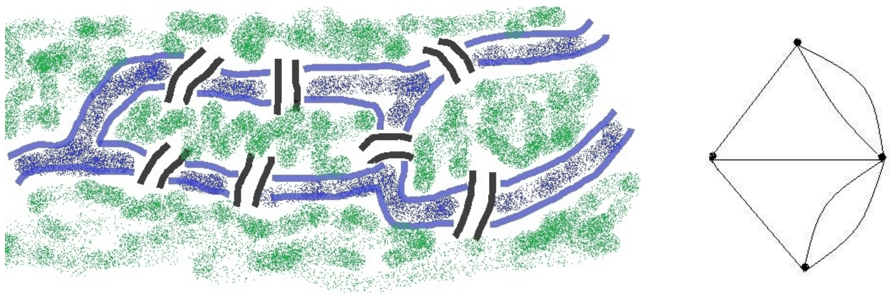
[1] Formulu su otkrlili, nezavisno jedan od drugoga, Gregory i Newton oko 1670. Radi se o važnoj i poznatoj formuli iz numeričke matematike za nalaženje formule krivulje $y = f(x)$ tako da ona prolazi kroz točke $(a, y_0)$, $(a + \Delta x, y_1)$, $(a + 2\Delta x, y_2)$, $\ldots$, $(a + n\Delta x, y_n)$ koristeći tzv. konačne razlike.

određivanje ekstrema i točaka infleksije.

Zasigurno najveći matematičar 18. stoljeća bio je švicarski matematičar **Leonhard Euler** (1707.–1783.). Doprinijeo je gotovo svim tada postojećim matematičkim disciplinama, a utemeljio i neke nove. Neki autori smatraju da je njegova *Introductio in analysin infinitorum* (1748.) za matematičku analizu ono što su *Elementi* za geometriju ili *Al-Kitāb al-muhtaṣar fī hisab al-ğabr wa-l-muqābala* za algebru. Rođen je u Baselu, gdje je studirao filozofiju i pravo. Tu ga je Johann Bernoulli ohrabrio da se posveti matematici. Karijeru je proveo u St. Petersburgu i Berlinu: Godine 1727. mu je Johannov sin Daniel prvo našao zaposlenje na Akademiji znanosti u St. Petersburgu, gdje je po Danielovom povratku u Basel 1733. preuzeo katedru matematike. Tako je imao dovoljno novaca da se oženi. Imao je 13 djece, ali samo pet je preživjelo djetinjstvo. Već brzo nakon ženidbe počeo je imati zdravstvene probleme. Od 1738. je na desno oko bio praktički slijep. Kad je 1740. politička situacija postala nemirna, preselio je Berlin, kamo ga je pozvao car Friedrich Veliki. Tu je Euler napisao gotovo 400 tekstova na najrazličitije matematičke teme, uključivo popularnog teksta *Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de pyhsique et de philosophie.* No, s vremenom je postao sve nezadovoljniji, posebno zbog careva miješanja u vodstvo akademije. Nakon stupanja na vlast Katarine Velike, vratio se u St. Petersburg 1766. No, 1771. dom mu je izgorio u požaru, a Euler je uspio spasiti samo sebe i svoje matematičke rukopise. Ubrzo zatim, potpuno je oslijepio, no to ga nije spriječilo u daljnjem radu. Njegovo znamenito pamćenje i dvojica njegovih sinova pomogli su u tome da je velik dio njegovog ukupnog opusa od preko 800 radova za života nastao upravo u doba potpune sljepoće. Na sam dan smrti još je podučcavao matematici svoga unuka i bavio se proračunima kretanja dvaju balona. Prije nego se posvetimo Eulerovim doprinosima u infinitezimalnom računu, osvrnimo se prvo na njegove doprinose drugim disciplinama.

Euler je utemeljitelj matematičke discipline **topologije**,[2] malo preciznije njene poddiscipline **teorije grafova**. U doba Eulerovog života, jedan popularni zadatak bio je **problem mostova u gradu Königsbergu** (danas Kaliningrad, Rusija)¿ Može li se grad Königsberg obići tako da se svaki od njegovih sedam mostova (vidi sliku 10.1 lijevo) prijeđe točno po jednom, te da se na kraju vratimo na polazište? Euler je uočio da rješenje nema veze s

[2]Na prvi pogled, topologija je slična geometriji. No, dok su u geometriji objekti ekvivalentni („sukladni") ako postoji izometrija koja jedan prevodi u drugi, u topologiji se ekvivalencija definira preko postojanja homeomorfizma (neprekidnog preslikavanja s neprekidnim inverzom), dakle u topologiji se objekti razlikuju ne prema veličini i obliku, nego prema (ne)povezanosti i broju rupa. Primjerice, kocka, kugla i zdjela su topološki ekvivalentni oblici.



Slika 10.1: Problem mostova u gradu Königsbergu

duljinama i kutovima, nego samo povezanošću te je to razlog da ga nazivamo ocem topologije. Svoje rješenje objavio je 1736. pod naslovom *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, iz kojeg se vidi da je bio svijestan da se radi o novom tipu geometrije, *geometria situs* (geometrija položaja). Euler je tu objasnio da ako dijelove Königsberga zamnislimo kao točke (danas bismo rekli vrhove grafa), a mostove kao linije koje ih povezuju (danas bismo rekli bridove grafa), imamo situaciju kao na slici 10.1 desno. Euler je ne samo pokazao da je konkretni zadatak nerješiv, nego je dao i opći postupak za ovakve zadatke:

1. Ako su više od dva vrha neparnog stupnja (tj. u njih ulazi/izlazi neparan broj linija), problem je nerješiv (samo ovaj slučaj rigorozno dokazao).

2. Ako su točno dva vrha neparnog stupnja moguća je „otvorena” šetnja.

3. Ako su svi vrhovi parnog stupnja, zadatak je rješiv.

Osim ovog rezultata, još je jedan nazigled čisto geometrijski Eulerov rezultat temelj teorije grafova. Naime, 1750. je Euler u pismu C. Goldbachu[3] ustvrdio da ako je $V$ broj vrhova nekog poliedra, $B$ njegov broj bridova, a $S$ broj stana, onda je

$$V - B + S = 2.$$

Danas znamo da je ta **Eulerova poliedarska formula** točna za sve poliedre bez rupa. Sam Euler nije uočio uvjet da poliedar treba biti bez rupa, a 1752. je dao nepotpuni dokaz. Prvi potpuni dokaz, ali čisto geometrijski,

[3]Christian Goldbach (1690.–1764.), pruski matematičar, najpoznatiji je po Goldbachovoj hipotezi iz teorije brojeva (svaki parni prirodni broj veći od 2 je zbroj dvaju prostih brojeva).

dao je Legendre 1794. Danas pak tu formulu obično iskazujemo u terminima teorije grafova, pa se radi o formuli koja vrijedi za planarne grafove, što je, čini se, prvi uočio Cauchy 1811. Formulu je poopćio 1813. švicarski matematičar **Simon Antoine Jean Lhuilier** (1750.–1840.): Za poliedre s $n$ rupa je vrijedi $V - B + S = 2 - 2n = \chi$. Danas se broj $\chi$ zove Eulerovom karakteristikom plohe (da ne ulazimo u formalne definicije, za svrhe ovog kolegija možemo ju poistovjetiti s „napuhanim" poliedrom). Ona je prvi poznati primjer **topološke invarijante** (svojstva koje se ne mijenja pri homeomorfizmima). Zanimljivo je spomenuti da je stotinjak godina prije Eulera Descartes otkrio jednu Eulerovoj formuli ekvivalentnu formulu. No, nije ju objavio, a njegov rezultat je postao poznat tek u 19. st., pa je to razlog zašto Eulera smatramo utemeljiteljem teorije grafova odnosno topologije. **Descartesova poliedarska formula** je teorem koji kaže: Ako četiri prava kuta (tj., puni kut) pomnožimo s brojem prostornih kutova (tj. vrhova) poliedra i od toga oduzmemo 8 pravih kutova (tj. dva puna kuta), preostat će zbroj svih ravninskih kutova u poliedru:

$$360°V - 720° = \sum_{i=1}^{S} \sum_{j=1}^{V_i} \alpha_{ij}.$$

Ta je formula ekvivalentna Eulerovoj poliedarskoj formuli jer je u svakom $V_i$-terokutu (strani poliedra) zbroj kutova jednak $(V_i - 2) \cdot 180°$, a $\sum_{i=1}^{S} V_i = 2B$, jer svaki brid povezuje dva vrha.

**Primjer 40** *Za trostranu prizmu je* $S = 5$, $V = 6$, $B = 9$ *pa je* $V - B + S = 6 - 9 + 5 = 2$. *S druge strane prizma je omeđena s 2 trokuta (zbrojevi kutoa* $180°$*) i 3 četverokuta (*$360°$*), pa imamo* $360°E - 720° = 360° \cdot 4 = 2 \cdot 180° + 3 \cdot 360°$.

Već smo spomenuli da je Euler provjerio neke od Fermatovih hipoteza iz teorije brojeva. Među ostalim, dao je dokaz velikog Fermatovog teorema za eksponent 3. No, to nije jedini njegov doprinos toj disciplini. Euler je prvi uočio da se teorija brojeva može proučavati pomoću metoda matematičke analize i time je postao osnivač **analitičke teorije brojeva**. Među ostalim, otkrio je poznatu relaciju, tzv. **Eulerov produkt**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \,\text{prost}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

za $s > 1$. Dokazao je i divergenciju reda recipročnih prostih brojeva, uveo je **Eulerovu $\varphi$-funkciju** (za prirodan broj $n$ je $\varphi(n)$ broj brojeva iz skupa $\{1, \ldots, n\}$ koji su relativno prosti s $n$) i poopćio mali Fermatov teorem na

**Eulerov teorem**: Za prirodan broj $a$ relativno prost s $n$ je $a^{\varphi(n)}-1$ djeljivo s $n$. Našao je i 58 novih parova prijateljskih brojeva (prije njega bila su poznata samo tri). Dokazao je i da su parni savršeni brojevi isključivo oblika $2^{n-1}(2^n-1)$ ako je $2^n-1$ prost (obrat pitagorejskog teorema o savršenim brojevima). Izrekao je (1783.), ali nije znao dokazati, **zakon kvadratnog reciprociteta**, koji je postao jedan od najpoznatijih problema teorije brojeva tog doba, a o njemu ćemo malo više reći kasnije.

Euler se bavio i algebrom, konkretno dokazom osnovnog teorema algebre. Utvrdio je (1742.) da je netočan Leibnizov „kontraprimjer", tj. tvrdnja da se $x^4+a^4$ ne može faktorizirati na dva kvadratna polinoma. Dokazao je osnovni teorem za polinome s realnim koeficijentima stupnjeva do 6. Naravno, s time su povezani i kompleksni brojevi. Euler je (1777.) uveo simbol $i$ za imaginarnu jedinicu, a dokazao je i znamenitu **Eulerovu formulu** za kompleksne brojeve

$$e^{i\,t}=\cos t+i\,\sin t,\quad t\in\mathbb{R}.$$

Taj je pak dokaz vezan za Eulerov rad na redovima potencija te time dolazimo do matematičke discipline u kojoj su Eulerovi doprinosi posebno važni, matematičke analize.

U djelu *Introductio in analysin infinitorum* (1748.) Euler je izveo red potencija za eksponencijalnu funkciju.[4] Opisat ćemo ukratko Eulerov pristup. Neka je $a>1$. Tada postoji konstanta $k$ (ovisna samo o $a$) takva da je

$$a^\omega=1+k\omega$$

za $\omega$ „toliko malen, da taman da nije 0". Ako to potenciramo na $j$, dobit ćemo

$$a^{j\omega}=(1+k\omega)^j.$$

Na to možemo primijeniti Newtonov binomni red[5] da dobijemo

$$a^{j\omega}=1+\frac{j}{1}k\omega+\frac{j(j-1)}{2!}k^2\omega^2+\frac{j(j-1)(j-2)}{3!}k^3\omega^3+\dots$$

Proširimo li svaki $m$-ti član s $j^{m-1}$ dobijemo

$$a^{j\omega}=1+\frac{j}{1}k\omega+\frac{(j-1)}{2!j}j^2k^2\omega^2+\frac{(j-1)(j-2)}{3!j\cdot j}j^3k^3\omega^3+\dots$$

Supstituiramo $x=j\omega$:

$$a^x=1+\frac{k}{1}x+\frac{k^2}{2!}\cdot\frac{j-1}{j}\cdot x^2+\frac{k^3}{3!}\cdot\frac{(j-1)(j-2)}{j^2}\cdot x^3+\dots$$

[4]Euler je ujedno prvi matematičar koji je logaritamske funkcije sustavno gledao kao inverze eksponencijalnih, tj. logaritme kao funkcije definirane putem baze.

[5]$(1+x)^j=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{j(j-1)\dots(j-m+1)}{m!}x^m$.

Sad Euler zaključuje da ako je $j$ „beskonačno velik”, možemo uzeti $\frac{j-1}{j} = \frac{j-2}{j} = \ldots = 1$. Uz to, primjećuje da se svaki $x$ može napisati kao umnožak takvog velikog $j$ i malog $\omega$, pa zaključuje da je

$$a^x = 1 + \frac{k}{1}x + \frac{k^2}{2!}x^2 + \frac{k^3}{3!}x^3 + \ldots.$$

Razvoj je najjednostavniji $k = 1$, a odgovarajući $a$ Euler je označio s e. Taj razvoj za $\mathrm{e}^x$, odnosno red

$$\mathrm{e} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

je Euler iskoristio za izračunavanje e na 23 decimale, a (1744.) je dokazao i da je e iracionalan broj i dao njegov razvoj u verižni razlomak. Stoga ga njemu u čast nazivamo Eulerovim brojem.

Dalje je Euler faktorizirao $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ kao

$$(\cos x + i \sin x) \cdot (\cos x - i \sin x) = 1$$

(u to doba je još pisao $\sqrt{-1}$ za imaginarnu jedinicu). To je generalizirao na

$$(\cos y \pm i \sin y)(\cos z \pm i \sin z) = \cos(y + z) \pm i \sin(y + z),$$

iz čega je (*de facto*) indukcijom dobio **de Moivreovu formulu**

$$(\cos z \pm i \sin z)^n = \cos(nz) \pm i \sin(nz).$$

Iz toga zaključuje da vrijedi:

$$\cos nz = \frac{(\cos z + i \sin z)^n + (\cos z - i \sin z)^n}{2}, \tag{10.1}$$

$$\sin nz = \frac{(\cos z + i \sin z)^n - (\cos z - i \sin z)^n}{2i}. \tag{10.2}$$

Nakon što je iz toga dalje izveo redove potencija za sinus i kosinus te još neke zaključke vezane za trigonometrijske funkcije, Euler uočava da u formule 10.1 i 10.2 može supstituirati $v = nz$, gdje je $z$ „beskonačno mali” (pa je $\cos z = 0$, $\sin z = z$), a $n$ beskonačno velik. Tako dobiva

$$\cos v = \frac{\left(1 + i\frac{v}{n}\right)^n + \left(1 - i\frac{v}{n}\right)^n}{2},$$

$$\sin v = \frac{\left(1 + i\frac{v}{n}\right)^n - \left(1 - i\frac{v}{n}\right)^n}{2i}.$$

No, $n$ je beskonačno velik, pa je (kao gore)

$$e^{\pm iv} = \left(1 \pm i\frac{v}{n}\right)^n.$$

Slijedi

$$\cos v = \frac{e^{iv} + e^{-iv}}{2}, \quad \sin v = \frac{e^{iv} - e^{-iv}}{2i},$$

iz čega slijedi Eulerova formula. Spomenimo ovdje da je ekvivalentna formula $\ln(\cos q + i \sin q) = iq$ bila 1712. poznata engleskom matematičaru **Rogeru Cotesu** (1682.–1716.), koji je poznat i po tome što je, čini se, bio prvi značajni matematičar koji je (u 1722. posthumno objavljenom članku) za nalaženje najverojatnijeg stvarnog iznosa mjerene veličine (usp. temeljne postavke računa pogreške kod Galilea) predložio sljedeću metodu: Ako mase $m_1, m_2, \ldots, m_n$ razmjestimo na udaljenosti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ od oslonca poluge (koju zamišljamo kao $x$-os), onda je pozicija $\overline{x}$ tog oslonca kad je poluga u ravnoteži najvjerojatnija vrijednost od $x$:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Mase $m_i$ je Cotes uzeo kao obrnuto proporcionalne greškama pojedinih mjerenja. Ako bismo pretpostavili da su one sve jednake, dobijemo **aritmetičku sredinu** kao procjenu stvarnog iznosa:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

U svakom slučaju je najkasnije 1770-ih godina aritmetička sredina bila uobičajena procjena stvarne vrijednosti.

Vratimo se Euleru. Euler je prvi matematičar koji je pojam **funkcije** postavio kao temeljni matematički pojam, a analizu opisao je kao disciplinu koja se bavi funkcijama. Uveo je i oznaku $f(x)$ (1734.), a 1755. je pokušao dati definiciju funkcije. Eulerova „definicija" funkcije u slobodnom prijevodu glasi: Funkcija neke varijabline veličine je *analitički izraz*, koji je na neki način složen iz te varijabilne veličine i brojeva ili konstantnih veličina. Pod analitičkim izrazima Euler je podrazumijevao formule kojima zadajemo funkcije, pri čemu je dozvoljavao beskonačne sume i produkte te verižne razlomke. Euler je funkcije podijelio na algebarske i transcendentne te predložio da se transcendentne proučavaju preko razvoja u redove potencija (pri čemu nije uvijek pazio na područje konvergencije). Također, Euler je prvi koristio pojam neprekidne funkcije, no to je za njega značilo da je odgovarajući analitički izraz samo jedan (da funkcija nije zadana po dijelovima različitim formulama).

Znamenito je i Eulerovo rješenje **Baselskog problema**. Baselski problem je zadatak kojeg je 1650. zadao talijanski matematičar **Pietro Mengoli** (1625.–1686.): Koliko iznosi

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots?$$

Zadatak je postao šire poznat kad ga je 1689. opisao Jacob Bernoulli. Oba brata Bernoulli su ga bezuspješno pokušali riješiti. Euler je 1735. pokazao da vrijedi

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Kako je to dobio? Opisat ćemo glavne korake njegova rješenja. Znajući razvoj u red potencija za sinus,

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots,$$

supstitucija $\sqrt{x}$ i dijeljenje s $\sqrt{x}$ daje

$$\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1-\frac{x}{6}+\frac{x^2}{5!}-\ldots$$

Rješenja jednadžbe

$$\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=0$$

su $x=(n\pi)^2$, s prirodnim brojem $n$. S druge strane, Euler je, naravno, znao da ako je $a$ nultočka polinoma, onda polinom sadrži faktor $(x-a)$, pa to znači da ako je slobodni član polinoma $p(x)$ stupnja jednak 1, i ako su $a_1$, $\ldots$, $a_n$ nultočke polinoma, taj polinom se može faktorizirati kao

$$p(x)=\left(1-\frac{x}{a_1}\right)\cdot\left(1-\frac{x}{a_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{x}{a_n}\right).$$

Stoga je, prema prvoj Vièteovoj formuli, kod polinoma sa slobodnim članom 1 zbroj recipročnih vrijednosti nultočaka polinoma $p(x)$ jednak suprotnom koeficijentu uz $x$. Sad je Euler, bez pravog matematičkog opravdanja, gornji red potencija interpretirao kao polinom beskonačnog stupnja i zaključio

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2}=\frac{1}{6}.$$

Od mnogih Eulerovih doprinosa matematičkoj analizi kao posljednji izdvajamo njegov pokušaj razrješenja prirode infinitezimalnih veličina, tj. diferencijala $\mathrm{d}x$. Euler u *Institutiones calculi differentialis* )1755.) kaže: „Onima, koji pitaju što je infinitezimalno mala veličina u matematici, odgovaramo: Ona je u biti jednaka nuli." Argument mu je bio sljedeći: $x \cdot 0 = 0$ za sve $x$, dakle $\frac{0}{0}$ može poprimiti proizvoljne iznose. Ako pretpostavimo $\mathrm{d}x = 0$ očigledno dobijemo $a\,\mathrm{d}x = 0$ za svaki konačni $a$. No, diferencijali različitih varijabli kod Eulera su različite nule. Stoga je $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = 1$, ali $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ može poprimiti različite iznose. iz toga slijedi objašnjenje brisanja viših potencija diferencijala iz izraza: Budući da je

$$\frac{\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)^2}{\mathrm{d}x} = 1 + \mathrm{d}x = 1,$$

slijedi

$$\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)^2 = \mathrm{d}x.$$

To je dalje iskoristio za dokazivanje pravila diferenciranja.

**Primjer 41** *Eulerov dokaz pravila za diferenciranje kvocijenta kreće od*

$$\frac{1}{q + \mathrm{d}q} = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\mathrm{d}q}{q}} = \frac{1}{q}\left(1 - \frac{\mathrm{d}q}{q} + \frac{\mathrm{d}q^2}{q^2} - \dots\right) = \frac{1}{q} - \frac{\mathrm{d}q}{q^2}.$$

*Stoga je*

$$\mathrm{d}\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p + \mathrm{d}p}{q + \mathrm{d}q} - \frac{p}{q} = (p + \mathrm{d}p)\left(\frac{1}{q} - \frac{\mathrm{d}q}{q^2}\right) - \frac{p}{q} = = \frac{p}{q} - \frac{p\mathrm{d}q}{q^2} + \frac{\mathrm{d}p}{q} - \frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{q^2} - \frac{p}{q} = \frac{q\mathrm{d}p - p\mathrm{d}q}{q^2}.$$

Slično izvodi i pravila za diferenciranje raznih funkcija.

**Primjer 42** *Neka je $y = \sin x$. Budući da vrijedi*

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a,$$

*slijedi*

$$\mathrm{d}y = \sin(x + \mathrm{d}x) - \sin x = \sin x \cos(\mathrm{d}x) + \sin(\mathrm{d}x)\cos x - \sin x.$$

*Zbog $\mathrm{d}x = 0$ je $\cos(\mathrm{d}x) = 1$ i $\sin(\mathrm{d}x) = \mathrm{d}x$,*[6] *preostaje $\mathrm{d}y = \cos x\,\mathrm{d}x$.*

[6] Oko svake točke $(c, f(c))$ najbolja nekonstantna aproksimacija funkcije $f$ je dana tangentom, tj. s prva dva člana Taylorovog razvoja oko $c$.

Ono što je ovdje posebno uočljivo je da je u Eulerovo doba diferencijalni račun stvarno bio diferencijalni, a da još nemamo derivacije. Napomenimo za kraj da se Euler bavio i diferencijalnim računom za funkcije više varijabli, diferencijalnim jednadžbama te varijacijskim računom.

