Termodinamika prostorvremena

Luka Benić*
mentor: izv. prof. dr. sc. Ivica Smolić†
Prirodoslovno-matematički fakultet, Fizički odsjek
Bijenička cesta 32, 10000, Zagreb
(Dated: 19. siječnja 2023.)

Izvedena je najopćenitija forma Rindlerovih koordinata koje su adaptirane na svjetske linije ubrzanih opažača u prostorvremenu Minkowskog. Zatim je heurističkim postupkom, koji je usko vezan uz WKB aproksimaciju u kvantnoj mehanici, reproducirana Unruhova temperatura. Nakon toga konstruiramo termalni sustav u proizvoljnom prostorvremenu, zatim taj sustav tretiramo prvo ravnotežno, potom neravnotežno uz pretpostavku da postoji proporcionalnost između entropije i površine lokalnog horizonta te time dolazimo do potrebnih gravitacijskih jednadžbi polja uz dodatne doprinose entropiji (ovi doprinosi se javljaju samo u neravnotežnom tretmanu). Konačno, diskutiramo moguću interpretaciju dobivenih rezultata te su navedene moguće implikacije ovakvog pristupa gravitaciji.

I. UVOD

Zakoni mehanike crnih rupa poznati su još od sedamdesetih godina prošlog stoljeća. Bardeen, Carter i Hawking [1] su izveli četiri zakona mehanike za stacionarnu, osnosimetričnu crnu rupu. Dobivena četiri zakona u prirodnom sustavu jedinica glase [2]:

• Površinska gravitacija κ stacionarne crne rupe je konstantna.

• Za stacionarnu crnu rupu vrijedi

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi}\delta A + \Omega_H \delta J + \Phi_H \delta Q \ ,$$

gdje je M masa, J angularni moment, Q naboj stacionarne crne rupe, Ω_H angularna brzina horizonta, Φ_H električni potencijal na horizontu, A je površina 2-dimenzionalnog presjeka horizonta te δ označava varijaciju.

• Uz određene uvjete, koji u ovom trenutku nisu toliko bitni, za površinu horizonta crne rupe koja nije stacionarna vrijedi

$$\delta A \geq 0 \ ,$$

dok u stacionarnom slučaju vrijedi

$$\delta A = 0 \ .$$

• Niti jedan fizikalni proces ne može svesti površinsku gravitaciju κ crne rupe na 0 u konačnom broju operacija.

Napomenimo još da se u [2] nalazi precizna definicija pojma stacionarna crna rupa, no ona nam neće trebati dalje kroz rad pa ju nećemo ovdje navoditi.

Ono što odmah uočavamo je da ova četiri zakona imaju jednaku strukturu kao dobro poznata četiri zakona termodinamike. Drugim riječima, ovi zakoni su analogni zakonima termodinamike ako uzmemo da vrijedi (u prirodnom sustavu jedinica):

$$T = \frac{\kappa}{2\pi} \ , \tag{1a}$$

$$S = \frac{A}{4} \ . \tag{1b}$$

Dakle, korištenjem opće teorije relativnosti (OTR) moguće je izvesti zakone mehanike crnih rupa te uspostaviti analogiju sa zakonima termodinamike. Ono što je cilj ovog rada je pokazati da se može ići obrnutim smjerom i izvesti jednadžbe polja (u OTR slučaju to su Einsteinove jednadžbe, no pokazat ćemo kroz rad kako se to proširuje i na ostale gravitacijske teorije) kao jednadžbe stanja, analogno jednadžbama stanja u termodinamici [3, 4].

Za to će nam biti potrebno uvesti pojam ubrzanog opažača, zbog toga ćemo izvesti koordinatni sustav (Rindlerove koordinate) koji je adaptiran na svjetske linije ubrzanog opažača u prostorvremenu Minkowskog. Naime, kako ćemo i pokazati sve veličine ćemo morati tretirati u odnosu na takve opažače čak i u zakrivljenom proizvoljnom prostorvremenu, kao što će ovdje i biti slučaj. Princip ekvivalencije će nam omogućiti da uz dovoljno lokalne uvjete okolinu svake točke u zakrivljenom prostorvremenu poistovjetimo s prostorvremenom Minkowskog (ravnim prostorvremenom).

Potreba za ubrzanim opažačem bit će opravdana kroz konstrukciju cijelog postupka dobivanja jednadžbi polja jer će nam od ključnog značaja biti upravo Unruhova temperatura, koju mjeri neki ubrzani opažač koji se giba u nekom prostorvremenu (odnosno na glatkoj Lorentzovoj mnogostrukosti $(\mathcal{M}, g)$, s metrikom g, za više detalja pogledati npr. u [5]) u kojem se nalazi neko kvantizirano polje. Napomenimo da je Unruhova temperatura posljedica Unruhovog efekta [6].

* lbenic.phy@pmf.hr
† ismolic.phy@pmf.hr

Unruhov (ili Fulling–Davies–Unruhov) efekt je rezultat kvantne teorije polja koji govori da će ubrzani opažač koji se giba u nekom prostrovremenu u koje je postavljeno neko kvantizirano polje opaziti distribuciju čestica u vakuumu inercijalnog opažača i koji je u tom smislu za inercijalnog opažača prazan. Znamo da dobivena distribucija može biti ili Bose-Einsteinova ili Fermi-Diracova, ovisno o tome koje polje smo stavili u promatrano prostorvrijeme, iz dobivene raspodjele se onda iščitava Unruhova temperatura. Mi ćemo ovdje izvesti izraz za Unruhovu temperaturu koristeći pristup koji je usko vezan uz WKB aproksimaciju u kvantnoj mehanici. Račun ćemo uvelike bazirati na radu [7] uz napravljene potrebne modifikacije. Sama ideja ovakvog pristupa dolazi od rada Parikha i Wilczeka [8] koji su razvili ovu metodu kako