Mnoge analitičke interese Euler je dijelio sa suvremenikom, francuskim matematičarem **Jean le Rond d'Alembertom** (1717.–1783.). D'Alembert je prvi ili barem jedan od prvih koji su primijetili: Za opravdanje infinitezimalnog računa bitne su granične vrijednosti, odnosno on je pitanje matematički rigoroznog utemeljenja infinitezimalnog računa usmjerio na limese. Također, on je prvi među poznatim matematičarima koji promatra **derivaciju**, koju definira kao graničnu vrijednost odgovarajućeg diferencijalnog kvocijenta. Nažalost, nikad nije uspio zadovoljavajuće objasniti pojam granične vrijednosti. Izrazio je sumnju u korištenje nekonvergentnih redova, a razvio je i po njemu nazvani kriterij konvergencije reda.

D'Alembert je bio vanbračno dijete artiljerijskog oficira i bivše časne sestre koja je od pape dobila dozvolu razrješenja zaređenja. Imala je niz ljubavnih afera i sudjelovala je u mnoštvu političkih intriga. Kad se rodio, majka ga je ostavila na stepenicama pariške crkve St. Jean Le Rond. Stoga je kršten kao Jean Le Rond, te smješten u dom za siročad. Otac ga je ubrzo potražio i pobrinuo se da se za njega brine žena jednog staklara, Madame Rousseau, koju je d'Alembert uvijek doživljavao kao svoju majku jer ga prava majka nikad nije priznala kao sina, a kod gospođe Rousseau je živio sve do srednjih godina. Otac mu je umro kad je Jean imao 9 godina, no ostavio mu je dovoljno novca da se može obrazovati. Upisan je u jansenističku školu. Ubrzo je promijenio ime u Jean d'Alembert. U toj se školi zainteresirao za matematiku i fiziku. Kad je 1735. završio školu, odlučio se za pravničku karijeru, no u slobodno se vrijeme nastavio baviti matematikom. Kad je 1738. postao advokat, predomislio se i sljedeće godine upisao studij medicine, no ni s tim studijem nije bio zadovoljan. Čini se da je jedino što ga je stvarno zanimalo bila matematika i u njoj je neobično brzo napredovao, osobito uzevši u obzir da je bio uglavnom samouk. D'Alembert je posebno poznat po svojim doprinosima infinitezimalnom računu i matematičkoj fizici. Smatra ga se utemeljiteljem teorije parcijalnih diferencijalnih jednadžbi i njihovih primjena u fizici. Život je proveo u Parizu i postigao velik matematički ugled, ali je često bio upetljan u razne sukobe jer je bio sklon svađama sa svima u svojoj okolini, a najpoznatiji su njegovi sukobi s Clairautom[7], Danielom Bernoullijem i Eulerom (s kojim je isprva bio u dobrim odnosima). Bio je i suizdavač i koautor Diderotove *Encyclopédie*. U drugom dijelu života više se

[7] Alexis Claude Clairaut, 1713.–1765., francuski matematičar, pokušavao je potvrditi Newtonovo i Huygensovo uvjerenje da je Zemlja spljoštena na polovima.

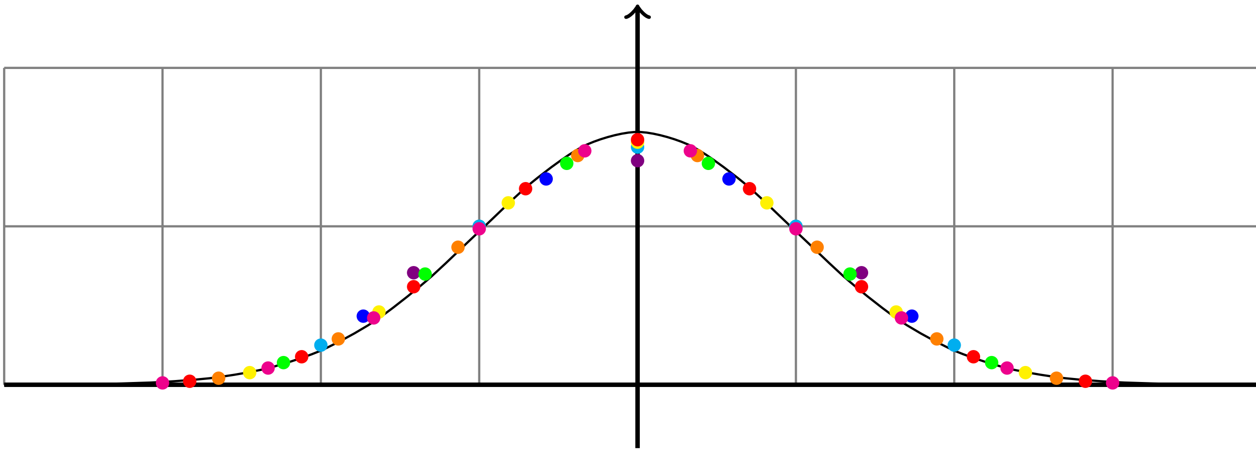
bavio književnošću i filozofijom. Nakon više godina slabog zdravlja, umro je od bolesti mjehura. Kao poznati nevjernik pokopan je u neoznačenom grobu.

Spomenuli smo da je Euler izveo formulu koju nazivamo de Moivreovom formulom za potenciranje kompleksnih brojeva. Ime je dobila po Abrahamu de Moivreu, koji ju je zapisao 1698., no znao ju je već 1676. Newton. No, iako je de Moivre većini najpoznatiji po toj formuli, on je iznimno važna figura u povijesti teorije vjerojatnosti. **Abraham de Moivre** (1667.–1754.) je bio rođen u Francuskoj, zbog vjere morao iseliti u Englesku. U Londonu je živio od „instrukcija". U Engleskoj je pak bio diskriminiran zbog nacionalnosti i nikad nije uspio dobiti mjesto profesora, iako su mu prijatelji bili Halley i Newton. Poznata je i anegdota o njegovoj smrti, da je potkraj života primijetio da svaki dan spava po 15 minuta dulje te da je predvidio da će umrijeti kad prvi put prespava puna 24 sata, a tako je i bilo.

U *Miscellanea Analytica* (1730.) je koristio formulu

$$n! \approx K\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

(za velike $n$). Uz $K = \sqrt{2\pi}$ ta je formula poznata kao Stirlingova. U izdanju *Doctrine of chance* 1738. de Moivre ju kao takvu koristi i otkriće te konstante pripisuje škotskom matematičaru Jamesu Stirlingu (1692.–1770.). Stirlingovu je formulu de Moivre iskoristio da bi izveo prvu formulaciju **centralnog graničnog teorema**, sadržanu u njegovom glavnom djelu *The Doctrine of Chances* (latinska verzija objavljena je 1711., a engleska izdanja 1718., 1738. te 1756.). Ono sadrži mnoge zanimljive zadatke i primjene te nekoliko važnih vjerojatnosnih definicija (primjerice, statistička nezavisnost događaja). To djelo, kako smo rekli, sadrži centralni granični teorem i time prvu pojavu **normalne razdiobe**. De Moivreov centralni granični teorem odnosi se na slučaj $p = \frac{1}{2}$, a na druge vjerojatnosti uspjeha u pojedinom pokusu ga je 1812. proširio Laplace. De Moivre je promatrao niz $n$ (nezavisnih) slučajnih pokusa, u svakome je uspjeh jednako vjerojatan ($p$ je konstantan i kod de Moivrea $\frac{1}{2}$). Budući da je egzaktni račun vjerojatnosti da uspjeh ostvarimo između $k$ i $l$ puta korištenjem binomne razdiobe za velike $n$ vrlo mukotrpan, de Moivre je tražio kako to procijeniti. Prvo je uočio karakteristika grafa binomne distribucije za različite manje $n$. Tako je primijetio da ako ishodište pomaknemo za $\frac{n}{2}$ ulijevo, tj. ako umjesto točaka $\left(k, \binom{n}{k}\right)$ crtamo točke $\left(k - \frac{n}{2}, \binom{n}{k}\right)$, sve binomne distribucije postaju parne funkcije. Da bi ujednačio ukupne vrijednosti, iznose vjerojatnosti skalirao je s $2^n$, odnosno crtao točke $\left(k - \frac{n}{2}, \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}\right)$. Naposlijetku, uočio je da ako apscise i ordinate skaliramo s $\frac{1}{\sqrt{n}}$ odnosno $\sqrt{n}$, što je veći $n$, to će grafovi binomnih distribucija sve više sličiti na jednu zvonoliku krivulju (slika 10.2).



Slika 10.2: Normalna razdioba kao limes binomnih

1733. je de Moivre pokazao da vrijedi

$$\binom{n}{\frac{n}{2}+d} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} e^{-2d^2/n}$$

i

$$\sum_{|k-n/2|\leq d} \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \approx \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{d/\sqrt{n}} e^{-2t^2} \mathrm{d}t,$$

odnosno dokazao specijalni slučaj centralnog graničnog teorema.

Među raznim zanimljivim zadacima koje je de Moivre riješio u svojoj *The Doctrine of Chances* (u izdanju 1756.) ističemo **problem kockareve propasti**. Problem glasi: Dva kockara igraju kockarsku igru u kojoj u svakom krugu ulažu isti iznos. Neka je $p$ konstantna vjerojatnost u pojedinom krugu igre uloge osvoji prvi igrač. Ako znamo koliko je tko imao novca na početku, koja je vjerojatnost da će drugi igrač ostati bez novca (propasti)? Za slučaj kad oba igrača igru započinju s jednakim iznosima novca, ovim problemom su se bavili i svoja rješenja dali još Pascal, Fermat i Huygens. Rješenje općeg slučaja, ali bez opisa postupka, dao je Jacob Bernoulli. De Moivreovo rješenje općeg slučaja nije samo prvo s detaljima, nego je i iznimno originalno. De Moivre je zamislio da igrači imaju novce složene u tornjeve i da po jedan novčić predstavlja po jedan ulog. Prvi igrač ima $a$ novčića, a drugi igrač ima $b$ novčića. Ako u nekom krugu pobijedi prvi, na njegov toranj se prebacuje najgornji novčić od drugog i obrnuto. Zatim je de Moivre novčićima dodijelio „nominalne vrijednosti”: Najdonji novčić prvog igrača ima nominalnu vrijednost $\frac{q}{p}$ (s $q = 1 - p$), sljedeći na njemu $\left(\frac{q}{p}\right)^2$

i t.d. do najgornjeg novčića nominalne vrijednosti $\left(\frac{q}{p}\right)^a$ (u kasnijem tijeku igre najgornji novčić ima nominalnu vrijednost $\left(\frac{q}{p}\right)^i$ za neki $i$ između 0 i $a+b$). Najgornji novčić drugog igrača ima nominalnu vrijednost $\left(\frac{q}{p}\right)^{a+1}$, novčić ispod njega $\left(\frac{q}{p}\right)^{a+2}$ i t.d. do najdonjeg novčića drugog igrača koji ima nominalnu vrijednost $\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}$. Budući da se u svakom krugu ulažu najgornji novčići, nominalni ulog drugog je u svakom krugu $\frac{q}{p}$ put ulog prvog. Stoga je očekivana nominalna vrijednost dobitka/gubitka u svakom krugu

$$p\left(\frac{q}{p}\right)^{i+1} - q\left(\frac{q}{p}\right)^i = 0,$$

za sve $i$. Ako s $P$ označimo vjerojatnost propasti drugog igrača, $Q = 1 - P$ je vjerojatnost propasti prvog. kupni nominalno očekivani dobici /gubici za oba moraju biti jednaki jer su jednaki u svakom krugu, dakle je

$$P\sum_{j=1}^{b}\left(\frac{q}{p}\right)^{a+j} = (1-P)\sum_{i=1}^{a}\left(\frac{q}{p}\right)^i.$$

Slijedi

$$P = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}} = p^b\frac{p^a - q^q}{p^{a+b} - q^{a+b}}.$$

Među vjerojatnosničarima 18. stoljeća ističe se i spomenuti Eulerov prijatelj **Daniel Bernoulli** (1700.–1782.), nećak Jacoba i sin Johanna Bernoullija, Eulerov prijatelj. Najpoznatiji je po doprinosima matematičkoj fizici, ali je ujedno prvi uveo tehnike diferencijalnog računa u teoriju vjerojatnosti, a svoja je otkrića primjenjivao i na pitanja osiguranja. Utemeljio je i primjenu teorije vjerojatnosti na kinetičku teoriju plinova. Najpoznatiji mu je doprinos analiza jednog znamenitog vjerojatnosnog paradoksa, kojeg je objavio u izvještajima St. Petersburgške Akademije znanosti 1738. Znameniti **St. Petersburški paradoks** glasi: Igrač baca novčić. Kockarnica će mu isplatiti 1 novčić ako u prvom bacanju padne glava, 2 ako glava prvi put padne u drugom bacanju, 4 ako glava prvi put padne u trećem bacanju itd. $2^{n-1}$ ako se glava prvi put pojavi u $n$-tom bacanju. Koliko iznosi pravedni ulog igrača na početku igre? Paradoks se sastoji u sljedećoj analizi: Lako je uočiti da je vjerojatnost dobitka u iznosu $2^{n-1}$ je $2^{-n}$. Stoga očekivana isplata igraču iznosi

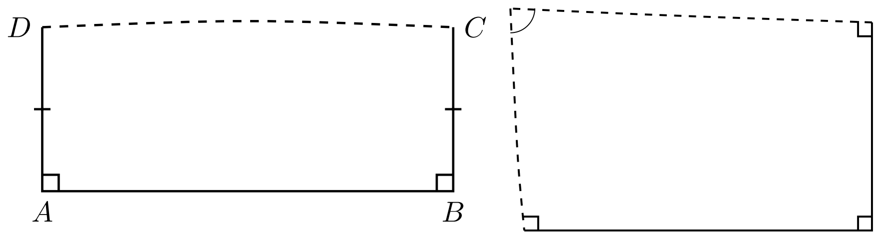
$$2^{-1}\cdot 1 + 2^{-2}\cdot 2 + 2^{-3}\cdot 2^2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2} = \infty$$

Čini se dakle da koliko god na početku igrač uloži, u konačnici će profitirati (a kockarnica bankrotirati). No, vjerojatnosti dobitka unutar prvih pet bacanja su: $p_1 = 50\%$ za dobitak u prvom bacanju; $p_2 = 75\%$ za dobitak unutar prva dva bacanja; $p_3 = 87{,}5\%$ za dobitak unutar prva tri bacanja; $p_4 = 93{,}8\%$; $p_5 = 96{,}9\%$. Vidimo: vrlo je vjerojatno (96,875 %) da bi igrač dobio unutar prvih 5 bacanja, i to (najviše) 16 kn, dakle se ulog od otprilike 16 kn se čini pravednim. Gdje je to do teorijskih $\infty$? Daniel Bernoulli je 1738. dao jedno rješenje, koristeći ideju očekivane koristi (ako igrač ima puno novca, mali dobitak mu ne znači puno, ali ako ima malo novca, onda mu je vrijedan i mali dobitak). Daniel je zatim koristeći diferencijalni račun izveo jednadžbu za izračunavanje prikladnog uloga ovisno o početnom kapitalu (za početni kapital 10 prikladan ulog ispada ca. 3, a za početni kapital 1000 prikladan ulog ispada ca. 6).

Spomenuli smo, sad već davno, da je **postulat o paralelama**, tj. Euklidov peti postulat, već od svoje pojave izazvao diskusije. Mnogi su tijekom stoljeća smatrali da se radi o teoremu kojeg je moguće dokazati iz ostalih aksioma i postulata. Među važnim razlozima za to je bilo da se jedini odnosi na neograničeno područje ravnine, da mu je formulacija bitno kompliciranija od ostalih i da se ne koristi sve do EEI29. Među matematičarima prije renesanse koji su se bavili s tim problemom spomenuli smo Kladija Ptolemeja, Alhazena i Omara Khayyama, no oni naravno nisu bili jedini. Počevši od 17. stoljeća ponovno se, malo po malo, aktualiziralo pitanje postulata o paralelama. Prvo djelo posvećeno isključivo toj tematici objavio je 1603. godine talijanski matematičar **Pietro Antonio Cataldi** (1548.–1626.). Kao i mnogi matematičari prije i poslije njega, Cataldi je pokušao dokazati peti postulati i pritom počinio tipičnu grešku: Pretpostavio je da vrijedi određeno „očito” svojstvo, koje je ali u stvarnosti ekvivalentno postulatu o paralelama, pa je stoga dokaz logički nevaljan. Najznamenitiji od matematičara koji su se u 17. stoljeću bavili problemom postulata o paralelama je već spomenuti John Wallis, koji je počinio grešku istog tipa, ali je za razliku od mnogih drugih i sam uočio da je pretpostavio nešto što treba dokazati. Ta njegova pretpostavka je jedna od poznatijih ekvivalentnih formulacija postulata o paralelama, te ju se ponekad naziva **Wallisovim aksiomom** (1693.): Za svaki lik postoji njemu sličan lik proizvoljne veličine.[8] Tijekom 18. stoljeća slijedilo je više pokušaja dokaza, a svi su imali isti taj tip greške.

Među svim tim pokušajima ističu se dva: Talijana **Girolama Saccherija** (1667.–1733.) i Švicarca **Johanna Heinricha Lamberta** (1728.–1777.). Oboma je zajedničko da su postulat o paralelama pokušali dokazazi svođenjem na kontradikciju te su u dijelu koji se odnosi na slučaj kad postu-

[8]Veličinu ovdje treba interpretirati kao površinu.




Slika 10.3: Saccherijev četverokut (lijevo) i Lambertov četverokut (desno)

lat ne vrijedi dobili niz teorema iz hiperboličke geometrije. Nažalost, obojica su onda počinili isti tip greške kao prethodnici, tj. pretpostavili neko „očito” svojstvo i dobili prividnu kontradikciju.

Saccheri je u svom djelu *Euclides ab Omni Naevo Vindicatus* (1733.) kritizira pokušaje Wallisa i Nasir al-Din al-Tusija te daje svoj „dokaz” u kojem koristi četverokut kojeg su u svojim pokušajima koristili Khayyam i al-Tusi. **Saccheri(-Khayyam-al-Tusij)ev četverokut** je četvrokut $ABCD$ s dvije jednako duge nasuprotne stranice $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ okomite na treću ($\overline{AB}$), vidi sliku 10.3 lijevo. Pretpostavimo da postulat o paralelama ne vrijedi. U Saccherijevom četverokutu je po SKS-teoremu o sukladnosti trokuta $\triangle ABC \cong \triangle BAD$, dakle je $|AC| = |BD|$, iz čega po SSS-teoremu o sukladnosti slijedi $\triangle ADC \cong \triangle BCD$ (SSS) pa je $\angle BCD = \angle ADC = \alpha$. [9] Sad su moguća tri slučaja: Ako je $\alpha$ tup, ako je $\alpha$ pravi i ako je $\alpha$ šiljast. U prva dva slučaja dade se (korektno) izvesti postulat o paralelama, dakle kontradikcija s pretpostavkom. U trećem slučaju Saccheri je dobio niz svojstava hiperbolične geometrije, ali je do prividne kontradikcije došao jer je dokazao da tad postoji beskonačno mnogo pravaca koji ne sijeku zadani pravac, što je smatrao nespojivim s prirodom pravca.

Lambert je u povijesti matematike posebno poznat po prvom dokazu iracionalnosti broja $\pi$ (1768.). Lambert je dokazao da ako je $x \neq 0$ racionalan, onda ni $e^x$ ni $\operatorname{tg} x$ ne mogu biti racionalni. Budući da je $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, $\frac{\pi}{4}$ pa onda ni $\pi$ ne može biti racionalan. Pritom je postavio i hipotezu da su $\pi$ i e transcendentni brojevi, što je dokazano tek više od 100 godina kasnije (trancendentnost broja $\pi$ je dokazao F. von Lindemann 1882., a za broj e transcendentnost je dokazao Charles Hermite 1873.). Također, Lambert je prvi koji je sustavno proučavao hiperbolne funkcije. Vezano za postulat o paralelama, Lambertov pristup (*Theorie der Parallellinien*, 1766.) je analogan Saccherijevom. I on je krenuo od jednog četverokuta kojeg je ranije u svom

[9] SKS-teorem je dokazan kao EEI4, a SSS-teorem kao EEI8, dakle bez korištenja postulata o paralelama: Ti teoremi vrijede i u neeuklidskim geometrijama.

pokušaju razmatrao jedan arapski matematičar, u ovom slučaju Al-Hajtam. **Lambert(-Alhazen)ov četverokut** je četverokut s tri prava kuta (slika 10.3). Opet se dobiju tri slučaja i u trećem, koji odgovara hiperboličnoj geometriji, je dobio niz zanimljivih rezultata, među kojima je najpoznatiji taj da bi u takvoj geometriji trokuti manje površine imali veći zbroj kutova (i što manji trokut, to bi zbroj kutova bi bliži 180°). Točnije: dobio je proporcionalnost površine trokuta s $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$. Primijetio je da prvi (kod njega drugi) slučaj funkcionira u sfernoj geometriji (gdje su zbrojevi kutova u trokutima veći od 180°) u kojoj je višak površine razmjeran zbroju kutova (T. Harriot je 1603. dokazao da je površina sfernog trokuta $R^2(\alpha+\beta+\gamma-180°)$). Stoga je Lambert imao je ideju da bi treći slučaj mogla biti geometrija na sferi imaginarnog polumjera. No, na kraju je i Lambert dobio prividnu kontradikciju.

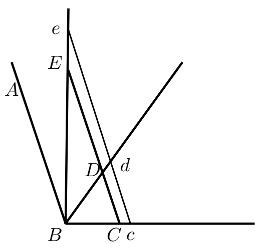
Nisu ovo bili jedini takvi pokušaji. U svakom slučaju, sredinom 18. stoljeća statust postulata o paralelama je bio da su svi pokušaji dokaza imali isti tip greške, koji je bio pretpostavljanje neke ekvivalentne tvrdnje kao očite. Tu je situaciju 1767. D'Alembert nazvao „skandalom elementarne geometrije". Također, u to doba još se euklidska geometrija (uključivo sferne) smatrala jedinom smislenom i da se radi o teoremu, no pojavljuju se i prve sumnje. Prvi koji je iskazao da se možda stvarno radi o nedokazivom aksiomu bio je njemački matematičar **Georg Klügel** (1738.–1812.).Nakon što je u svojoj doktorskoj disertaciji 1763. analizirao tridesetak različitih pokušaja dokaza, zaključio je da ga možda ljudi smatraju istinitim samo zbog toga na što ih njihova osjetila upućuju na njegovu istinitost. Time je započeo novu fazu u povijesti postulata o paralelama, u kojoj se počelo razmatrati kakva to bila geometrija u kojoj postulat o paralelama ne vrijedi?

Jedan od znanstvenika koji su smatrali da se postulat o paralelama ne može dokazati, nego da se radi o pravom aksiomu, bio je i naš **Josip Ruđer Bošković** (1711.–1787.). Bošković je imao mnogo velikih doprinosa matematici, prvenstveno primijenjenoj. Prvi matematički doprinosi bili su mu vezani za sfernu trigonometriju i njenu primjenu u astronomiji. U kasnijem razdoblju u metode sferne trigonometrije uključio je i diferencijalni račun. Najpoznatiji Boškovićev rezultat iz matematičke fizike je rješenje problema tijela najveće atrakcije, koje je objavio 1743. Problem se sastojao u određivanju rotacionog tijela koje najvećom privlačnom silom djeluje na točku na svojoj osi. Nakon uvodne analize problema, Bošković je problem riješio na dva načina, geometrijski i analitički. Bošković je razvio i metodu za izravnavanje grešaka, tj. tehniku kojom se iz mjernih podataka izračunava procjena krivulje koja opisuje ovisnost među mjerenim veličinama, uzimajući u obzir da svako mjerenje sadržava grešku nepoznatog iznosa. Svoju je metodu primijenio na rezultate mjerenja duljina dvaju meridijanskih lukova, koje je proveo s Englezom Christopherom Maireom. Svoju metodu je prvi put opisao 1755. Boškovićeva je ideja bila da se procjena stvarne ovisnosti (mi bismo rekli $y = f(x)$) iz rezultata mjerenja (dakle, iz parova $(x_i, y_i)$) dobiva temeljem zahtjeva da zbroj svih odstupanja (mjerenjem dobivenih rezultata od procjene) bude najmanji mogući:

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - y_i| \to \min .$$

Time je prvi puta uvedena statistička metoda za izravnavanje grešaka koja se može generalizirati na razne praktične situacije. Boškovićevu je metodu 1789. analitički opisao francuski matematičar Pierre-Simon Laplace, a sama je metoda neposredni prethodnik **metode najmanjih kvadrata**. Posebno je značajna Boškovićeva teorija konika koju je izložio u *Sectionum Conicarum Elementa*, trećem svesku svog matematičkog udžbenika *Elementorum Universae Matheseos* (1754.). Tu je krenuo od definicije konika kao ravninskih krivulja za koje je omjer udaljenosti bilo koje njihove točke do zadane čvrste točke (žarišta) i do zadanog čvrstog pravca (ravnalice) konstantan (usp. Papos). Navedeni omjer (današnji numerički ekscentricitet) nazvao je odredbenim omjerom (*ratio determinans*) konike. Na temelju te definicije izveo je (sintetičko geometrijski) prvu potpunu teoriju konika kao ravninskih krivulja, bez reference na njihov prostorni aspekt (ali je i dokazao da su krivulje koje opisuje stvarno presjeci stošca). Zanimljiva su i Boškovićeva razmatranja o osnovama matematike. Konkretno, razmatrao je ideje kontinuuma i beskonačnosti. U *De continuitatis lege* (1754.) je nagovijestio suvremenu definiciju kontinuuma realnih brojeva, koju je stotinjak godina kasnije dao njemački matematičar Richard Dedekind. U Boškovićevo se doba već podrazumijevala korespondencija između realnih brojeva i točaka pravca, ali se ona nije izričito iskazivala, niti se jasno izricalo da realni brojevi čine kontinuum, neprekidan skup bez rupa. Bošković pak navodi da kad nabrajamo prirodne brojeve izostavljamo brojeve koji se nalaze između njih i ispunjuju cijeli prazan prostor između dva najbliža broja. Zatim Bošković ističe gustoću: između svakog odabranog razlomka ili pak iracionalnog broja (kojeg Bošković naziva neizrazivim brojem) i bilo kojeg cijelog broja možemo naći neki drugi razlomak ili iracionalni broj. Pri svojim razmatranjima beskonačno malih i beskonačno velikih veličina naišao je na prividne paradokse neizmjerno velikog, iz čega je zaključio da su neizmjerno velike nemoguće.

**Primjer 43 (Boškovićev paradoks, 1741.)** *Promotrimo kut $CBA$ sa simetralom $BD$. Ako jedan od tako dobivenih dijelova ravnine ima beskonačnu površinu, isto vrijedi i za drugi.*




Slika 10.4: Ilustracija uz Boškovićev paradoks

*Kroz $C$ na jednom kraku povucimo paralelu s drugim krakom i neka ona simetralu siječe u $D$. Na $CD$ nađemo $E$ koja je od $D$ dvaput više udaljena nego $C$ od $D$. Povlačimo paralele $cde$ s $CDE$ i tako dijelimo kut $CBE$ na pruge. Zbog odabira $E$ je $\triangle dBe$ dvaput veće površine nego $\triangle cBd$. Stoga je četverokut $dDEe$ dvaput veće površine nego $cCDd$. To vrijedi za sve $cde$, dakle dio ravnine unutar kuta $CBD$ ima upola manju površinu nego unutar $DBE$, koji je manji od onog unutar $DBA$ koji je jednak $CBD$?!*

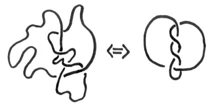
*Danas je taj paradoks lako razrješiv. Kako ćemo vidjeti na kraju kolegija, karakteristika beskonačnih skupova je da su u bijekciji s nekim svojim pravim podskupovima (usp. Galileo).*

# Poglavlje 11

# Razvoj matematike u 19. stoljeću

Na prijelazu 18. u 19. stoljeće naposlijetku će i kompleksni brojevi postati šire prihvaćeni, zahvaljujući otkriću njihove geometrijske interpretacije, tj. **kompleksne ravnine**. Prvi korak u tom smjeru napravio je još u 17. st. već spominjani John Wallis. Njegova razmatranja iz 1685. doduše još nisu bila sasvim savršena, ali je došao do važne nove ideje da se geometrijska interpretacija imaginarnih brojeva očituje u vertikalnom pomaku. No, trebalo je više od sto godina do preciziranja geometrijske interpretacije kompleksnih brojeva. Norveški geodet i kartograf **Caspar Wessel** (1745.–1818.) je 1799. prvi opisao kompleksnu ravninu. Kompleksni broj $a + bi$ gledao je kao radij-vektor točke $(a, b)$, opisan duljinom $r$ (dakle, apsolutnom vrijednošću) i „kutem smjera" (argumentom) $\theta$ te je kompleksne brojeve bilježio u obliku $r\angle\theta$. Opisao je i kako zbrajati odnosno množiti usmjerene dužine (kompleksne brojeve). Tako je zaključio da množenje s $i$ predstavlja rotaciju za pravi kut oko ishodišta, iz čega je zaključio da je imaginarna os okomita na realnu. No, njegov je tekst postao poznat tek 1895. Zato danas kompleksnu ravninu zovemo po Gaußu i Argandu: **Carl Friedrich Gauß** (1777.–1855.) i Švicarac **Jean-Robert Argand** (1768.–1822.) su nezavisno jedan od drugog početkom 19. st. opisali kompleksnu ravninu. Argand je ujedno prvi koji je koristio pojam modula kompleksnog broja.

Argand i Gauß su ujedno nezavisno jedan od drugog dali dokaze **osnovnog teorema algebre**. Gauß je bio prvi matematičar koji je primijetio grešku svih prethodnika (da su se koncentrirali na dokaz da su nultočke polinoma kompleksni brojevi, umjesto na to da ih ima koliki je stupanj polinoma) i dao prvi potpuni dokaz u sklopu svog doktorata 1799. Taj dokaz je topološki i imao je neke nedostatke, te je Gauß popravio dokaz i 1816. dao dva potpuno rigorozna dokaza. U međuvremenu je (1813.) dokaz (temeljen



Slika 11.1: Dva ekvivalentna uzla

na ranijoj d'Alembertovoj ideji) dao i Argand, no iako je Cauchy 1820. u svom *Cours d'analyse* cijelo jedno poglavlje posvetio Argandovom dokazu osnovnog teorema algebre, on Arganda uopće nije spomenuo i Argandov je dokaz postao poznat tek krajem 19. st. Argand je ujedno prvi koji je osnovni teorem algebre formulirao i za polinome s kompleksnim koeficijentima, a da to vrijedi je 1849. dokazao Gauß.

Znameniti matematičar Gauß je poznat i po mnogim drugim velikim doprinosima matematici, kako teorijskoj, tako i primijenjenoj. O njemu su poznate razne anegdote, primjerice kako je kao dijete brzo izračunao zbroj $1 + 2 + \ldots + 100$. S 19 godina našao je konstrukciju ravnalom i šestarom pravilnog 17-erokuta. Poznat je i njegov *Theorema egregrium* iz diferencijalne geometrije (1828.),[1] prema kojem je Gaußova zakrivljenost plohe, iako definirana s obzirom na prostor, zapravo intrinzičko svojstvo plohe. Bavio se i topologijom, točnije možemo reći da je utemeljio topološku **teoriju uzlova**. U matematičkom smislu, uzao je zatvorena krivulja u prostoru koja nema samopresjeka. Dva uzla su (topološki) ekvivalentna ako se bez rezanja (ili lijepljenja) mogu prevesti jedan u drugi (vidi sliku 11.1). Gauß je 1794. skicirao i tabelirao neke uzlove, a 1833. je (vezano za rad na elektrodinamičkim problemima) dokazao prvi poznati rezultat teorije uzlova (našao je jednu topološku invarijantu uzlova).

Gaußov student **Johann Benedict Listing** (1802.–1882.) je nastavio rad na topološkim problemima i prvi koristio izraz **topologija** (1836. u jednom pismu, 1847. u članku). Ipak, do kraja 19. st. uobičajeni termin za topologiju ostat će *analysis situs*, naslijeđen iz naslova spomenutog Eulerovog članka kojim je utemeljio ovu disciplini. Listing je također 1861. opisao prvu topološki zanimljivu plohu, poznatu **Möbiusovu traku** (slika **??**). To je ploha koja ima jednu stranu i jedan rub te nije orijentabilna, a ime je dobila po **Augustu Ferdinandu Möbiusu** (1790.–1868.), koji ju je otkrio 1858., ali je njegov opis objavljen tek 1865. Stoga možemo reći da su Gauß, Listing i Möbius utemeljitelji **geometrijske topologije**.

Möbius je također jedan od utemeljitelja klasične algebre vektora. Spo-

[1]Diferencijalnu geometriju, kao i nacrtnu, utemeljio je krajem 18. st. francuski matematičar Gaspard Monge (1746.–1818.).

Slika 11.2: Model Möbiusove trake

Slika 11.3: moebius

menuli smo da je krajem 16. st. S. Stevin prvi opisao paralelogram sila. U isto doba ga je razmatrao i Leonardo da Vinci, a 1636. ga je precizirao, objasnio i poopćio G. P. de Roberval. Otkrićem analitičke geometrije, algebra je postala povezana s geometrijom, no o prvoj eksplicitnoj pojavi **geometrijskih vektora** možemo govoriti tek u 19. stoljeću, nakon što se matematika dovoljno apstraktizirala da se mogao zamisliti račun i s drugim objektima, a ne samo brojevima. Spomenuto Wesselovo otkriće kompleksne ravnine je bilo formulirano preko radij-vektora, no kao što smo rekli ono nije bilo poznato do puno kasnije. No, Möbius je 1827. opisao baricentričke koordinate[2] u ravnini te pritom promatrao usmjerene veličine. Malo nakon toga, 1832., talijanski matematičar **Giusto Bellavitis** (1803.–1880.) je objavio djelo u kojem razlikuje dužine $AB$ und $BA$. Uveo je i „ekvipolentnost" takvih orijentiranih dužina (dvije orijentirane dužine su ekvivalentne ako su 'jednake' i paralelne, tj. ako predstavljaju isti geometrijski vektore) te njihovo zbrajanje. Još par godina kasnije, Möbius je 1837. prvi put jasno opisao razlaganje vektora s obzirom na dvije osi.

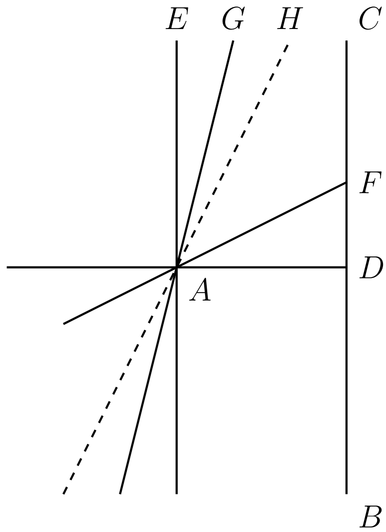
Vratimo se natrag Gaußu. Čini se da je upravo on bio prvi koji je stvarno razumio problem postulata o paralelama. Njime se bavio od svoje petnaeste godine, a najkasnije 1824. postao je uvjeren u njegovu nezavisnost od ostalih postulata i aksioma, tj. da nije dokaziv iz njih. Gauß je pokušao izvesti posljedice geometrije u kojoj bi kroz zadanu točku postojala više od jedne paralele s danim pravcem, ali nikad nije objavio svoje rezultate, najvjerojatnije jer kao osoba nije bio sklon sukobima i vjerojatno se bojao da bi takva objava izazvala „buru". No, u pismu astronomu Olbersu 1817. napisao je: „Sve više dolazim do uvjerenja, da neophodost naše geometrije nije dokaziva, bar ne od ljudskog razuma niti za njega. Možda ćemo u jednom drugom životu

[2]Baricentričke koordinate opisuju položaj točke kao mase koje treba postaviti u vrhove fiksnog trokuta tako da ta točka bude centar mase trokuta.

doći do drugih uvida u bit prostora, koji su nam sada nedostupni. Dotad bi trebalo geometriju po rangu izjednačiti ne s aritmetikom, koja stoji čisto a priori, već primjerice s mehanikom ...". Jedan od Gaußovih prijatelja bio je mađarski matematičar **Farkas Bolyai** (1775.–1856.), koji je i sam imao nekoliko neuspješnih pokušaja dokaza petog Euklidovog postulata. Njegov sin **János Bolyai** (1802.–1860.) je također razvio interes za tu temu, ali mu je otac preporučio da se time ne bavi. Ipak, János u pismu ocu 1823. kaže: „Otkrio sam stvari tako divne da sam zaprepašten ... Iz ničega sam stvorio čudan novi svijet". Te rezultate je objavio 1825. na 24 strane dodatka očevoj knjizi, a poznato je da je to Gauß komentirao pohvalom da je János genijalan, ali da je i on sam, Gauß, isto već ranije otkrio. János Bolyai je rođen u Transilvaniji, a već s 13 godina svladao je diferencijalni račun i analitičku mehaniku. Bio je i uspješan violinist, te je nastupao i u Beču, gdje je i studirao te zatim pristupio vojnoj inženjeriji i u njoj proveo 11 godina. Ostao je zabilježen kao najbolji plesač i mačevalac u austrijskoj vojsci. Nije ni pušio ni pio, čak ni kavu, a govorio je čak devet stranih jezika (uključujući tibetanski). Nakon čestih groznica, 1833. je otpušten vojske i povukao se na obiteljsko imanje, gdje je od 1834. živio s Rozáliom Kibédi, s kojom je imao dvoje djece. No, nikad se nisu vjenčali jer je zakon za vjenčanje zahtijevao novčani polog, a János je bio prilično siromašan. Umro je od upale pluća u dobi od 57 godina, a za sobom je ostavio više od 20.000 stranica rukopisa, no osim spomenutog priloga očevoj knjizi druge rezultate nije objavio.

U čemu se sastojao Jánosev „čudan novi svijet"? Važno je istaknuti da János Bolyai **nije** dokazao da postoji geometrija u kojoj ne vrijedi postulat o paralelama, nego je „samo" izveo posljedice geometrije u kojoj postoji više od jedne paralele, ako takva geometrija postoji. U osnovi, glavna razlika prema ranijim rezultatima iz pokušaja dokaza petog postulata kroz *reductio ad absurdum* je u tome što János prihvaća da je takva geometrija je moguća, te je tako dobio prve „prave" teoreme **hiperbolične geometrije**.

Neovisno o Gaußu i Bolyaiju, ekvivalentne rezultate je u isto doba dobio ruski matematičar **Nikolaj Ivanovič Lobačevski** (1792.–1856.). Studirao je matematiku i fiziku u Kazanu, gdje je poslije bio profesor i 1827.–1846. rektor. Oženio se tek s 40 godina, s dvadesetak godina mlađom ženom. Imali su sedmero djece koja su doživila odraslo doba (ali navodno 18 ukupno!), ali biografi navode da im je brak bio nesretan. Od 1840. mu je zdravlje počelo naglo slaviti te se umirovio 1846. Nakon smrti najstarijeg sina oslijepio je, a i do kraja života je imao ozbiljnih financijskih problema i umro je u siromaštvu. Lobačevski je uz iste pretpostavke kao Bolyai dobio niz teorema hiperbolične geometrije i objavio ih 1829. (u lokalnoj kazanskoj publikaciji). Razradu svoje nove geometrije objavio je i u više kasnijih radova, od kojih je najvažniji i najdetaljniji *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der*




Slika 11.4: Dijagram Lobačevskog

*Parallellinien* (Berlin, 1840.). Tu je eksplicitno naveo alternativu Euklidovom petom postulatu,[3] poznatu kao **postulat Lobačevskog**: U ravnini kroz svaku točku izvan danog pravca postoje (bar) dvije paralele s tim pravcem. Opisao je i kako možemo zamisliti takvu geometriju: „Svi pravci koji u ravnini izlaze iz jedne točke mogu se, u odnosu na dani pravac iste ravnine, podijeliti u dvije klase — one koji ga sijeku i one koji ga ne sijeku. Pravci koji su na rubu jedne i druge klase pravaca nazvat ćemo paralelnim danom pravcu." To je ilustrirao i jednim dijagramom (slika 11.4), u kojem je fiksirana točka $A$ i pravac $BC$. Okomica iz $A$ na $BC$ neka je $AD$, a pravac $AE$ neka je okomit na $AD$. Unutar kuta $\angle EAD$, neki pravci će sječi pravac $BC$, primjerice je takav pravac $AF$. Pretpostavimo da $AE$ nije jedini pravac koji ne siječe $BC$, dakle da postoji pravac $AG$ koji također ne siječe $BC$. Onda imamo dvije klase pravac, one koji sijeku $BC$ (u toj klasi je $AF$) i one koji ga ne sijeku (u toj klasi je $AG$), pa mora postojati „rubni" pravac $AH$ koji razdvaja te dvije klase.

Protivno Gaußvim očekivanjima, ni Bolyaijevi rezultati ni rezultati Lobačevskog nisu privukli veću pozornost, a sam Gauß se nikad nije javno izjasnio o temi.

[3]Postulat o paralelama je koristio u formulaciji „Za svaku točku izvan danog pravca postoji jedinstvena paralela s tim pravcem", koja je poznata i kao **Playfairov aksiom** jer ga je kao ekvivalentan izvornom postulatu dao škotski matematičar John Playfair(1748.-1819.), no zapravo je tu ekvivalenciju znao još Proklo. Zapravo, Playfair se i pozvao na Prokla, a formulirao ga je ovako: Ne mogu se povuči dva pravca kroz jednu točku tako da budu paralelni jednom pravcu, bez da se ta dva pravca podudaraju.

Slika 11.5: Model pseudosfere 8fotografija snimljena na izložbi „Volim matematiku" u Zagrebu 2015.

Kao zanimljivost spomenimo i da je János Bolyai potkraj života vjerovao da Gauß izmislio Lobačevskog kako bi smanjio vrijednost njegovih, Bolyaijevih, rezultata. Danas geometriju tipa Bolyai-Lobačevski zovemo hiperboličnom. U hiperboličnoj geometriji kroz svaku točku izvan pravca imamo beskonačno mnogo paralela s tim pravcem. Budući da ni Bolyai ni Lobačevski nisu dokazali da postoji geometrija u kojoj vrijede prva četiri Euklidova postulata, ali ne vrijedi peti, ostalo je otvoreno pitanje je li postulat o paralelama stvarno neovisan postulat, a ne teorem. To je potvrđeno prvim modelom hiperbolične geometrije tek 1868. Taj model je dao talijanski matematičar **Eugenio Beltrami** (1835.–1900.), kao dvodimenzionalne hiperbolične geometrije unutar euklidskog prostora. On je u prostoru promatrao **pseudosferu** (slika 11.5), rotacionu plohu traktrise oko njezine asimptote.[4] Beltramijev model je geometrija na pseudosferi, ako kao pravce definiramo geodetske linije (najkraće spojnice točaka na plohi). Beltramijevim modelom je problem konzistencije aksioma neeuklidske (hiperbolične) geometrije sveden na problem konzistencije aksioma euklidske geometrije.

Gauß je poznat i po svojoj velikoj ljubavi za teoriju brojeva, u kojoj je dao nekoliko iznimnih rezultata. Gaußova *Disquisitiones Arithmeticae* (1801.) smatra se početkom moderne teorije brojeva. Tu nalazimo simbol $\equiv$ za kongruencije, prvi potpun iskaz i dokaz **osnovnog teorema aritmetike** i **zakona kvadratnog reciprociteta** te Gaußovu procjenu broja $\pi(x)$ prostih brojeva koji nisu veći od realnog broja $x$. Zakon kvadratnog recipro-

[4]Traktrisa je krivulja koju je prvu analizirao Huygens 1692. Ponekad ju se naziva „krivuljom lijenog psa". Traktrisa je trajektorija točke koja je s drugom pokretnom točkom povezana dužinom fiksne duljine, a ta druga točka se giba duž pravca).

citeta danas iskazujemo koristeći Legendreov simbol $\left(\frac{a}{p}\right)$ koji iznosi 0 ako $p$ dijeli $a$, iznosi 1 ako je $a \equiv r^2 (\bmod p)$ za neki $r$, a inače je $-1$. Simbol nosi ime po francukskom matematičaru **Adrien-Marie Legendreu** (1752.–1833.). Legendre je bio iz bogate obitelji i odlično obrazovan u matematici i fizici. Imao je uspješnu matematičku karijeru. U doba revolucije bio je član komisije za standardizaciju mjera (1791.). Zbog ukidanja Akademije znanost izgubio dobar prihod, a u doba terora se jedno vrijeme morao i skrivati. 1795. godine Akademija je ponovno otvorena kao Nacionalni institut znanosti i umjetnosti i Legendre je postao član odjela za matematiku. Kad je 1803. Napoleon reorganizirao Institut, stvorena je geometrijska sekcija i Legendre je postao njen član. U sljedećem razdoblju doživio je par kritika od mladoga Gaußa koje su ga jako pogodile. Umro je siromašan jer mu je 1824. ukinuta penzija jer je odbio glasovati za vladinog kandidata za Institut. Bavio se geometrijom, primjenama matematike u fizici i astronomiji, eliptičkim funkcijama, a posebno je poznat po rezultatima iz teorije brojeva. Prvi je dokazao iracionalnost $\pi^2$, dao je jednostavniji dokaz iracionalnosti $\pi$ i smatrao je da je $\pi$ transcendentan.

Legendre je zakon kvadratnog reciprociteta objavio u *Théorie des Nombres* (1785.), no dokaz mu je bio nepotpun. Popravljeni (još uvijek nesavršen) dokaz objavio je 1798. Prvi potpun dokaz dao je, kako smo rekli, Gauß u (*Disquisitiones Arithmeticae*, 1801. Pritom je kritizirao Legendreove dokaze i inzistirao na svom prvenstvu, što je Legendrea vrlo povrijedilo. Ipak, Legendre je u svom kasnijem izdanju *Théorie des Nombres* (1808.) citirao Gaußa. Sam Gauß je našao čak osam različitih dokaza tog teorema kojeg je nazivao zlatnim.

Legendre je u izdanju *Théorie des Nombres* iz 1798. dao procjenu vrijednosti funkcije $\pi(x)$: Za velike $x$ je

$$\pi(x) \approx \frac{n}{\ln n - 1.08366},$$

što je ekvivalentno sljedećoj danas uobičajenoj formulaciji **teorema o prostim brojevima** (dokazan 1896.)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1.$$

Gauß je pak u *Disquisitiones arithmeticae* (1801.) dao svoju procjenu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\int_2^x \frac{dt}{\ln t}} = 1$$

Ona je, kao i Legendreova, ekvivalentna teoremu o prostim brojevima, a kao i za zakon kvadratnog reciprociteta i za ovaj je Gauß istakao svoju prednost pred Legendreom.

Gauß i Legendre imali su „sukob” oko još jedne matematičke teme, ovaj put ne iz teorije brojeva, nego iz primijenjene matematike. Radi se o metodi najmanjih kvadrata, koja je poboljšanje ranije metode za procjenu regresijske krivulje koju su opisali Bošković i Laplace. Legendre i Gauß su zaključili da je formulu regresijske krivulje $y = f(x)$ za dane točke $(x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, n$ bolje određivati minimizacijom greške definirane kao zbroj kvadrata, a ne apsolutnih vrijednosti odstupanja:

$$E = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2 \to \min$$

Primjerice, ako tražimo pravac koji u odnosu na dane točke ima najmanje ukupno odstupanje, potrebno je minizimirati

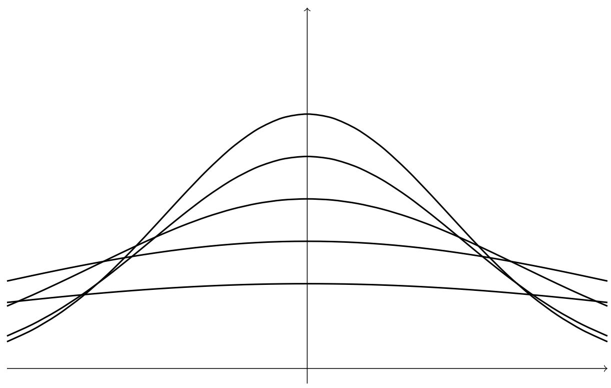
$$E(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 \to \min$$

Gauß je tu metodu razvio 1801. za izračunavanje putanje planetoida Ceresa (objavio ju je 1809. u *Theoria motus corporum coelestium*), no tvrdio je da ju je koristio od 1795. Legendre je pak, opet manje precizno razrađenu nego Gauß, istu metodu objavio 1805., što je dovelo i do rasprave o prvenstvu. Kad je regresijska krivulja polinom, zahtjev minimizacije $E$ kao funkcije koeficijenata polinoma vodi na rješavanje sustava linearnih jednadžbi. Gauß je stoga razvio i 1810. detaljno opisao i efikasnu metodu za rješavanje sustava linearnih jednadžbi — **Gaußovu metodu eliminacija**. Dokazao je i da je aritmetička sredina točka minimuma za kvadratna odstupanja (tj. da ona minimizira $e(x) = \sum (x - x_i)^2$).[5] Također, Gauß je dao i argumente za korištenja kriterija najmanjih kvadrata na temelju tri pretpostavke računa pogreške:

1. Manje greške su vjerojatnije od većih.
2. Za svaki realan broj $e$ su greške $e$ i $-e$ jednako vjerojatne.
3. Ako raspolažemo s više mjerenja iste veličine, aritmetička sredina rezultata je najverojatniji stvarni iznos.[6]

[5] Točka minimuma za apsolutna odstupanja, tj. točka minimuma funkcije $\overline{e}(x) = \sum |x - x_i|$ je medijan.

[6] Tu je pretposavku pokušao kasnije eliminirati. Danas se kao argument za dobivenu krivulju pogreške koristi centralni granični teorem, uz pretpostavku da su pojedinačne greške posljedica mnoštva „atomarnih” slučajnih grešaka.



Slika 11.6: Gaußova krivulja pogreške

Iz navedenih pretpostavki Gauß je kao krivulju pogreške dobio **Gaußovu krivulju** (slika 11.6) jednadžbe

$$\phi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}.$$

Pritom je $h$ pozitivna konstanta koju je Gauß interpretirao kao preciznost mjerenja.

**Pierre-Simon Laplace** (1749.–1827.) je, prema želji oca, trebao naći zvanje u crkvi, te je u skladu s tim bilo njegovo početno školovanje i upis studija teologije na sveučilištu u Caenu kad je imao 16 godina. Tokom dvije godine na sveučilištu otkrio je ljubav prema matematici te je napustio studij teologije i otišao u Pariz. Jedan od profesora iz Caena koji je u njemu otkrio matematički talent dao mu je pismo preporuke za d'Alemberta. On je brzo uočio Laplaceove sposobnosti te mu je pomogao i u usmjeravanju matematičkog rada i u nalaženju radnog mjesta. Tako je ubrzo Laplace dobio mjesto profesora matematike na vojnoj školi. Prvi Laplaceovi matematički radovi bili su iz područja diferencijalnih i diferencijskih jednadžbi, te primjena u mehanici i fizikalnoj astronomiji. Tokom 1770-ih reputacija mu je stalno rasla, a Laplace je usavršavao svoje matematičke tehnike i sve se više usmjeravao prema dva područja na kojima će dati svoje najvažnije rezultate: teoriji vjerojatnosti i nebeskoj mehanici. Godine 1780., Laplace je počeo surađivati sa znamenitim kemičarem Lavoisierom[7], te se tako počeo baviti i teorijom topline. Zajedno su utvrdili kemijsku ekvivalenciju disanja i izgaranja drvenog ugljena. Kako mu je ugled rastao, tako su Laplaceu rasle i

[7]Antoine Lavoisier, (1743.–1794.), otac moderne kemije, prepoznao je i imenovao kisik i vodik, dao prvu verziju zakona sačuvanja masa i odbacio flogistonsku teoriju.

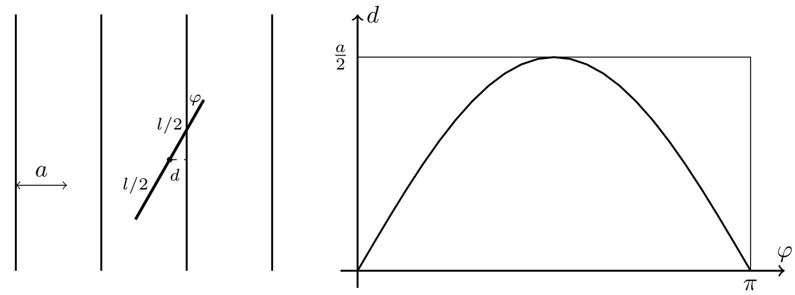
ambicije te je već 1771. pokušao biti izabran u Francusku Akademiju znanosti. Te je godine prednost dana Vandermondeu, a iduće Cousinu kojeg je Laplace smatrao bitno slabijim matematičarem od sebe te ga je to prilično naljutilo. 1773. godine Laplace je izabran za pridruženog člana Akademije, punopravan član postaje 1785. U doba pred Francusku revoluciju, Laplace je radio kao ispitivač pri Kraljevskom artiljerijskom odredu. Tu je 1785. godine ispitao i propustio šesnaestogodišnjeg Napoleona Bonapartea. 1787. godine dovršio je dokaz stabilnosti Sunčeva sustava. Za vrijeme Revolucije, Laplace je 1790. bio član komisije za standardizaciju mjera koja je radila na uvođenju metričkog i decimalnog sustava. To je bila jedina komisija Akademije koja je smjela nastaviti rad i nakon što je strahovlada 1793. ukinula Akademiju. Ipak, ubrzo zatim su iz komisije izbačeni kako Laplace, tako i neki njeni drugi članovi (među inim Lavoisier i Coulomb). Naime, strahovlada je zahtijevala da članovi komisije budu zaslužni po „svojim republikanskim vrlinama i mržnji prema kraljevima". Iako je uspio izbjeći sudbinu giljotine, za razliku od Lavoisiera i mnogih drugih kolega, ovo doba je bilo teško za Laplacea. Kad je skupa s Lagrangeom trebao konstruirati kalendar po želji revolucionarne vlade, iako je znao da su njihove ideje suprotne astronomskim podacima, odlučio je ne suprotstavljati se političkoj dogmi. Slično se konformistički složio s podjelom pravoga kuta na sto dijelova. Tokom 1795. Laplace je predavao (ne samo) teoriju vjerojatnosti na novoosnovanoj učiteljskoj školi *École Normale*. Kao osobna karakteristika Laplacea osobito je uočljiv njegov politički oportunizam, tako da je paralelno sa svojom znanstvenom karijerom uspio u burnim francuskim vremenima prijelaza 18. u 19. stoljeće održati se i na mnogim visokim pozicijama. Najpoznatije Laplaceovo djelo je *Traité de Mécanique Céleste* (1799–1825). Tu se primjerice nalazi znamenita Laplaceova diferencijalna jednadžba (koja je bila poznata i prije njega) za potencijal $U$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Radi se u biti o upotpunjenju Newtonova djela *Philosophiae naturalis principia mathematica*. U *Mécanique Céleste* Laplace obrađuje opća pravila ravnoteže i kretanja krutih tijela, tekućina i plinova, zakon univerzalne gravitacije, kretanja centara gravitacije pojedinih tijela Sunčeva sustava, nebesku mehaniku, nastanak plime i oseke, itd. U matematici u *Mécanique Céleste* vidi se i jak utjecaj dva velika Laplaceova suvremenika: Lagrangea i Legendrea. Iako jako značajno djelo, *Mécanique Céleste* je teška za čitanje, a mnogi su detalji neobjašnjeni. Tu se prvi put pojavljuje formulacija „Lako se vidi" koja je kasnije postala popularna u matematičkim tekstovima. Laplace ju je koristio na više mjesta gdje je bio uvjeren u točnost svojih rezultata, ali ih nije znao — ili htio — obrazložiti. Kako je Napoleonova moć rasla, Laplace se sve više odricao ranijih republikanskih načela. Kad je 1799. Napoleon postao prvi konzul, Laplace je postao ministar unutarnjih poslova, no za to se pokazao neprikladnim te je smijenjen već nakon šest tjedana. Napoleon je kasnije ironično komentirao, aludirajući na Laplaceove uspjehe u infinitezimalnom računu, da je Laplace „unio duh beskonačno malog u državnu upravu”. Usprkos neuspjehu na mjestu ministra unutarnjih poslova, Laplace je dobio mjesto u Senatu. U predgovoru trećem dijelu *Méchanique céleste* Laplace piše da je od svih u tom djelu iznesenih istina, autoru tj. njemu, najvrednija njegova predanost mirotvorcu Europe. Tu je posvetu u kasnijim izdanjima, nakon što je Napoleon izgubio vlast, uklonio. 1805. godine dobiva orden Legije časti, a 1806. postaje plemić s titulom *Comte de l'Empire*. Kao senator, 1814. je glasovao za smjenu Napoleona i povratak dinastije Bourbona. Kako ju na to slijedilo znamenitih sto Napoleonovih dana, Laplace se našao u neugodnoj poziciji te je napustio Pariz do konačnog Napoleonova poraza. Nakon toga ostao je vjeran dinastiji Bourbona, ali nepopularan u političkim krugovima. 1817. godine kralj Louis XVIII imenovao ga je markizom. Svoje je zadnje političke prijatelje izgubio 1826., kada je odbio potpisati Akademijin dokument podrške slobodi novina. Unatoč izvanrednim znanstvenim rezultatima, Laplace se nije istaknuo u međuljudskim odnosima. S vremenom je postajao sve manje skroman oko svojih dostignuća i sve više je ignorirao druge ljude oko sebe. Tako je nakon posjeta Akademiji 1780. − 81. Lexell komentirao kako je Laplace dao do znanja da se smatra najboljim matematičarem u Francuskoj. Prema svojim dobročiniteljima iz mladosti i kasnijim političkim prijateljima ponašao se nezahvalno i s prezirom. Ipak, imao je nezavisan karakter i otvoreno iskazivao svoje mišljenje, a osobito potkraj života pokazao se i velikodušnim: u jednom je slučaju zadržao svoj rezultat od objavljivanja kako bi jedan njegov učenik mogao dobiti potpunu zaslugu za istraživanje.

Laplace se problemima vjerojatnosti počeo baviti krajem 18. st., te je 1812. objavio znamenito djelo *Théorie Analytique des Probabilités* u kojemu obrađuje sve klasične probleme i njihovu povijest, ali i proširuje mnoge starije rezultate. Drugo izdanje (1814.) je poznato po 153 strane dugom predgovoru, koji je postao poznat i bivao odvojeno tiskan kao *Essai Philosophique sur les Probabilités*. Cilj mu je široj publici približiti vjerojatnosni račun. Značajan je i filozofski aspekt vjerojatnosti: prema Laplaceu, slučajnost nije ništa drugo do naziv za događaje kojima još ne znamo objasniti uzrok. Za njega je svemir deterministički i inteligencija (**Laplaceov demon**) koja bi znala sve podatke o trenutnom stanju, mogla bi matematički opisati sva buduća stanja. Danas znamo da to nije moguće, zbog temelja teorije kaosa i prirode fizikalnih mjerenja: Nijedno mjerenje nije sasvim egzaktno, a već male greške u početnim uvjetima mogu izazvati velike razlike u proračunatim efektima.

Prvi dio *Théorie Analytique des Probabilités* je posvećen matematičkoj




Slika 11.7: Buffonov problem

analizi, a drugi započinje s prvi put suvremeno formuliranom **klasičnom definicijom vjerojatnosti**: Vjerojatnost događaja je omjer brojeva za taj događaj povoljnih i svih mogućih slučajeva, ako ne postoji razlog da pretpostavimo da neki slučaj nastupa češće od drugih, odnosno ako su svi slučajevi za nas jednako vjerojatni. Laplace zatim dokazuje osnovna pravila računa vjerojatnosti, npr. da je vjerojatnost da nastupi jedan od dva događaja koji se međusobno isključuju jednaka zbroju njihovih vjerojatnosti: $P(A) + P(\neg A) = 1$.

U *Théorie Analytique des Probabilités* nalazimo i znameniti **Buffonov problem** iz geometrijske vjerojatnosti, nazvan po **Georges Louis Leclerc, Comte de Buffon** (1707.–1788.), koji ga je prvi opisao 1777.: Ako u ravnini imamo mrežu paralelnih jednako razmaknutih pravaca, razmaka $a$, te ako na ravninu bacimo iglu duljine $l \leq a$, kolika je vjerojatnost da igla padne tako da siječe neki od pravaca? Pogledajmo skicu situacije na slici 11.7 lijevo. Vidimo da će igla sječi jedan pravac točno ako je $\frac{l}{2} \sin \phi < d$. Dakle, ako su $\varphi$ uniformno distribuirani unutar $[0, \pi]$, a $d$ unutar $[0, a/2]$, tražena je vjerojatnost omjera površine ispod krivulje $d = \frac{l}{2} \sin \varphi$ između 0 i $\pi$ te pravokutnika $[0, \pi] \times [0, a]/2$ (slika 11.7 desno), tj.

$$p = \frac{\int_0^\pi \frac{l}{2} \sin \varphi \mathrm{d}\varphi}{\pi \cdot \frac{a}{2}} = \frac{2 \cdot \frac{2l}{2}}{a\pi} = \frac{2l}{a\pi}.$$

Laplace je primijetio da se ta formula može upotrijebiti za statističko-eksperimentalno računanje vrijednosti $\pi$. Dosad najbolji tako ostvareni rezultat ostvario je Lazzerini 1901. s 3408 bacanja: 6 decimala.

U *Théorie Analytique des Probabilités* nalazi se i **Bayesov teorem**, koji je ime dobio po **Thomas Bayesu** (1702.–1761.), koji se prvi bavio pitanjima uvjetne vjerojatnosti i formulirao varijantu tog teorema, kojeg danas iskazujemo ovako: Za događaje $A$ i $B$ vrijedi

$$P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A).$$

Laplace je također, rekli smo to već, generalizirao de Moivreov centralni granični teorem na Bernoullijeve pokuse kod kojih je vjerojatnost uspjeha bilo koji $p \in [0, 1]$. U *Théorie Analytique des Probabilités* je Laplace također detaljno opisao metodu najmanjih kvadrata te dao i razne primjene vjerojatnosti na statistička pitanja.

No, izraz **statistika** se u to doba još uvijek koristio u starom, tradicionalnom smislu opisa općih činjenica, odnosno podataka, o nekoj državi. Moderni smisao tom izrazu dao je belgijski matematičar i astronom, utemeljitelj primjena statistike u društvenim znanostima, **Lambert Adolphe Jaques Quetelet** (1796.–1874.). Quetelet je primijetio da se u većim ljudskim populacijamama mnoge stvari pojavljuju s velikom pravilnošću i često s normalnom raspodjelom. Tako je uočio i da je godišnjih broj ubojstava u Francuskoj gotovo konstantan, te da su čak i omjeri brojeva upotrijebljenih ubojitih sredstava gotovo konstantni, što je otvorilo pitanje pitanje odnosa slobodne volje i društvenog determinizma?! Quetelet je razvio i statističke metode za analize raznih tipova podataka, a 1853. je organizirao prvi međunarodni statistički kongres.

Francuski fizičar i matematičar **Siméon-Denis Poisson** (1781.–1840.) je svom kratkom životu napisao je oko 300 matematičkih radova, posebno iz teoriji vjerojatnosti i matematičke fizike. Glavno vjerojatnosno djelo mu je *Recherches sur la probabilité des judgements en matière criminelle et matière civile* (1837.), u kojem daje Poissonovu distribuciju za opis vjerojatnosti da se neki slučajni događaj dogodi u određenom vremenskom (ili prostornom) intervalu ako je vjerojatnost da se dogodi mala, ali broj pokusa velik: Za $n \to \infty$ i $p \to 0$, ako uz to $pn \to \lambda$, je vjerojatnost $k$ uspjeha u vremenoskom intervalu unaprijed definirane duljine, u kojem se prosječno dešava $\lambda$ uspjeha, aproskimativno $p_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, $k \in \mathbb{N}$. Od Poissona potječe i naziv „zakon velikih brojeva”, a sam je dokazao dvije varijante tog zakona.

Vratimo se malo na područje linearne algebre. Rekli smo da su se **determinante** prvi put pojavile krajem 17. stoljeća vezano za rješavanje sustava linearnih jednadžbi (Leibniz, Seki). Prvi objavljeni rezultati o determinantama potječu od Colin Maclaurina, koji je 1730-ih godina dokazao Cramerovo pravilo za $2 \times 2$- i $3 \times 3$-sustave. To pravilo je (bez dokaza) 1750. poopćio Švicarac **Gabriel Cramer** (1704.–1752.). U drugoj polovici 18. st. sve je više objavljenih rezultata o determinantama, te ih je francuski matematičar, glazbenik i kemičar **Alexandre-Théophile Vandermonde** (1735–1796) prvi (1771./72.) odvojio od jedine uloge vezane za rješavanje sustava i razmatrao kao funkcije, čija osnovna svojstva je dokazao.[8] Također 1772. je Pierre-Simon Laplace metode za izračunavanje determinanti poboljšao i objavio metodu koju danas nazivamo po njemu, a determinante je nazivao rezultantama (isti naziv je koristio i Leibniz, ali Laplace to vjerojatno nije znao). Suvremeni naziv determinanta potječe od Augustin-Louis Cauchyja, iz teksta u kojem je (1812.) dao dokaz Binet-Cauchyjevog teorema.[9] Prvu algoritamsku definiciju determinante dao je 1841. **Carl Gustav Jacob Jacobi** (1804.–1851.), a suvremeno ograničavanje determinanti vertikalnim crtama uveo je iste godine Arthur Cayley, o čijem radu u algbri ćemo više reći nešto kasnije.

Vandermonde i Lagrange su važni neposredni prethodnici otkrića teorije grupa. Neka svojstva grupa[10] korištena su, naravno, davno prije nego su te strukture uvedene, kao svojstva algebarskih operacija s brojevima. Također, Eulerov dokaz malog Fermatovog teorema iz 1758. koristi s se tiču grupe ostataka (modulo prostog broja). U drugoj polovici 18. st. su se **Joseph-Louis Lagrange** (1736.–1813.) i Vandermonde bavili pitanjem rješivosti opće algebarske jednadžbe u radikalima. Podsjetimo se: dok su rješenja linearnih i kvadratnih jednadžbi u radikalima bila poznata još Al-Hvarizmiju, u renesansi su (Cardano, Tartaglia, Ferrari, del Ferro) otkrili rješenja jednadžbi trećeg i četvrtog stupnja u radikalima. Većina matematičara su nakon toga vjerovali da će se s vremenom naći rješenja u radikalima i za **algebarske jednadžbe** većih stupnjeva. Lagrange i Vandermonde su prvi problemu pristupili razmatrajući *zašto* takva rješenja postoje za jednadžbe stupnjeva do 4. Obojica su primijetili da opća verzija Vièteovih formula znači da su koeficijenti $a_i$ algebarske jednadžbe

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

simetrične racionalne funkcije[11] njezinih rješenja $x_1, \ldots, x_n$.[12] Stoga su sve racionalne funkcije koeficijenata također simetrične s obzirom na rješenja jednadžbe.

[8] Determinanta koju danas nazivamo Vandermondeovom se ne pojavljuje ni u jednom od Vandermondeovih radova.

[9] Iste godine je Jaques Binet (1786.–1856.) dao, manje precizan, dokaz istog teorema.

[10] Grupa je neprazan skup $G$ opskrbljen binarnom operacijom $*$ koja je asocijativna, ako su u tom skupu jednoznačno rješive sve jednadžbe oblika $a * x = b$.

[11] To znači da im vrijednost ne ovisi o poretku $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tj. $f(p(x_1, \ldots, x_n))$ je ista za svaku permutaciju $p$.

[12] Podsjećamo, u to doba osnovni teorem algebre još nije bio dokazan, ali je bilo općeprihvaćeno da jednadžba stupnja $n$ ima $n$ rješenja u nekom dovoljno velikom skupu brojeva.

**Primjer 44** *Pogledajmo opću (normiranu) kubnu jednadžbu*

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

*Vietève formule za nju su:*

$$-a = x_1 + x_2 + x_3; \quad b = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3; \quad -c = x_1x_2x_3.$$

*Uzmimo primjerice sljedeću racionalnu funkciju koeficijenata:*

$$r(a, b, c) = \frac{a}{b - c}.$$

*Tada je*

$$r(a, b, c) = \frac{-x_1 - x_2 - x_3}{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_2x_3}$$

*simetrična funkcija rješenja $x_1$, $x_2$ i $x_3$.*

S druge strane, rješenje u radikalima su funkcije koeficijanata jednadžbe u kojima se $x_i$-ovi dobivaju kao funkcije koeficijenata koristeći operacije $+$, $-$, $\cdot$, $:$ te dodatno i korijene. Budući da općenito takvim formulama dobivamo različite vrijednosti za $x_1$, $x_2$, $\ldots$, $x_n$, slijedi da korijeni „ruše" simetriju.

Lagrange je dalje promatrao izraze $y = \sum_{i=1}^{n} \omega_{i-1} x_i$, gdje su $1$, $\omega$, $\ldots$, $\omega^{n-1}$ kompleksni $n$-ti korijeni od 1. Uočio je da budući da imamo $n!$ permutacija rješenja algebarske jednadžbe $x_1$, $\ldots$, $x_n$, izraz $y$ poprima najviše $n!$ različitih vrijednosti. Ako bismo ih sve znali (i ako bi bilo bar $n$ različitih među njima), dobili bismo sustav linearnih jednadžbi čije rješenje je $(x_1, \ldots, x_n)$. No, tih $n!$ (ili manje) vrijednosti $y$ su ujedno sigurno rješenja jedne algebarske jednadžbe stupnja $n!$.

**Primjer 45** *Za kubne jednadžbe imamo $n = 3$, dakle*

$$\omega_1 = 1, \omega_2 = \overline{\omega_3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

*Tu bi dakle Lagrange gledao izraz*

$$y = x_1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) x_2 + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) x_3.$$

*Taj izraz ima najviše $3! = 6$ različitih vrijednosti, koja zadovoljavaju neku jednadžbu stupnja $6$:*

$$(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3)(y - y_4)(y - y_5)(y - y_6) = 0.$$

*Lagrange je uočio da će ta jednadžba uvijek biti oblika*

$$y^6 + P(x_1, x_2, x_3)y^3 + Q(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

*koja se supstitucijom* $t = y^3$ *može svesti na kvadratnu. Dakle, za kubne jednadžbe* ($n = 3$)*, za koje znamo da su rješive u radikalima, postoji jednadžba stupnja* $3! = 6$ *za* $y$*-e koja dade svesti na jednadžbu stupnja* 2*, također rješivu u radikalima.*

Lagrange je primijetio da se u svim slučajevima s poznatim rješenjima u radikalima ($n = 1, 2, 3, 4$) može jednadžba stupnja $n!$ za $y$-e svesti na jednadžbu stupnja manjeg od $n$, rješivu u radikalima, tj. ako jednadžbu stupnja $n!$ možemo svesti na jednadžbu stupnja 4 ili manjeg, onda možemo izračunati $y$-e, a iz njih (preko sustava linearnih jednadžbi) dobiti $x$-eve, rješenje jednadžbe stupnja $n$ u radikalima. Među ostalim, Lagrange je iz ovih razmatranja (1771.) zaključio da ako imamo polinom s $n$ varijabli, te ako te varijable permutiramo na svih $n!$ načina, dobit ćemo neki broj $m$ različitih polinoma, pri čemu je $m$ djeljitelj od $n!$. Bila je to prva verzija **Lagrangeovog teorema teorije grupa**: Red podgrupe konačne grupe $G$ uvijek je djelitelj od reda od $G$.

Talijansko-francuski matematičar Joseph-Louis Lagrange poznat je osim po doprinosima algebri i po doprinosima matematičkoj analizi, matematičkoj fizici (klasična mehanika i Lagrangeove jednadžbe) te teoriji brojeva. Rođen je u Torinu, kršten kao Giuseppe Lodovico Lagrangia. Pradjed mu je bio konjički oficir francuske vojske i već odmalena je Lagrange preferirao tu stranu svoje obitelji. Otac mu je bezusjpješnim spekulacijama izgubio puno novca, a Lagrange je kasnije rekao: „Das sam bio bogat, vjerojatno se ne bih bio posvetio matematici." Tijekom studija prava otkrio je interes za matematiku i fiziku, no matematiku je uglavnom naučio sam i sa samo 19 godina dobio profesuru matematike na Kraljevskoj artiljerijskoj školi u Torinu. Uz podršku d'Alemberta, 1766. je dobio Eulerovo mjesto na berlinskoj Akademiji. Godinu kasnije se oženio, no nije imao djece, a žena mu je umrla 1783. U Berlinu je boravio 20 godina i svojim radovima osvojio mnoge velike znanstvene nagrade. Zbog zdravstvenih problema, nakon smrti Friedricha Velikog prihvatio je poziv pariške Akademije i preselio 1787. u Pariz. Osnovni stav da je jedan od glavnih principa svakog mudrog čovjeka prilagoditi se zakonima države u kojoj živi ma koliko nerazumni bili pomogao mu je da bez većih problema preživi Francusku revoluciju. Ponovno se oženio 1792., mladom kćerkom kolege. 1790-ih je predavao i na znamenitim francuskim visokim školama *École Polytechnique* i na *École Normale*, no nije ostao zabilježen kao dobar predavač. U doba Napoleona postao je grof, a dva dana prije smrti dobio je orden Velikog križa.

Krajem 18. st., Lagrange pokušavao je rigorozno definirati **derivacije**. Prema Lagrangeu, infinitezimalni račun treba svesti na algebru redova potencija. Za njega je račun s redovima podjednako algebra kao račun s konačnim algebarskim izrazima, analogno tome što je račun se beskonačnim decimalnim razvojima i dalje aritmetika (usp. Newtonov citat).

U *Théorie des fonctions analytiques* (1797.) objavio je rezultat za kojeg je mislio da ga je korektno dokazao, a to je da se svaka funkcija (koju, u duhu Eulera, gleda kao analitički izraz) može zapisati u obliku

$$f(x+h) = f(x) + p(x)h + q(x)h^2 + r(x)h^3 + \dots, \tag{11.1}$$

za sve do na eventualno konačno mnogo vrijednost $x$. Na temelju toga, Lagrane derivaciju od $f(x)$ definira kao $p(x)$, drugu derivaciju kao pola $q(x)$ itd. Lagrange je pisao $fx$, $f'x$, $f''x$ za funkciju, njenu prvu i drugu derivaciju. Prednost njegovog pristupa je očigledna: Izbjegao je fizikalne argumente i kvocijente infinitezimalnih veličina. Također, sad su i derivacije također funkcije. No, kako je malo kasnije uočio Cauchy, tvrdnja o mogućnosti razvoja svake funkcije u red potencija nije točna.

Prema Lagrangeu, temeljno svojstvo derivacije je

$$f(x+i) = f(x) + if'(x) + iV,$$

ako se $i$ za svaki $D$ može izabrati dovoljno malen da $V$ bude između $-D$ i $D$. Iz toga je izveo **teorem srednje vrijednosti**, koji u izvornoj formulaciji glasi: Za svaki $D$ može se naći $i$ sa svojstvom

$$i(f'(x) - D) < f(x+i) - f(x) < i(f'(x) + D).$$

Koristeći ovaj teorem Lagrange je dokazao razne tvrdnje o derivacijama, primjerice vezu predznaka $f'$ i rasta odnosno pada od $f$.

No, da je osnovni teorem koji je temelj Lagrangeovih razmatranja o derivacijama netočan, kontraprimjerom funkcije koja se sa svojim razvojem u red potencija podudara samo u jednoj točki,[13] iz čega slijedi da funkcije općenito nisu određene svojim razvojima u redove potencija, je pokazao **Augustin-Louis Cauchy** (1789.–1857.). On je konačno, 1821., dao zadovoljavajuću definiciju limesa, kojom D'Alembertova definicija derivacije postaje korektna. Cauchyjeva definicija limesa glasi: Ako se slijed vrijednosti koje se

[13]Cauchyjeva funkcija je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Njezin Maclaurinov razvoj je nulfunkcija.

pripisuju nekoj varijabli neograničeno približava nekoj vrijednosti, tako da na kraju razlika do nje bude toliko mala, koliko želima, posljednja se vrijednost zove **graničnom vrijednošću** ostalih vrijednosti. Cauchy dalje kaže da su infinitezimalne veličine one kojima je limes 0. Preciznije je definiciju derivacije formulirao 1823.: **Derivacija** $f'(x)$ funkcije $f(x)$ je, ako postoji, limes kvocijenta $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ kad $h$ teži u 0.

Cauchy je pokušao popraviti starije definicije funkcije eulerovskog stila tako da budu uključene i implicitno zadane funkcije. Cauchyjeva definicija funkcije iz 1821. glasi: „Ako su varijabilne veličine tako povezane, da ako je zadan iznos jedne, iz njega možemo odrediti iznose ostalih, općenito te različite veličine izražavamo preko te jedne, koju nazivamo nezavisnom varijablom; ostale pak veličine, koje su izražene preko nezavisne varijable, zovu se funkcijama te varijable." Vidimo da je ipak i kod Cauchyja funkcija još uvijek poistovjećena s formulom. Kod Cauchyja možemo naći i definiciju **neprekidne funkcije** u suvremenom smislu, kao funkcije kod koje beskonačno mali prirast varijable izaziva beskonačno mali prirast funkcije: „Funkcija $f(x)$ je neprekidna funkcija varijable $x$ unutar dviju danih granica, ako se za svaki $x$ između njih brojčani iznos razlike $f(x+\alpha)-f(x)$ skupa s $\alpha$ beskonačno smanjuje."

Često se kaže da je Cauchy uveo $\varepsilon-\delta$-jezik u analizu. To nije sasvim točno, iako se njegove definicije i dokazi lako prevedu na taj jezik. Jedini dokaz u kojem stvarno koristi $\varepsilon$ i $\delta$ je njegov dokaz teorema srednje vrijednosti, koji u Cauchyjevoj formulaciji glasi: Ako je $f(x)$ neprekidna na $[x, x+a]$, onda je $\min_{[x,x+a]} f'(x) \leq \frac{f(x+a)-f(x)}{a} \leq \max_{[x,x+a]} f'(x)$. Cauchy dokaz započinje ovako: Neka su $\delta$, $\epsilon$ dva jako mala broja; prvi se bira tako da za sve iznose $i$ manje od $\delta$ i sve iznose $x$ omjer $(f(x+i)-f(x))/i$ uvijek bude veći od $f'(x)-\epsilon$ i manji od $f'(x)+\epsilon\ldots$

No, argumenti tipa $\varepsilon-\delta$ mogu se naći i ranije, primjerice kod Lagrangea, a slične definicije (npr. neprekidne funkcije) i dokaze s argumentima stila $\varepsilon-\delta$ nalazimo u isto vrijeme i kod českog matematičara **Bernarda Bolzana** (1781.–1848.). Bolzanovi su doprinosi postali poznati tek u drugoj polovici 19. st.

Cauchyjeve prve godine života bile su obilježene Francuskom revolucijom. Nakon iste je obitelj živjela u Parizu, a česti su im gosti bili Lagrange i Laplace. Svoje prvo nastavničko mjesto Cauchy je dobio 1815. na *École Polytechnique*, na kojoj je i studirao. Već 1816. postao je poznat (rješenjem jednog Fermatovog problema iz teorije brojeva). Brzo je napredovao. 1820-ih je postavio moderne temelje matematičke analize i utemeljio kompleksnu analizu. Poznat je po lošim odnosima s kolegama te radikalno, gotovo fanatično, katoličkim stavovima. Niels Henrik Abel je o njemu rekao: *Cauchy* *je lud i tu se ne može ništa učiniti, no trenutno je on jedini koji zna kako raditi matematiku.* Cauchy je zagubio radove mnogih matematičara ili ih dugo zaboravljao, a nerijetko je tuđe rezultate objavio pod svojim imenom. Cijelog života je konzistentno podržavao dinastiju Bourbon, tako da je 1830.–1838. bio u dobrovoljnom egzilu. Nakon tog doba su mu zbog stavova odbijene mnoge pozicije. Sveučilišnu je poziciju dobio natrag tek 1848. Jedan je od najproduktivnijih matematičara u povijesti — objavio je 789 matematičkih radova.

Cauchyjev suvremenik, **Jean Baptiste Joseph Fourier** (1768.–1830.) poznat je po razvoju teorije trigonometrijskih redova i fizikalnim rezultatima. On je uveo i oznaku $\int_a^b$ za određene integrale. U sklopu naše teme zanimljiva je Fourierova definicija funkcije iz 1822., u kojoj se već nazire oslobađanje od funkcije kao formule: „Općenito funkcija $f(x)$ predstavlja niz vrijednosti ili ordinata, od kojih je svaka proizvoljna. Za beskonačno mnogo danih iznosa apscise $x$ postoji jednako mnogo ordinata $f(x)$. Sve one imaju brojčane iznose, pozitivne, negativne ili nula. Ne pretpostavljamo da te ordinate poštuju neko opće pravilo; one slijede jedna za drugom na bilo koji način i svaka je dana kao da je jedina."

Teorijom Fourierovih redova bavio se i njemački matematičar belgijskog porijekla **Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet** (1805.–1859.). On je 1837. dao gotovo modernu definiciju neprekidne funkcije, koju je lako prilagoditi u opću definiciju funkcije (ne dajemo ju doslovno kao prethodne): Neka $x$ poprima vrijednosti između $a$ i $b$. Ako svakom $x$-u odgovara samo po jedan konačan $y$, tako da se postepeno mijenja kako se $x$ postepeno mijenja, $y$ je neprekidna funkcija od $x$. Dirichlet dalje jasno kaže da ne treva pstojati jedinstveno pravilo, štoviše da ovisnost ne mora biti iskaziva matematičkim operacijama. Neprekidnoj funkciji kod Dirichleta odgovara neka neprekidna krivulja od $a$ do $b$. Sličnu je definiciju (također uz zahtjev neprekidnosti) dao Lobačevski 1838. Poznat je i Dirichletov primjer funkcije koja ima prekid u svakoj točki (1829.): to je kod njega funkcija koja ima vrijednost $c$ u svakom racionalnom, a vrijednost $d \neq c$ u svakom iracionalnom broju.

Dirichlet se već s 12 godina zaljubio u matematiku i sav je džeparac trošio na kupnju matematičkih knjiga. Studirao je u Parizu, djelovao u Berlinu i Göttingenu. Oženio se Rebeckom Mendelssohn. Bio je prijatelj Jacobija i kad se Jacobi uslijed siromašnih prilika razbolio i bio prisiljen ići u Italiju (1843.) uspio je za njega ishoditi financijsku pomoć. Za vrijeme posjeta Montreuxu 1858. prilikom jedne konferencije doživio je srčani udar. Teško bolestan vratio se u Göttingen. Dok je bio bolestan žena mu umire od kapi te je ubrzo zatim i on umro. Opisan je ovako: „On je dosta visok, štrkljast čovjek s brkovima i bradom koji postaju sijedi i pomalo grubim glasom te dosta nagluh. Bio je neopran, sa šalicom kave i cigarom. Jedna od mana mu je zaboravljanje vremena, vadio je svoj sat, vidio da je prošlo tri, i onda istrčao bez da završi rečenicu." Osim po doprinosima analizi, najpoznatiji je po rezultatima u teoriji brojeva. Njegov prvi članak (1825.), kojim je odmah postao poznat, sadrži dokaz velikog Fermatovog teorema za slučaj $n = 5$, točnije jednog od dva podslučaja. Naime, ako je $x^5 + y^5 = z^5$, pokazuje se da jedan od brojeva $x$, $y$, $z$ mora biti paran i jedan djeljiv s 5. Stoga treba razmatrati slučaj kad je neki od $x$, $y$ i $z$ djeljiv s 10 te slučaj kad nijedan nije djeljiv s 10. Drugi slučaj dokazao je iste godine Legendre. Kasnije je Dirichlet veliki Fermatov teorem za $n = 14$. Dokazao je i Gaußovu hipotezu da u aritmetičkom nizu u kome su prvi član i diferencija međusobno relativno prosti brojevi ima beskonačno mnogo prostih brojeva, uveo je Dirichletov red $\sum_n a_n n^{-s}$, a bavio se analitičkom i algebarskom teorijom brojeva.

Osvrnimo se ovdje kratko na daljni tijek dokaza velikog Fermatovog teorema. U Dirichletovo je doba već bilo poznato da ga je dovoljno dokazati za eksponent 4 (Fermat, Euler) i za proste eksponente. Prvi značajniji generalni pristup potječe od francuske matematičarke **Sophie Germain** koja je svoje radove morala objavljivati pod pseudonimom Monsieur Le Blanc (1776.–1831.). Ona je dokazala je 1805. da teorem vrijedi za određenu klasu prostih eksponenata, koji se danas njoj u čast nazivaju brojevima Sophie Germain. Kroz 19. st. dokazani su mnogi pojedinačni slučajevi te je do početka 20. st. dokazan za sve eksponente manje od 100 kao i da vrijedi za beskonačno mnogo prostih eksponenata. Tada se razvoj teorije brojeva sve više počeo odmicati od ovog problema, te se sve do početka 1980-ih godina napredak sastojao uglavnom u računalnim provjerama. Sredinom 1980-ih je njemački matematičar Gerhard Frey (1944.–) uočio da se ovaj teorem može dobiti iz jedne naizgled s njime potpuno nepovezane hipoteze (iz graničnog područja algebarske topologije i teorije brojeva), poznate pod nazivom Shimura-Taniyama-Weil-ova hipoteza. Veze između tih rezultata uspostavili su sam Frey, te britanski matematičari Richard Taylor (1962.–) i Andrew Wiles (1953.–). Andrew Wiles je 1995. konačno dokazao i zadnji potrebni korak.

Rekli smo da su krajem 18. stoljeća Lagrange i Vandermonde razmatrali permutacije rješenja algebarskih jednadžbi kako bi, možda, uspjeli naći rješenja u radikalima jednadžbi 5. i višeg stupnja. Prvi koji je ustvrdio da opća jednadžba[14] stupnja 5 nema rješenje u radikalima bio je 1799. talijanski matematičar **Paolo Ruffini** (1765.–1822.). To je pokušao dokazati koristeći permutacije i pritom *de facto* koristio svojstva **grupa permutacija** (zove ih *permutazione*). Među ostalim, eksplicitno je koristio zatvorenost *permutazi-*

[14]Naravno da za svaki stupanj postoje jednadžbe koje imaju rješenja u radikalima, primjerice $x^n = 1$.

*one* s obzirom na kompoziciju (kompozicija dvije permutacije jednog skupa je permutacija istog skupa). Začuđujuće, na taj njegov rad nije bilo reakcija. Stoga je 1801. kopiju knjige poslao Lagrangeu, no nije dobio odgovor. Ponovno ju je poslao s molbom da ga Lagrange upozori ako je što krivo ili beskorisno napravio, no ponovno nije bilo odgovora. Tako je 1803. objavio novi, kako se nadao razumljiviji dokaz. Taj je rad izazvao samo poneki komentar talijanskih matematičara. Zatim je zatražio recenziju pariškog Nacionalnog instituta te su recenzenti imenovani Lagrange, Legendre i Lacroix.[15] Oni su zaključili da u Ruffinijevom tekstu nema ništa bitnog. Stoga je Ruffini zatražio mišljenje i od *Royal Society*. Oni su pak zaključili da se ne slažu sa svime, ali da rezultat smatraju uglavnom dokazanim. Ruffini je zatim m 1808. i 1813. dao nove verzije dokaza, no jedini matematičar koji je priznao važnost rezultata i smatrao ga točnim (rupu u dokazu smatrao je minornom) bio je, začuđujuće, Cauchy 1821. Sâm Cauchy je u razdoblju 1813.–1815. napisao djelo o grupama permutacija u kojemu je proširio neke Ruffinijeve rezultate. Ipak, svi Ruffinijev pokušaji dokaza imaju rupu.

Prvi potpun dokaz nerješivosti opće jednadžbe 5. stupnja u radikalima dao je 1824. norveški matematičar **Niels Henrik Abel** (1802.–1829.). Abel je također poznat i po iznimnim rezultatima u području matematičke analize. Život mu je bio obilježen siromaštvom. Otac mu je bio teolog i filolog, norveški nacionalist i aktivan u borbi za norvešku nezavisnost od Danske. Majka mu je bila kćer trgovca i vlasnika brodova, Niels je bio drugo od 7 djece. Kad je Niels imao godinu dana, otac mu je nakon smrti svog oca naslijedio mjesto protestantskog svećenika. Do 13. godine Nielsa je podučavao otac, no živili su u siromaštvu u doba ekonomske krize. Problemi obitelji ipak nisu bili samo ekonomski i politički. Prema raznim izvorima, Nielsov otac je bio alkoholičar, a majka optužena za nemoral. 1815. godine Niels i njegov stariji brat poslani su u katedralnu školu u Christianii (danas Oslo). Neinspiriran osrednjom školom, Niels je bio prosječan učenik koji je pokazao nešto talenta za matematiku i fiziku. Kad je učitelj matematike otpušten jer je nasmrt pretukao dječaka, stvari su se promijenile nabolje dolaskom novog učitelja matematike Holmboea. Potican od Holmboea, u roku od godinu dana Abel je bio sposoban čitati djela sveučilišne razine. Sa 16 godina Abel je dokazao binomni teorem za sve realne eksponente (Euler ga je dokazao za racionalne eksponente). Nakon smrti oca (1820.) Abelova se obitelj našla u još težim financijskim uvjetima, no Holmboe je uspio izboriti stipendiju koja je Abelu omogućila završetak škole. U to doba Abel je počeo raditi na pitanju rješivosti opće jednadžbe 5. stupnja u radikalima. Prve rezultate o jednadžbi

[15]Sylvestre Lacroix (1765.–1843.), francuski matematičar poznat po udžbenicima iz geometrije i analize.

5. stupnja, iz 1821., u kojima je naizgled dokazao rješivost, Abel je predao na objavljivanje Kraljevskom društvu u Copenhagenu, no kad su ga zamolili za konkretan primjer, otkrio je grešku. Diplomirao je 1822. na sveučilištu u Christianii. Na tom je sveučilištu imao jaku podršku profesora astronomije C. Hansteena, čija se žena počela brinuti za Abela kao da joj je vlastito dijete. Pri jednom boravku u Kopenhagenu radi matematičkih kontakata, upoznao je Christine Kemp i s njom se ubrzo zaručio. Po povratku u Christianiu, pokušavao je izboriti financiranje puta u Europu kako bi upoznao velike matematičare Njemačke i Francuske. Nije znao ni njemački ni francuski pa je financiranje odgođeno za dvije godine, dok ne nauči te jezike. Abel se vratio radu na jednadžbama 5. stupnja i 1824. dokazao da se ne mogu riješiti u radikalima. Taj je rad objavio na vlastiti račun i na francuskom jeziku, kako bi imao impresivni rezultat za prezentiranje na svom putovanju. 1825. godine Abel dobiva novce za studijski posjet Francuskoj i Njemačkoj. Posjetio je Berlin, gdje se sprijateljio s Augustom Crelleom, matematičarem amaterom koji je osnovao jedan od najznamenitijih matematičkih časopisa u povijesti: *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, poznat kao *Crelle's Journal*. U tom je časopisu Abel među inim objavio jasniju verziju svog dokaza o nerješivosti jednadžbe 5. stupnja u radikalima (1827.). Za vrijeme boravka u Berlinu, saznao je da je mjesto profesora matematike na sveučilištu u Christianii (jedinom u Norveškoj) dobio Holmboe, koji bi mjesto bio odbio radi Abela, da mu nisu zaprijetili da ako on odbije, mjesto dobiva stranac. S druge strane, u Berlinu nije bilo mogućnosti za stalno mjesto u idućе četiri godine te se Abel našao u ozbiljnim egzistencijalnim problemima. Ostao je u Berlinu i dalje se bavio tad još nedovoljno rigorozno postavljenim osnovama matematičke analize. Nakon što je čuo da Gauß nije bio zadovoljan dobivanjem njegova rada o jednadžbama petog stupnja, Abel odustaje od ideje puta u Göttingen. Nije poznato zašto je Gauß imao takav stav prema Abelovom radu, jer je sigurno da ga nije pročitao — pismo je nađeno neotvoreno nakon Gaußove smrti. Mogući su razlozi da je sâm to dokazao ili pak da je takav dokaz smatrao nebitnim, što je vjerojatnije. Nakon Berlina, Abel je posjetio Pariz, gdje je nezainteresirano primljen. Prema njegovim riječima *„Francuzi su mnogo rezerviraniji prema strancima nego Nijemci"*. U Parizu je napisao važno djelo o eliptičkim integralima, koje su trebali recenzirati Cauchy i Legendre. Legendre je tvrdio da je prestar i da ne vidi čitati rukopis, te je posao prepustio Cauchyju. Abel je ostao u Parizu, zlovoljan, zabrinut — i gladan: mogao si je priuštiti samo jedan obrok dnevno. Zdravlje mu slabi i u lošem stanju vraća se u Berlin 1826. Tu posuđuje novce i nastavlja raditi na eliptičkim funkcijama. Abelovi rezultati o eliptičkim funkcijama postat će temelj svih budućih istraživanja u tom području. Crelle je Abela nagovarao da ostane u Berlinu dok mu ne nađe posao, no Abel se odlučio vratiti

kući. U svibnju 1827. stiže u Christianiu i dobiva mali kredit od sveučilišta, koji mu se odbija od svih budućih plaća. Da bi zaradio malo novca, Abel podučava djecu, a zaručnica se zapošljava kao guvernanta u Frolandu. Situacija se malo popravlja kad Abel dobiva Hansteenovo mjesto na sveučilištu i vojnoj akademiji, nakon što je Hansteen dobio velike novce za istraživanje Zemljinog magnetskog polja u Sibiru. 1828. godine Abel saznaje za Jacobijeve rezultate o transformacijama eliptičkih integrala i pokazuje da se ti rezultati mogu dobiti kao posljedica njegovih. Ubrzo objavljuje i nekoliko novih rezultata na tu temu, te on i Jacobi postaju znameniti: Legendre ih naziva najvećim analitičarima toga doba. U to se doba Abel počinje baviti i pitanjem koje će nekoliko godina kasnije riješiti Galois: Koje su algebarske jednadžbe rješive u radikalima? Zdravlje mu je ipak bilo previše narušeno siromašnim životom. Saznaje da je njegovo pariško djelo o eliptičkim funkcijama zagubljeno (zanimljivo je da je Cauchy zagubio i Galoisove radove) i ponovno piše glavne rezultate: rad od dvije stranice nazvan *Jedan teorem*. Za Božić putuje zaručnici u Froland te se ozbiljno razboljeva nakon jedne vožnje sanjkama. Za to saznaje Crelle, koji opet pojačava trud da mu nađe mjesto. Crelle uspijeva, nalazi mjesto profesora u Berlinu, no pismo s dobrom vijesti stiže dva dana nakon Abelove smrti od tuberkuloze koju je „zaradio" tijekom svog boravka u Parizu. Nakon njegove smrti, Cauchy traži zagubljeni članak i nalazi ga 1830. Štampan je 1841., no ponovno nestaje — i ponovno je pronađen tek 1952. u Firenzi. Godine 1830. pariška Akademija znanosti dodjeljuje *Grand Prix* Abelu iJacobiju za izvanredna dostignuća. Na natječaj za tu nagradu svoj rad je poslao i Galois, no taj je rad izgubljen i nije ušao u izbor.

Spomenuti **Évariste Galois** (1811.–1832.) je svojim radom na (ne)rješivosti algebarskih jednadžbi u radikalima utemeljio **teoriju grupa**. Rođen je u doba vrhunca Napoleonove vladavine, a roditelji su mu bili republikanski nastrojeni. Do dvanaeste godine podučavala ga je majka, a zatim je pohađao internat. U doba Galoisova školovanja Francuska je ponovno bila kraljevina. Prve dvije godine Galois je bio dobar đak, a onda je 1826. pao razred jer mu rad u retorici nije bio zadovoljavajući. 1827. mu je dozvoljeno da upiše tečaj matematike, koja ga je ubrzo tako očarala da ostaloj nastavi više nije posvećivao pažnju. Učitelji su ga smatrali čudnim, bizarnim, originalnim i zatvorenim. Zanimljivo je da su ga kritizirali zbog originalnosti, a Galois je postao jedan od najoriginalnijih matematičara u povijesti. 1828. se pokušao upisati na *École Polytéechnique*, ali zbog nedovoljne pripremljenosti nije uspio. Vrativši se u svoj internat sve se više bavi pitanjem rješivosti algebarskih jednadžbi u radikalima. Početkom 1829. objavio je prvi znanstveni rad, a zatim je na recenziju predao još dva na temu rješivosti algebarskih jednadžbi. Kao recenzent imenovan je Cauchy, koji je te radove zagubio, i nikad više nisu pronađeni. Doba nakon ponovne uspostave kraljevine u Francuskoj obilježeno je jakim političkim kretanjima i sukobima republikanaca i rojalista. 2. srpnja 1829. se ubio Galoisov otac, a razlog je bio kleveta upućena na račun obitelji od strane političkih protivnika. U potresenom stanju Galois je nekoliko tjedana kasnije opet pokušao položiti prijemni ispit za *École Polytéchnique* i ponovno nije uspio. Za taj je pokušaj vezana poznata anegdota: navodno je Galois iznerviran nedovoljno preciznim pitanjima ispitivača, kad je shvatio da usprkos svoje genijalnosti neće položiti ispit, bacio spužvu u lice dotičnog ispitivača. Nakon tog ponovnog neuspjeha, Galois je odabrao *École Normale*. Tokom 1830. predao članak za nagradu Akademije znanosti. Taj je članak predan na recenziju Fourieru, koji je ubrzo zatim umro. I ovom članku nakon toga je izgubljen svaki trag. Početkom 1830. Galois je objavio tri članka iz teorije eliptičkih krivulja, a u ljetu saznaje da njegov rad nije bio niti razmatran za nagradu te da je nagrada dodijeljena Jacobiju i Abelu. Tako je Galois postao uvjeren da je problem sustav koji onemogućava genijalne pojedince. U srpnju 1830. u Francuskoj dolazi do revolucije, kralj mora bježati iz zemlje, a u Parizu dolazi do uličnih pobuna. Direktor *École Normale* zabranio je studentima izlazak na ulice i zaključao ih u školi. Na to je Galois reagirao pismom u studentskom listu. Iako ga je potpisao, urednik je da ga zaštiti pismo objavio anonimno. Direktor škole je usprkos tome saznao tko je autor i optuživši ga za anonimni napad izbacio Galoisa sa škole. Galois se tada pridružio Nacionalnoj gardi, republikanskoj grani milicije. Kad je pobuna smirena, novi je kralj Lous-Philippe 31. prosinca 1830. ukinuo Nacionalnu gardu. Početkom 1831. Galois je za život zarađivao privatnom podukom. Potaknut od Poissona, predao je treću verziju svog rada o algebarskim jednadžbama Akademiji 17. siječnja 1831. Krajem 1830. godine nekoliko pripadnika Nacionalne garde bilo je zatvoreno pod optužbom da su htjeli svrgnuti vlast, a pušteni su na slobodu 9. svibnja 1831. Proslavi oslobađanja prisustvovao je i Galois te je te večeri podigao čašu i držeći bodež u ruci izrekao zdravicu kralju koja je protumačena kao prijetnja. Na suđenju 15. lipnja se Galois branio izjavom da je tekst bio „Louis-Philippeu, ako izda", ali da su riječi nestale u galami. Galois je pušten na slobodu i oslobođen optužbe. No, boravak na slobodi nije dugo trajao: na dan Bastille 14. srpnja uhapšen je zbog nošenja zabranjene uniforme Nacionalne garde, puške, nekoliko pištolja i bodeža. Ovaj put je osuđen i zatvoren u zatvor Saint-Pelagie. Tokom boravka u zatvoru saznao je da je njegov posljednji članak odbijen, s argumentom da je stil izlaganja nejasan i nedovoljno razrađen. Ipak, Poissonovo izvješće poticalo je Galoisa da izda potpuniji prikaz svojih rezultata. Tokom boravka u zatvoru Galois radi matematiku, ali i pokušava samoubojstvo koje su spriječili drugi zatvorenici. Kad je u ožujku 1832. izbila epidemija kolere u Parizu, zatvorenici i među njima Galois prebačeni su u pansion Sieur Faultrier, koji je bio zatvor otvorenog tipa. Tu se zaljubio u Stephanie, kćer liječnika. Ta njegova jedina ljubavna priča kratko je trajala: kad je pušten iz zatvora 29. travnja Stephanie se distancirala. Ubrzo zatim izazvan je na dvoboj. Povod dvoboja je bio vezan za Stephanie, ali nije jasno je li se radilo samo o ljubavnim razlozima (izazvali su ga njezin stric i navodni zaručnik) ili se, kako većina povjesničara smatra, zapravo radilo o političkim motivima. Postoje i mišljenja da se namjerno dao navesti u dvoboj, tj. da se u biti radilo o insceniranom samoubojstvu. Bilo kako bilo, Galois je noć prije dvoboja, siguran da ga neće preživjeti, proveo pišući dva pisma. Prvo je pismo upućeno kolegama republikancima i u njemu govori kako je u sukob upleten protiv svoje volje. Drugo pismo upućeno je prijatelju i poznato kao Galoisov „matematički testament" u kojemu se mogu naći temelji teorije grupa. Galois tu kaže: *...ako u takvoj grupi imamo supstitucije $S$ i $T$, onda je u njoj i supstitucija $ST$.* Ipak, nigdje nije eksplicitno definirao grupe. Ostavljajući zbog nedostatka vremena mnoga mjesta nedokazana, Galois je tu noć zapisao pregled svih svojih rezultata. U dvoboju u jutro 30. svibnja ranjen je u trbuh, a protivnik i sekundant ga napuštaju. Teško ranjenog nalazi ga jedan seljak te Galois umire u bolnici 31. svibnja. Pogreb je trebao biti održan 2. lipnja, ali je večer prije policija razbila sastanak koji su smatrali uvodom u demonstracije koje su trebale biti održane na pogrebu. Tridesetero prisutnih je uhapšeno, a pogreb je održan dan kasnije na javnom groblju. Danas ne postoji trag mjestu gdje je Galois pokopan. Galoisove su papire skupili brat i prijatelj i poslali ih, kako je bila Galoisova želja, Gaußu i drugim matematičarima. Ti su spisi došli do Josepha Liouvillea (koji je najpoznatiji je po dokazu egzistencije transcendentnih brojeva) 1843., koji ih je izdao 1846. Galois se bavio pitanjem: Kako za zadanu algebarsku jednadžbu utvrditi ima li rješenja u radikalima? Shvatio je da je odgovor na to pitanje vezan za strukturu grupe koja se danas naziva Galoisovom grupom $G$ jednadžbe (odnosno polinoma). To je podgrupa grupe permutacija svih njezinih korijena (tj. simetrične grupe $S_n$: ako je jednadžba stupnja $n$, po osnovnom teoremu algebre ona ima $n$ rješenja u skupu kompleksnih brojeva). Pojednostavljeno rečeno, u Galoisovoj grupi $G$ se nalaze one permutacije korijena, koje ne mijenjaju nijednu racionalnu funkciju koeficijenata (uočimo utjecaj Lagrangea i Ruffinija!).

Dvije godine prije nego su Liouvilleovim izdanjem postali poznati Galoisovi rezultati, dakle 1844., Cauchy je objavio djelo o grupama permutacija i tim djelom teorija permutacija postaje samostalna teorija. Definirao je red permutacije, uveo cikličku notaciju, itd. Umjesto naziva grupa koristio je naziv *systeme des substitutions conjugués* (sustav konjugiranih supstitucija).

Vidjeli smo da je Cauchy konačno razriješio pitanje korektne definicije derivacije. No, njegovim je definicijama još je uvijek falilo preciznosti (primjerice, u definiciji neprekidnosti nije jasno misli li se obična ili uniformna neprekidnost). Matematičku analizu je konačno potpuno modernizirao njemački matematičar **Karl Weierstraß** (1815.–1897.). Već u gimnaziji istakao se matematičkim znanjem, no po želji oca upisao je studij prava, financija i ekonomije u Bonnu. Rastragan između studija i ljubavi prema matematici, nije pohađao nikakva predavanja, nego proveo 4 godine pijući i mačujući se i na vlastitu ruku proučavajući matematičke tekstove. Zatim je odlučio postati matematičar, a jedan obiteljski prijatelj je uvjerio oca da mu dopusti studirati matematiku u Münsteru. 1841. postao je gimnazijski učitelj, što je uz predavanje matematike uključivalo i fiziku, botaniku, geografiju, povijest, njemački, kaligrafiju i gimnastiku. Od 1850. patio je od vrtoglavica (velik dio kasnijeg života morao je predavati sjedeći), ali i od nezadovoljstva neispunjavajućim poslom. Jednim člankom iz 1854. postaje poznat i stječe počasni doktorat sveučilišta u Königsbergu. S vremenom je dobio i mjesto u Berlinu, a njegova su predavanja privlačila studente iz cijelog svijeta. Privatno je 1870.–1874. podučavao rusku matematičarku Sofiju Vasiljevnu Kovalevskaju i s njom je do njene rane smrti 1891. ostao u kontaktu, ali je zatim spalio svu njihovu koresponednciju. Kao i ona, umro je od upale pluća. Weierstraß je dao suvremenu definiciju limesa: „Funkcija $f(x)$ ima limes $L$ u $x = x_0$, ako za svaki pozitivni $\epsilon$ postoji $\delta$ tako da je $|f(x) - L| < \epsilon$ za sve $x$ za koje je $0 < |x - x_0| < \delta$." Weierstraß koristi oznaku lim, ali je pisao npr. $\lim_{n=\infty} a_n = \infty$.[16] Za analizu, ali i topologiju važno je i da je 1877. Weierstraß rigorozno dokazao teorem kojeg je 1817. ne toliko rigornozno dokazao Bolzano, **Bolzano-Weierstraßov teorem**: Svaki ograničen beskonačan $S \subseteq \mathbb{R}$ posjeduje gomilište.[17] Spomenimo i da je Weierstraß 1872. otkrio primjer neprekidne funkcije[18] koja nigdje nije derivabilna.

Također, nakon dokaza osnovnog teorema algebre ostalo je otvoreno pitanje: Može li se polje[19] kompleksnih brojeva proširiti? Primjerice, Gauß je vjerovao u postojanje hijerarhije u kojoj su obični konpleksni brojevi „sjena sjenâ". No, 1863. je Karl Weierstraß dokazao: Do na izomorfizam je polje kompleksnih brojeva jedinino polje koje proširuje polje realnih brojeva.

Sad dakle imamo dobre definicije limesa i derivacije i neprekidnosti. No, što je s integralima? Za suvremenu definiciju integrala, i ne samo za to,

[16]Oznaku $\lim\limits_{x \to x_0}$ je čini se prvi put upotrijebio 1905. engleski matematičar Leathem, a popularizirao ju je 1908. Godfrey Harold Hardy (1877.–1947.).

[17]Gomilište je $p \in S$ takav da postoji niz $(p_n)_n$ u $S$ kojemu je $p$ limes.

[18]Weierstraß ju je definirao ovako: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$ za $0 < a < 1$, $b$ neparan prirodan broj i $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$.

[19]Polje je algebarska struktura koja se sastoji od nepraznog skupa $F$ s dvije binarne operacije $+$ i $\cdot$ tako da je $F$ s obzirom na $+$ komutativna grupa (s neutralnim elementom 0), kao i $F$ bez 0 s obzirom na $\cdot$.

zaslužan je također njemački matematičar **Bernard Riemann** (1826.–1866.). Riemann je već u školi pokazao interes za matematiku. Otac mu je bio luteranski svećenik pa je po njegovoj želji počeo studirati teologiju u Göttingenu, no kasnije je prešao na matematiku. Predavao mu je, među ostalima, Gauß. Kasnije se prebacio u Berlin, gdje su mu profesori bili Steiner, Jacobi i Dirichlet. Mentor doktorata bio mu je Gauß, ali su veći utjecaj na njega imali fizičar Weber i matematičar Listing te je tako stekao solidne osnove fizike i topologije. Njegovo habilitacijsko predavanje 1854. *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* potpuno je preobrazilo geometriju. Uz geometriju i topologiju ostavio je velike rezultate u realnoj i kompleksnoj analizi te teoriji brojeva. Karijeru je proveo u Göttingenu, a umro je mlad od tuberkuloze. Riemannu je cilj bio odrediti nužne uvjete za mogućnost razvoja funkcije u Fourierov red i tako je otkrio potrebu preciziranja pojma **integrala**. On $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ opisuje kao limes zbroja

$$\delta_1 f(a+\varepsilon_1\delta_1)+\delta_2 f(x_1+\varepsilon_2\delta_2)+\ldots+\delta_n f(x_{n-1}+\varepsilon_n\delta_n),$$

ako svi $\delta_i = x_i - x_{i-1}$ teže u nulu i ako je taj limes neovisan o izboru $x_i$ $(a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < b = x_n)$ i $\varepsilon_i > 0$.

U povijesti matematike posebno je poznato Riemannovo habilitacijsko predavanje *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (O hipotezama, koje su u temeljima geometrije) koje je održao 10. 6. 1854. Predavanje se sastojalo od dva dijela. U prvom se bavio problemom definicije $n$-dimenzionalnog prostora i opisao pojam kojeg danas nazivamo **Riemannov prostor** (ili Riemannova mnogostrukost). U njegovoj ideji, radi se o plohi koja je lokalno aproksimativno euklidska ravnina, ali biće koje živi u njoj bi moglo uočiti zakrivljenost plohe kroz odstupanja od Pitagorinog poučka. U drugom dijelu predavanja, Riemann je postavio temeljna pitanja o vezi geometrije sa stvarnim svijetom. Taj je dio bio previše ispred svog vremena, te ga je čini se razumio samo prisutni Gauß, koji se oduševio s time. Einsteinovim otkrićem opće teorije relativnosti Riemannove ideje su potvrđene i postale temeljem moderne fizike.

Znamenita je i **Riemannova hipoteza**. Riemann je naime uočio da Eulerov produkt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p\ \mathsf{prim}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

vrijedi za sve kompleksne brojeve $s$ s realnim dijelom većim od 1, te da je tako definirana holomorfna funkcija koja se može proširiti do holomorfne funkcije $\zeta$ na $\mathbf{C}\setminus\{1\}$. Uočio je da ta funkcija ima beskonačno mnogo trivijalnih nultočki (to su negativni parni brojevi) te da su to jedine nultočke s negativnim realnim dijelom. Također, dokazao je da ne postoje ni nultočke

$\zeta$-funkcije s realnim dijelom većim od 1. Promatrajući vezu između funkcija $\zeta$ i $\Gamma$ Riemann je postavio do danas nedokazanu hipotezu: Sve netrivijalne nultočke od $\zeta$ imaju realni dio jednak 1/2.

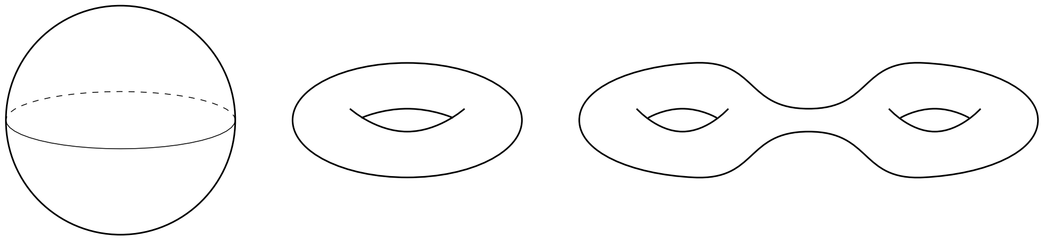
Povijest matematičke analize završavamo modernom definicijom **funkcije**. Vidjeli smo da su tijekom 19. st. otkrivene su mnoge neobične funkcije (Cauchyjeva, Dirichletova, Weierstraßova, ...), što je ukazivalo na potrebu poboljšanja definicije funkcije, jer takve funkcije nisu zadovoljavale starije definicije. Zbrku unutar koncepta funkcije prvi je razjasnio njemački matematičar **Hermann Hankel** (1839.–1873.), koji je 1870. dao sljedeću definiciju: „Funkcija se zove $y$ od $x$ ako svakom iznosu promjenjive veličine $x$ unutar nekog intervala odgovara određeni iznos $y$, neovisno o tome ovisi li $y$ o $x$ na cijelom intervalu po istom pravilu o $x$ ili ne, neovisno o tome može li se ta ovisnost opisati matematičkim operacijama ili ne." Usprkost toga, Poincaré 1899. je rekao: „Prije, kad se našla nova funkcija, to je bilo s praktičnim ciljem. Danas se izmišljaju da se pokaže da je argumentacija naših predaka bila kriva". Modernu „školsku" definiciju funkcije naposlijetku je 1923. dao francuski matematičar **Édouard Goursat** (1858.–1936.): „Za $y$ kažemo da je funkcija od $x$, ako svakom iznosu $x$ odgovara jedan iznos $y$. Takva se veza iskazuje formulom $y = f(x)$."

Na osnovi Riemannovih rezultata je 1860ih godina **Marie Ennemond Camille Jordan** (1838.–1922.) uveo mnoge nove topološke koncepte i invarijante, npr. homotopiju puteva. Posebno je poznat intuitivno jasan, ali vrlo teško dokaziv **Jordanov teorem** (1893.): Svaka jednostavno zatvorena krivulja[20] u ravnini dijeli ravninu na dva disjunktna područja, jedan omeđen (unutrašnjost), drugi neomeđen (vanjština).

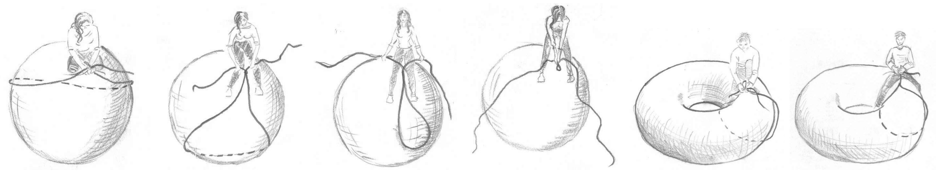
U Riemannovo i Jordanovo doba više matematičara se bavilo pokušajem klasifikacije ploha. Riemann i Jordan su smatrali da Eulerova karakteristika topološki potpuno određuje zatvorenu plohu, a Möbius je 1863. otkrio osnovne tipove zatvorenih ploha: 2-sfera, torus, ... (slika 11.8). Tek 1907. je dokazano da Möbisuova klasifikacija pokriva sve zatvorene orijentabilne plohe.

Priču o nastanku topologije završit ćemo spomenom znamenitog francuskog matematičara **Jules Henri Poincaréa** (1854.–1912.). On je 1895. pod naslovom *Analysis situs* objavio prvi sustavni prikaz topologije. Utemeljio je i algebarsku topologiju. U njezinim terminima pokazao je da ako se svaka zatvorena petlja na zatvorenoj plohi (2-dimenzionalnoj mnogostrukosti) može stegnuti u točku, onda je ta ploha topološki ekvivalentna 2-sferi (slika 11.9). **Poincaréova hipoteza** je da analogno vrijedi za 3-sfere, a poslije je poopćena na $n$-sfere. Prvo je 1960ih dokazana za $n > 4$, onda 1982 za $n = 4$ i konačno je izvorna hipoteza postala jedan od

[20]Krivulja je jednostavno zatvorena ako nigdje ne siječe sama sebe.



Slika 11.8: Osnovni tipovi zatvorenih ploha



Slika 11.9: Ideja Poincaréove hipoteze

$\boxed{\text{7 milenijskih problema}}$. Dokazao ju je 2002 ruski matematičar Grigorij Perelman (dokaz je priznat 2006.).

Usprkos nesavršenostima, kao što smo rekli, Beltramijev model neeuklidske geometrije iz 1868. je dao bitan odgovor: Postoji geometrija u kojoj vrijede prva četiri Euklidova postulata, ali ne vrijedi peti. Njemački matematičar **Felix Klein** (1849.–1925.) je 1871. pokazao da u biti postoje tri osnovna tipa dvodimenzionalne geometrije: tipa Bolyai-Lobačevski, u kojoj pravci imaju po dvije beskonačno daleke točke, Riemannova sferna, u kojoj pravci nemaju beskonačno dalekih točaka (odnosno, imaju dvije imaginarne beskonačno daleke točke), te euklidska, u kojoj svaki pravac ima dvije podudarne (tj. jednu) beskonačno daleke točke. Ta tri tipa geometrije Klein redom naziva hiperboličkom, eliptičkom i paraboličkom. Posljedica Beltramijevog modela i Kleinovih rezultata je da je **neeuklidska geometrija** konzistentna ako i samo ako je euklidska konzistenta, čime su izjednačene u statusu. Godinu kasnije Klein je počeo proučavati svojstva prosotra koja su invarijantna s obzirom na dane grupe transformacija, tj. primijenio je teoriju grupa na geometriju. Ta njegova ideja poznata je kao Erlangenski program (1872.) i omogućila je jedinstven pristup svim trima tipovima geometrije.

Kad smo već kod grupa: Prvu apstraktnu definiciju **grupe** dao je 1854. Arthur Cayley. On je uz to uveo i „tablicu množenja" grupe (Cayleyevu tablicu) i dao razne primjere uključivo grupa matrica i kvaterniona, no njegov tekst je imao slab utjecaj. No, Jordan je od 1860ih preferirao izraz grupa i

„popularizira" teoriju grupa permutacija. Nakon toga je Cayley objavio još radova o grupama, među ostalim je dokazao da se stvarno sve grupe mogu povezati s grupama permutacija: **Cayleyev teorem** je rezultat da je svaka grupa izomorfna nekoj simetričnoj grupi.

Engleski matematičar **Arthur Cayley** (1821.–1895.) ostavio je velik trag kako u algebri, tako i u teoriji grafova. Već tokom školovanja se istaknuo u matematici. Studirao je i diplomirao matematiku u Cambridgeu i nakon studija se tamo i zaposlio. No, nakon isteka stipendije morao je naći drugu profesiju te je odabrao pravo. Od 1849. do 1863. radio je kao odvjetnik. Iako je bio uspješan pravnik, uvijek je pravo smatrao samo sredstvom za zaradu novaca kako bi se mogao baviti matematikom. U tih 14 godina rada kao pravnik objavio je oko 250 matematičkih radova, a ukupno je tokom životu objavio 967 radova iz raznih područja matematike. Matematičke ideje je razmjenjivao s Hamiltonom i Sylvesterom. Osobito je mnogo komunicirao sa Sylvesterom jer je i on bio pravnik te su često skupa radili pri sudu i tokom radnog dana raspravljali o matematici. 1863. godine Cayley je dobio mjesto profesora matematike u Cambridgeu, što je za njega doduše značilo bitno smanjenje prihoda, ali je Cayley prihvatio mjesto sretan da ima mogućnost potpuno se posvetiti matematici. Ubrzo zatim se oženio i imao je vrlo sretan brak. Pokazao je velik interes za pokret za sveučilišno obrazovanje žena. 1881. godine pozvan je održati niz predavanja na *John Hopkins University* u Baltimoreu (SAD), gdje je Sylvester u međuvremenu postao profesor matematike. Tamo je proveo prvih pet mjeseci 1882. godine. Po povratku je (1883) postao predsjednik *British Association for the Advancement of Science*. Njegov govor tom prigodom bio je popularni prikaz matematike za znanstveni krug, a ujedno vrijedan povijesni pregled različitih matematičkih teorija.

Cayley je zaslužan za prvu apstraktnu definiciju **matrica**. Naime, iako su determinante korištene od kraja 17. stoljeća, o početku matričnog računa može se govoriti tek početkom 19. st. Konkretno, Gauß je u *Disquisitones Arithmeticae* (1801.) opisao kvadratne forme $\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j$ i slagao njihove koeficijente u kvadratne tablice te koristio operacije koje bismo zvali množenjem matrica i računjanje inverza kako bi dobio zaključke o kvadratnim formama. Cauchy je 1826. takve tablice nazivao *tableau* i računao im svojstvene vrijednosti te u kontekstu kvadratnih formi dokazao da se svaka realna simetrična matrica može dijagonalizirati. No, apstraktni matrični račun utemeljio je Cayley, a njime je utemeljio i modernu aprstraknu algebru. On je 1858. dao apstraktnu definiciju matrica i operacija s matricama te $2 \times 2$- $3 \times 3$-slučaj **Cayley-Hamiltonovog teorema** (svaka matrica poništava svoj karakteristični polinom). Njegov prijatelj, irski matematičar Sir William Rowan Hamilton, je dokazao $4 \times 4$-slučaj, dok je opći slučaj nešto kasnije dokazao njemački matematičar Ferdinand Georg Frobenius (1849.–1917.). Drugi Cayleyev prijatelj, engleski matematičar James Joseph Sylvester (1814.–1897.) je pak dokazao razne rezultate o matricama i uveo naziv matrica.

Ova trojica velikih matematičara poznati su i po tome što su **teoriju grafova** učinili zasebnom disciplinom. Nešto ranije, njemački fizičar **Gustav Kirchhoff** (1824.–1887.) je proučavao strujne krugova i razvio teoriju razapinjućih stabala u svrhu određivanja jakosti struje u pojedinim granama. Pokazao je da nije potrebno razmatrati sve moguće cikluse u strujnom krugu (grafu), nego da je dovoljno promatrati jedno razapinjuće stablo. Cayley se pak bavio kemijskim kombinatornim problemima i prebrajao stabla koja se pojavljuju pri prebrajanju strukturnih izomera. Posebno, prebrojio je (1875.) alkane $C_nH_{2n+2}$ za razne $n$ i uočio da se to svodi na prebrajanje stabala s $n$ vrhova stupnja 4 i $2n+2$ vrhom stupnja 1. Sylevester je pak u jednom članku objavljenom u časopisu *Nature* (1878.) uveo naziv „graf”, a Hamilton je pak 1859. opisao igru *Icosian game* (*Put oko svijeta*), točnije zadatak: Mogu li se bridovi dodekaedra obići tako da se svaki vrh posjeti točno jednom?

Somenimo ovdje i **teorem o četiri boje**. Južnoafrički matematičar i botaničar Francis Guthrie (1831.–1899.), koji je matematiku studirao u Londonu, primijetio je da se razne zemljopisne karte mogu obojiti s 4 boje tako da susjedne zemlje imaju različite boje. Tako je 1852. postavio pitanje: Koji je najmanji broj boja potreban za bojanje svih zemljopisnih karti (vrhova planarnog grafa)? Pritom se pretpostavlja da su zemlje jednostavno povezane (nemaju rupa i u jednom „komadu”). Pitanje je proslijedio svom profesoru Augustusu De Morganu, a 1878. Cayley spominje problem, koji uskoro zatim postaje popularan. Cayleyev student Alfred Kempe je 1879. objavio navodni dokaz, no 11 godina kasnije otkrivena je greška. Otkrio ju je Percy Heawood i pojednostavljenjem Kempeovih argumenata dokazao teorem o 5 boja. Tijekom 20. st. dani su razni dokazi za „do $n$” zemalja, a 1976. su Kenneth Appel i Wolfgang Haken dali prvi dokaz. Bio je to prvi matematički dokaz korišenjem računala, što je otvorilo važno pitanje rigoroznosti matematičkih dokaza.

Recimo ovdje i par riječi o znamenitom engleskom matematičaru i logičaru **Augustusu De Morgan** (1806.–1871.). On je pri dao naziv **matematičkoj indukciji** te ju detaljno opisao 1838., no sama metoda bila je poznata već ranije (Pascal i prethodnici). De Morgan je rođen u Indiji jer mu je otac tamo bio oficir. Od djetinjstva je bio slijep na desno oko. Od 1828. bio je profesor na *University College* u London, a kasnije suosnivač i prvi predsjednik *British Mathematical Society.* Posebno je poznato njegovo djelo *Formal logic; or, the calculus of inference* (1847.) u kom je pokušao razviti simboličku logiku unutar klasične silogističke logike. On nije razvio algebru logike, nego

„samo” simboličku reprezentaciju logike. De Morganove zakone također je formulirao, ali su bili poznati još William of Ockhamu u srednjem vijeku. Utemeljitelj logičke algebre je De Morganov suvremenik i sunarodnjak **George Boole** (1815.–1864.). Boole je do na osnovnu školu bio je autodidakt, ali je svejedno s 19 godina uspio otvoriti školu u Lincolnu, a kasnije 1849. postati profesor matematike na *Queens College* u Corku (Irska). Supruga mu je bila nećakinja Sir George Everesta po kom je nazvan Mt. Everest. Imali su 5 kćeri, od kojih je jedna (također bez formalnog matematičkog obrazovanja) klasificirala pravilne poliedre u četverodimenzionalnom prostoru. Ne temeljima engleske logičke tradicije i tadašnjih rasprava svojim *The Mathematical Analysis of Logic* (1847.) i *An Investigation in the Laws of Thought* (1854.) stvorio je logičku algebru. Cilj mu je bio algebarske oznake odvojiti od njihove numeričke interpretacije pa je ovo i velik doprinos apstraktizaciji algebre. Kod njega $xy$ znači rezultat odabira $x$ iz neke klase $a$, pa $y$ iz $x$, univerzum je označavao s 1, klasu bez objekata s 0, $x+y$ je rezultat odabira iz dviju disjunktnih klasa, a $1-x$ je komplement od $x$. Dao je i osnovna pravila takve algebre, npr. $xx = x$. Njih koristi u daljnjim dokazima, npr. dokaz isključenja kontadikcije se izvodi iz $xx = x$: $xx = x$ povlači $x - xx = 0$ što povlači $x(1-x) = 0$.

Maločas spomenuti Hamilton posebno je poznat po otkriću kvaterniona. On je 1833. na temelju kompleksne ravnine interpretirao skup kompleksnih brojeva kao dvodimenzionalni realni prostor i pokušao ga poopćiti na trodimenzionalni. No, uočio je da je nemoguće sačuvati sva svojstva te je kao rezultat 1843. dobio četverodimenzionalni realni vektorski prostor **kvaterniona**. Ideju istog dobio je šetajući uz dublinski *Royal Canal*, te je svoju ideju

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

urezao u kamen mosta. Ipak, množenje kvaterniona nije komutativno, dakle oni ne čine bolje No, množenje kvaterniona nije komutativno, dakle oni ne čine polje (što naravno znamo da je i nemoguće po Weierstraßovom rezultatu iz 1863.). Hamilton je odrastao kao čudo od djeteta, već do 13. rođendana znao je 12 jezika, s 15 je čitao Laplacea i Newtona, a sa 17 je našao grešku u *Mécanique céleste*. Djelovao je na *Trinity College* u Dublinu, a poznat je i po rezultatima u mehaničkoj fizici (Hamiltonova mehanika). Privatni život mu nije bio sretan, što je u drugoj polovini života dovelo do problema s alkoholom (umro je od napada gihta). U sklopu svog rada na kvaternionima, Hamilton je prvi koji koristi naziv **vektor** (1853.).

No, trebalo je proći još malo do moderne definicije **vektorskih prostora**. Njemački matematičar **Hermann Günter Grassmann** (1809.–1877.) je prvo 1844. objavio teško razumljivo, ali originalno djelo *Die lineale Ausdeh-*

*nungslehre*, čiju popravljenu verziju je objavio 1862. Tu nalazimo apstraktne algebarske operacije i svojstva konačnodimenzionalnih apstraktnih vektorskih prostora (točnije, algebri). Modernu formu je algebri vektora dao američki fizičar, kemičar i matematičar **Josiah Willard Gibbs** (1839.–1903.), a prvu aksiomatsku definicija vektorskih prostora dao je talijanski matematičar **Giuseppe Peano** (1858.–1932.). On je u *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva* (1888.) opisao „linearne sustave” kao skupove koji zadovoljavaju sljedeće aksiome:

1. Definirana je ekivalencija $=$ za po dva objekta u sustavu: $(a = b)$ akko $(b = a)$; ako $(a = b)$ i $(b = c)$, onda $(a = c)$.

2. Zbroj dva objekta sustava $a$ i $b$ je definiran, tj. definiran je objekt $a+b$ iz istog sistema i pritom: Ako $(a = b)$, onda $(a+c = b+c)$; $a+b = b+a$; $a+(b+c) = (a+b)+c$, i zajednička vrijednost ta dva zbroja označava se s $a+b+c$.

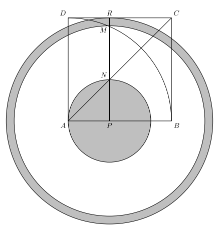
3. Ako je $a$ objekt u sustavu i $m$ prirodan broj, onda s $ma$ označavamo zbroj $m$ objekata jednakih $a$. Lako se vidi da za objekte $a$, $b$, ... iz sustava i prirodne brojeve $m$, $n$, ... vrijedi: Ako $(a = b)$, onda $(ma = mb)$; $m(a+b) = ma+mb$; $(m+n)a = ma+na$; $m(na) = mna$; $1a = a$. Pretpostavljamo i da za svaki realan broj $m$ oznaka $ma$ ima smisla i da i za nju vrijede iste formule. Objekt $ma$ se zove produktom broja $m$ i objekta $a$.

4. postoji objekt 0 u sustavu koji ima svojstvo $0a = 0$ za sve elemente sustava; ako $a-b$ znači isto što i $a+(-1)b$, onda je $a-a = 0$; $a+0 = a$.

Dalje Peano definira zavisne i nezavisne objekte te dimenziju: dimenzija linearnog sustava je maksimalni broj linearno nezavisnih objekata u tom sustavu. Dokazao je da konačnodimenzionalni linearni sustavi imaju bazu i dao primjere beskonačnodimenzionalnih linearnih sustava tj. vektorskih prostora. Ipak, Peanovo djelo je imalo slab utjecaj jer je za 1888. ovakav pristup još bio preapstraktan. Tek početkom 20. st., s nastanak funkcionalne analize (Hahn, Wiener, Banach: normirani prostori) dovodi do potpune moderne apstraktne teorije vektorskih prostora.

Na kraju ovog pregleda najvažnijih momenata u povijesti matematike posvetit ćemo se utemeljenju teorije skupova i trendu aksiomatizacije na prijelazu 19. u 20. stolje će. **Teorija skupova** nastala je iz razmatranja beskonačnih skupova. Već u antici su se idejom beskonačnosti bavili ne samo filozofi i teolozi, nego i matematičari (Zenonovi paradoksi; Eudoksova metoda ekshaustije). Posebno, Aristotel je razlikovao aktualnu i potencijalnu beskonačnost i samo potonju smatra realno mogućom. U srednjem vijeku tom su se temom bavili npr. Toma Akvinski (13. st.) i T. Bradwardine (14. st.), koji je smatrao da su kontinuirane veličine sastavljene od beskonačno mnogo istovrsnih kontinuiranih veličina. Spomenuli smo i prvu pojava osnovnog svojstva beskonačnih skupova, a to je da je beskonačan skup ekvipotentan nekom svom pravom podskupu, kod Galilea, koji je tako primijetio da za beskonačne veličine vrijede druga pravila nego za konačne, iz čega je vidljivo da prihvaća egzistenciju beskonačnih skupova. Ipak, do 19. st. mnogi će matematičari smatrati da beskonačni skupovi ne postoje ili, kao Bošković, paradoksima argumentirati nemogućnost beskonačnosti. Takve prividne paradokse istraživao je na temelju više primjera već spomenuti češki matematičar **Bernhard Bolzano** (1781.–1848.). Tako je našao više primjera beskonačnih skupova s bijekcijom na neki pravi podskup, npr. $\langle 0,1\rangle \sim \langle 0,2\rangle$. Bolzanov tekst *Paradoxien des Unendlichen* objavljen je posthumno 1851. Tu se po prvi put pojavljuje pojam „skup”.

**Primjer 46 (Bolzanovo objašnjenje Galileovog paradoksa)** *Gledamo kvadrat $\square ABCD$ i ucrtamo četvrt kružnice oko $A$ s polumjerom $|AB|$.*




*Paralela s $AD$ siječe kvadrat u $P$ i $R$, dijagonalu $AC$ u $N$ i luk kružnice u $M$. Ako se $PR$ približava k $AD$, krug polumjera $|PN|$ se smanjuje dok ne ostane samo točka $A$. Pritom prsten između kružnica s polumjerima $|PM|$ i $|PR|$ postaje sve tanji i prelazi u kružnicu polumjera $|AC|$. No, za svaki $PR$ vrijedi i $|PN|^2 = |PR|^2 - |PM|^2$. Znači li to da točka $A$ ima površinu kao krug polumjera $|AC|$? Ne! Bolzano je pokazao da točka kao i kružnica imaju površinu nula – broj točaka u figuri ne određuje njezinu površinu.*

No, pravi poticaj je došao vezano za preciziranje uvjeta konvergencije trigonometrijskih redova. Njima se u početku svoje karijere bavio njemački matematičar **Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor** (1845.–1918.). Rođen u St. Petersburgu. Kad je imao 11 godina, obitelj se odselila u Njemačku. Studirao je matematiku u Zürichu i u Berlinu. U Berlinu su mu među profesorima bili Weierstraß i Kronecker. Doktorirao je 1867. s temom iz teorije brojeva. Isprva je radio u školi za djevojčice, a onda se 1869. zaposlio na sveučilištu u Halleu. Tu ga je za matematičku analizu zainteresirao **Heinrich Edouard Heine** (1821.–1881.), poznat po uvođenju pojma uniformne neprekidnosti funkcije, Heineovoj definiciji neprekidnosti funkcije i Heine-Borelovom teoremu (podskup $\mathbb{R}^n$ je kompaktan ako i samo ako je zatvoren i ograničen). U doba kad je Cantor došao u Halle bavio se pitanjem jedinstvenosti reprezentacije funkcije svojim Fourierovim redom. Cantor je tako provjeravajući razne uvjete tipa „konvergira do na ... skup" počeo razmatrati precizniji opis linearnog kontinuuma realnih brojeva. Cantor je 1870. definirao realne brojeve kao klase ekvivalencije Cauchyjevih nizova racionalnih brojeva i dokazao bijekciju s točkama pravca. Pritom je definirao i mnoge topološke pojmove (okolina, gomilište skupa, ... ) i dobio novi uvjet jedinstvenosti reprezentacije funkcije Fourierovim redom. Tako se Cantor počeo pomalo detaljnije posvećivati skupu $\mathbb{R}$ i općenito beskonačnim skupovima. Naravno, potrebu preciznije definicije realnih brojeva nije primijetio samo on. Godine 1872. sprijateljio se s **Richardom Dedekindom** (1831–1916), koji se također bavio definiranjem realnih brojeva. Od njega potječe moderna, precizna definicija kontinuuma $\mathbb{R}$ putem **Dedekindovih rezova**. Skup racionalnih brojeva je naravno lako definirati kao skup svih brojeva koji su kvocijenti dva cijela broja, a Dedekindovi rezovi (1872.) omogućuju preciznu definiciju iracionalnih brojeva kao rezova u skupu $\mathbb{Q}$. Rez u skupu racionalnih brojeva činei njegova particija na dva skupa $A$ i $B$ (dakle, $A, B \subseteq \mathbb{Q}$ $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{Q}$) pri čemu $A$ nema najveći element, svi elementi od $A$ su manji od svih elemenata u $B$ ($\forall x \in A\ \forall y \in B\ x < y$). Svaki takav rez definira po jedan iracionalan broj, primjerice $\sqrt{2}$ je broj definiran rezom $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$; $B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 > 2\}$.

Tijekom 1873. Cantor je dokazao ekvipotentnost $\mathbb{N}$ s $\mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \end{array}$$

Pritom je koristio svojstvo koje je očigledno točno za konačne skupove: dva skupa su ekvipotentna (imaju jednako mnogo elemenata) ako postoji bijekcija s jednog na drugi. To je svojstvo kasnije istaknuo i kao definiciju ekvipotentnosti (jednakobrojnosti). Primijetimo: Skup je ekvipotentan (jednakobrojan) sa skupom prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ ako i samo ako ako se sve njegove elemente može poredati u niz.[21] Skupovi ekvipotentni $\mathbb{N}$ nazivaju se **prebrojivim skupovima**, a njihov kardinalni broj označava se s $\aleph_0$ (alef-nula). I naziv i oznaka potječu iz kasnijih Cantorovih tekstova. Iste godine je dokazao i prebrojivost skupa $\mathbb{Q}$. *Danas* prebrojivost $\mathbb{Q}^+$ dokazujemo pomoću dijagrama

[21]Podsjetimo se, nizovi su funkcije s domenom $\mathbb{N}$.

$$\begin{tikzcd}
\frac{1}{1} \arrow[r] & \frac{2}{1} \arrow[dl] & \frac{3}{1} \arrow[r] & \frac{4}{1} \arrow[dl] & \cdots \\
\frac{1}{2} \arrow[d] & \frac{2}{2} \arrow[ur] & \frac{3}{2} \arrow[dl] & \frac{4}{2} \arrow[ur] & \cdots \\
\frac{1}{3} \arrow[ur] & \frac{2}{3} \arrow[dl] & \frac{3}{3} \arrow[ur] & \frac{4}{3} & \cdots \\
\frac{1}{4} \arrow[r] & \frac{2}{4} \arrow[ur] & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

iz kojeg se vidi da se svi pozitivni racionalni brojevi mogu poredati u niz. To je i dovoljno, jer $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$, a $\mathbb{Q}^+$ i $\mathbb{Q}^-$ su očito ekvipotentni. Stoga, ako smo $\mathbb{Q}^+$ zapisali kao niz $x_1, x_2, x_3, \ldots$, onda se $\mathbb{Q}^-$ može zapsisati kao niz $-x_1, -x_2, -x_3, \ldots$, pa je i $\mathbb{Q}$, po analognom principu kao gore opisanom za $\mathbb{Z}$, u bijekciji s $\mathbb{N}$, dakle prebrojiv. Ove se ideje obično prepričavaju kao $\boxed{\text{Hilbertov hotel}}$ (znameniti David Hilbert ga je ispričao na jednom predavanju 1924., a priča je postala popularna 1947. knjigom G. Gamowa *One, Two, Three ... Infinity*). Cantor je 1873. dalje dokazao i da je skup svih algebarskih brojeva prebrojiv. Stoga je razumno pitenja: Jesu li možda svi beskonačni skupovi prebrojivi? Krajem 1873. Cantor je dokazao (a 1874. u *Crelle's Journal* objavio) da je odgovor na to pitanje *ne*, odnosno da postoje beskonačni skupovi s različitim brojevima elemenata. Cantor je naime dokazao da $\mathbb{R}$ nije ekvipotentan s $\mathbb{N}$, tj. da je $\mathbb{R}$ neprebrojiv. Taj dokaz smatra se utemeljenjem teorije skupova.

Ubrzo su Cantorovi rezultati postali kontroverzni. Naime, tek 1844. je Liouville dokazao da transcendentni brojevi postoje, 1873. je Hermite dokazao da je e transcentdentan, a iz Cantorovog rezultata slijedi da iracionalnih brojeva ima neprebrojivo mnogo.[22] Štoviše, 1877. je dokazao da su dužina, kvadrat i kocka ekvipotentni. Poznato je da ja sam pritom izjavio *Vidim, ali ne vjerujem!*. Taj dokaz, ako se prihvati, prirodno otvara pitanje ima li dimenzija onda smisla?[23] U članku 1877. Cantor je precizirao pojam ekvipotentnosti, uveo oznaku $\sim$ za ekvipotentnost, dokazao da su prebrojivi skupovi (po broju elemenata) najmanji beskonačni skupovi, ... Kontroverzi oko Cantorovih rezultata najviše je doprinijeo tadašnji izdavač *Crelle's Journal*-a, **Leopold Kronecker** (1823.–1891.). Posljednji spomenuti članak objavio je tek nakon intervencije Dedekinda i Weierstraßa. Glavni razlog njegova protivljenja bilo je njegovo konstruktivističko uvjerenje, po kojem se priznaju

[22] Ako je $A$ prebrojiv podskup neprebrojivog skupa $B$, onda je $B \setminus A$ neprebrojiv. Naime, ako bi bio prebrojiv, onda bi bio $B = A \cup (B \setminus A)$ unija dva prebrojiva skupa, a to je — analogno kao u dokazu prebrojivosti skupa $\mathbb{Z}$ — prebrojiv skup.

[23] To je razriješio 1912. otac moderne topologije, nizozemski matematičar Jan Brouwer (1881.–1966.). On je dokazao da između prostora različite (konačne) dimenzije doduše postoji bijekcija, ali ne i neprekidna, tj. neprekidnost omogućava razlikovanje dimenzije.

e samo dokazi postojanja nekog matematičkog objekta koji daju eksplicitni način konstrukcije tog objekta u konačno mnogo koraka. Za razliku od toga, Cantorovi dokazi bili su nekonstruktivni (npr. dokazivo postoji neprebrojivo mnogo iracionalnih brojeva, ali se iz dokaza ne može eksplicitno dobiti niti jedan od njih). U tom duhu je i poznati Kroneckerov citat *Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.* („Bog je stvorio cijele brojeve, a sve ostalo je djelo čovjeka"). U razdoblju 1879.–1884. Cantor je u časopisu *Mathematische Annalen* objavio šest članaka s detaljnim opisom svoje teorije skupova. Tu uvodi i dobro uređene skupove, ordinalne brojeve i njihovu aritmetiku. Najmanji beskonačni ordinalni broj $\omega$ je broj koji opisuje $\mathbb{N}$ sa standardnim uređajem.

1894. Cantor je doživio prvi napad depresije. Neki su ga pripisivali sukobu s Kroneckerom, no vjerojatnije je da je bio uzrokovan općim problemima u međuljudskim odnosima i matematičke brige, posebno neuspješni pokušaji dokaza **hipoteze kontinuuma**. Naime, kardinalni broj skupa $\mathbb{N}$, tj. $\aleph_0$, je prema spomenutom članku iz 1877. najmanje beskonačni kardinalni broj, a prema članku iz 1874. kojim je utemeljena teorija skupova on je manji[24] od kardinalnog broja skupa $\mathbb{R}$ (taj se označava s $\mathfrak{c}$). Dakle:

$$\aleph_0 < \mathfrak{c}.$$

Razumno je pitanje postoji li koji kardinalni broj između ta dva. Cantor je postavio hipotezu kontinuuma da takvog nema, tj. da je najmanji kardinalni broj veći od $\aleph_0$, u oznaci to je $\aleph_1$, jednak $\mathfrak{c}$. Budući da je uspio dokazati i da je $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$, hipoteza kontinuuma obično se zapisuje formulom

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

U to doba Cantor je imao poteškoća i s dobivanjem mjesta u Berlinu te su se napadi depresije počeliponavljati. Ipak, 1895.–97. objavio je dvodijelni pregled svoje teorije skupova s proširenjima. Najpoznatiji rezultat te druge Cantorove faze je **osnovni Cantorov teorem teorije skupova**: Svaki skup ima manje elemenata nego njegov partitivni skup. Dokaz je kratak i lagan. Neka je $A$ neki skup i $\mathcal{P}(A)$ njegov partitivni skup, tj. skup svih podskupova od $A$. Funkcija $x \mapsto \{x\}$ je očito injekcija s $A$ u $\mathcal{P}(A)$, dakle skup $A$ nema više elemenata nego $\mathcal{P}(A)$. Pretpostavimo da postoji bijekcija $f : A \to \mathcal{P}(A)$. Onda je $f$ surjekcija. Neka je $M = \{x \in A : x \notin f(x)\}$. Očito je $M \in \mathcal{P}(A)$. Zbog surjektivnosti postoji $a \in A$ takav da je $f(a) = M$. Tada je ili $a \in M$ ili $a \notin M$. Ako $a \in M$, po definiciji skupa $M$ vrijedi $a \notin f(a) = M$ i obrnuto,

[24]Kardinalni broj $a$ skupa $A$ je manji ili jednak kardinalnom broju $b$ skupa $B$ ako postoji injekcija s $A$ u $B$. Ako je $a \leq b$ i $a \neq b$, onda je $a < b$.

ako $a \notin M$, onda po definiciji skupa $M$ slijedi $a \in M$. Dakle, u oba slučaja dobili smo kontradikciju te je dokazan osnovni teorem teorije skupova.

Trivijalna posljedica ovog teorema je da postoji beskonačno mnogo različitih beskonačnosti: $\aleph_0$ je manji od kardinalnog broja $a$[25] od $A = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, koji je manji od kardinalnog broja $b$ od $B = \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$, koji je manji od kardinalnog broja $c$ od $C = \mathcal{B}(A) = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))$, ...

Tehnika dokaza osnovnog teorema teorije skupova poznata je pod nazivom **dijagonalni argument**, posebno kad se koristi njezina varijanta za dokaz neprebrojivosti skupa realnih brojeva. Naime, dok prvi Cantorov dokaz neprebrojivosti $\mathbb{R}$ koristi drugačiju tehniku, 1891. dao je novi dokaz koji je danas uobičajen dokaz te tvrdnje. Radi se o dokazu ekvipotentnosti $\mathbb{R}$ i $\langle 0, 1\rangle$[26] na sljedeći način: Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\langle 0, 1$ prebrojiv. Onda se svi brojevi iz $\langle 0, 1\rangle$ mogu nabrojati kao niz $(x_n)_n$. Neka su svi članovi tog niza dani u svom decimalnom zapisu (taj je jedinstven ako zahtijevamo beskonačno mnogo nenul znamenki). Primjerice:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0{,}\underline{7}528752\ldots \\ x_2 &= 0{,}5\underline{0}38567\ldots \\ x_3 &= 0{,}11\underline{9}3453\ldots \\ x_4 &= 0{,}255\underline{3}602\ldots \\ &\vdots \end{aligned} \tag{11.2}$$

Konstruiramo novi broj $x = 0{,}a_1a_2a_3\ldots \in \langle 0, 1\rangle$, za koji je $a_i = 9$ uvijek osim ako je $i$-ta znamenka od $x_i$ jednaka 9, u kom slučaju uzimamo $a_i = 8$ (gore: $x = 0{,}9989\ldots$). Tada je $x_0$ očito u $\langle 0, 1\rangle$, ali nije u nizu jer se od svakog člana niza razlikuje u bar po jednoj znamenci, dakle smo dobili kontradikciju s pretpostavkom.

1890-ih godina Cantor se pokušao pomiriti s Kroneckerom te ga je pozvao na prvi sastanak *Deutsche Mathematische Vereinigung* 1891. Kronecker nije mogao doći na taj sastanak zbog smrti supruge, a ubrzo zatim je i sam umro. Godine 1896. Cantoru je umrla majka, a 1899. mlađi brat i najmlađi sin. S vremenom su se napadi depresije sve češće pojavljivali i počeo se sve ekscentričnije ponašati. Tako je u svojim „mračnim” fazama bio skloniji baviti se filozofijom i teorijom da je Roger Bacon napisao Shakespeareove drame, nego matematikom. Objavio je i radove o toj teoriji, a kad je 1911. kao ugledan znanstvenik bio pozvan na 500. obljetnicu sveučilišta St. Andrews u Škotskoj govorio je uglavnom o teoriji Shakespeare-Bacon. Nakon što je

[25] Zapravo je $a = \mathfrak{c}$.

[26] Interval $\langle 0, 1\rangle$ je ekvipotentan s $\mathbb{R}$, bijekcija je primjerice $f(x) = \mathrm{ctg}(\pi x)$.

u razdoblju 1900.–1910. često zbog boravaka u sanatorijima bio odsutan s posla, povukao se u mirovinu 1913. Posljednje godine života proveo je slabo ishranjen zbog ratnih uvjeta, a umro je od srčanog udaru u sanatoriju u Halleu 1918.

**Giuseppe Peano** je prvi koji je eksplicitno spomenuo korištenje tvrdnje poznate pod nazivom **aksiom izbora**, koju je implicitno već ranije koristio Cantor: Za bilo kakvu familiju[27] međusobno disjunktnih skupova postoji skup koji sa svakim skupom te familije ima točno po jedan zajednički element. Peano je također uveo simbol $\in$ za „je element skupa” te znakove $\cap$ i $\cup$ za presjek i uniju skupova (1888./9.).

Na prijelazu 19. u 20. stoljeće otkriveno je nekoliko paradoksalnih rezultata koji proizlaze iz Cantorove teorije skupova. Najpoznatiji među njima su

- **Burali-Fortijev paradoks**: Klasa svih ordinalnih brojeva nije skup (1897.).
- **Cantorov paradoks**: Klasa svih skupova nije skup (1899.).
- **Russellov paradoks**: $A = \{x : x \notin x\}$ nije skup (1902.).

Postavilo se pitanje je li možda ipak Kronecker bio u pravu? No, u to doba teorija skupova već je imala velike posljedice na druge matematičke discipline (npr. postala je temelj teorije mjere) te ju se nije moglo jednostavno odbaciti. Stoga su se matematičari počeli baviti pitanjem kako spriječiti paradokse. Prva ideja je bila da možda potječu od aksioma izbora. Tako primjerice iz aksioma izbora slijedi paradoks Banacha i Tarskog: Kugla se može rastaviti na konačno mnogo dijelova iz kojih se mogu sastaviti dvije kugle jednakog volumena. No, **Ernst Zermelo** (1871.–1956.) i **Émile Borel** (1871.–1956.) su pokazali da je aksiom izbora ekvivalentan tvrdnji koju je koristio već Cantor: Svaki skup se može dobro urediti. **Bertrand Russell** (1872.–1970.) je s Alfred North Whiteheadom (1861–1947) izdao *Principia Mathematica* (prvo izdanje 1910.) s ciljem svođenja čitave matematike na logiku, no ni to nije pomoglo. Rješenje je: aksiomatizacija teorije skupova. Prvi prijedlog aksioma teorije skupova dao je 1908. Zermelo. Taj prvi sustav aksioma doradili su drugi matematičari sve dok 1922. nije dobiven danas uobičajeni sustav aksioma (poznat kao **Zermelo-Fraenkelovi aksiomi teorije skupova**). On s jedne strane onemogućuje pojavu paradoksâ, a s druge strane omogućuje korištenje svih Cantorovih rezultata teorije skupova.

[27]Uobičajen termin kad se govori o skupu čiji elementi su skupovi je da je to familija skupova.

Tom sustavu se danas u pravilu kao aksiom dodaje aksiom izbora za kojega je 1940. **Kurt Gödel** (1906.–1978.) dokazao da se ne može opovrgnuti koristeći ostale aksiome teorije skupova, a 1963. je Paul Cohen pokazao da je aksiom izbora nezavisan od ostalih aksioma teorije skupova. Za kraj napomenimo da i hipotezu kontinuuma nije moguće ni dokazati ni opovrgnuti koristeći Zermelo-Fraenkelov sustav aksioma (bilo sa bilo bez aksioma izbora).

Ta aksiomatizacija nije bila jedina. Na prijelazu 19.ũ 20.št. bio je izrazit trend aksiomatizacije matematičkih disciplina. Vidjeli smo da je Peano 1888. dao aksiome vektorskih prostora, **David Hilbert** (1862.–1943.) je tradicionalne Euklidove aksiome geometrije zamijenio novim sustavom aksioma 1899., ruski matematičar **Andrej Nikolajevič Kolmogorov** (1903.–1987.) je 1933. po uzoru na teoriju mjere i teoriju skupocvaaksiomatizirao teoriju vjerojatnosti[28] čime je razriješen glavni problem teorije vjerojatnosti (klasična definicija vjerojatnosti *a priori* je cirkularna), . . . .

Upravo spomenuti David Hilbert je 1899. u *Grundlagen der Geometrie* ne samo modernizirao aksiome euklidske geometrije, nego i dokazao konzistentnost aksioma euklidske geometrije (kako smo rekli, to onda automatski povlači i konzistentnost aksioma neeuklidske geometrije) te dao dokaz nezavisnosti aksioma o paralelama od ostalih euklidskih aksioma. Znamenita su i Hilbertova 23 problema, koje je kao važne neriješene matematičke probleme na Svjetskom matematičkom kongresu u Parizu 1900.[29] 1920. je formulirao Hilbertov program, koji je u osnovi istraživanje korektnosti osnova matematike. Gödelovi teoremi nepotpunosti (1931.)[30]

---

[28]Kolmogorovljevi aksiomi vjerojatnosti u izvornoj verziji glase ovako: Neka je $\Omega$ neprazan skup i $\mathcal{F}$ familija podskupova od $\Omega$ (te podskupove Kolmogorov naziva slučajnim događajima). Ako je $\mathcal{F}$ „polje skupova"takvo da je $\Omega \in \mathcal{F}$, da postoji funkcija $P$, koja svakom $A \in \mathcal{F}$ pridružuje nenegativni broj $P(A)$, vjerojatnost događaja $A$, tako da vrijedi

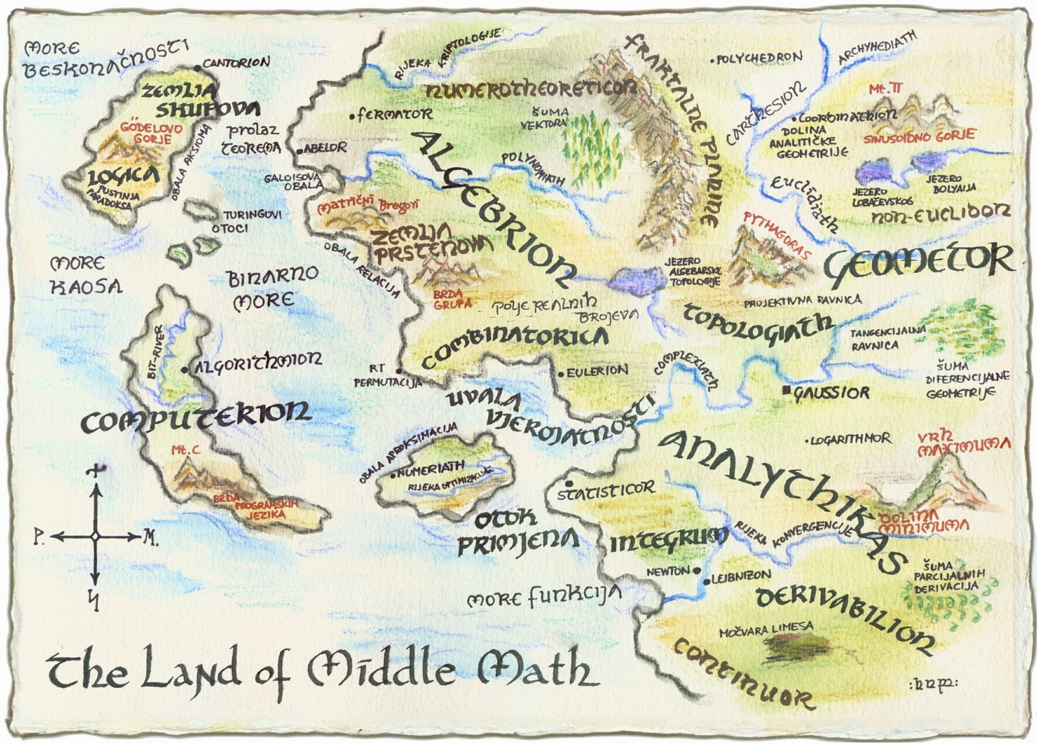
- $P(\Omega) = 1$,
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ za disjunktne $A, B \in \mathcal{F}$ i
- $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$, wenn $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \ldots$, $A_n \in \mathcal{F}$ za sve $n$ i $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$,

onda je $\Omega$ s $\mathcal{F}$ i $P$ prostor vjerojatnosti.

[29]Zapravo ih je na kongresu naveo deset i onda kasnije dopunio popis. Neki su i danas nerazriješeni.

[30]Prvi teorem nepotpunosti u osnovi tvrdi u svakom aksiomatskom sustavu koji sadrži bar Peanovu aritmetiku postoji formula koja se ne može ni dokazati ni opovrgnuti, a drugi teorem nepotpunosti kaže da se konzistentnost Peanove aritmetike ne može dokazati unutar nje same.

„Iz raja kojeg nam je stvorio Cantor neće nas nitko moći istjerati” (D. Hilbert)
„Bit matematike je u njezinoj slobodi” (G. Cantor)




Slika: © FMB 1999 (CC BY-NC-ND)

I to (nije) kraj povijesti matematike!

# Bibliografija

[1] Anglin, W.S., Lambek, J., *The Heritage of Thales*. Springer Verlag, New York, 1995.

[2] Brückler, F.M., *Geschichte der Mathematik kompakt: Das Wichtigste aus Arithmetik, Geometrie, Algebra, Zahlentheorie und Logik*. Springer Spektrum, Berlin, 2017.

[3] Cajori, F. (1993). *A History of Mathematical Notations*. Dover publications, inc.

[4] Eschenburg, J.-K., *Sternstunden der Mathematik*. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2017.

[5] González-Velasco, E. A., *Journey through Mathematics*- Springer, New York, 2011.

[6] Heath, T., *A History of Greek Mathematics, Vol. II*. Oxford at the Clarendon Press, 1921.

[7] Lam Lay Yong, *Zhang Qiujian Suanjing (The Mathematical Classic of Zhang Qiujian). An Overview*. Archive for History of Exact Sciences, 50 (1997), 201-–240.

[8] Medić, D., *Povijest brojeva i njihove notacije*. Diplomski rad, PMF-MO, Zagreb, 2011.

[9] Wußing, H., *6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise 1. Von den Anfängen bis Leibniz und Newton*. Springer, Leipzig, 2008.

**Bibliografija još nije potpuna!!!**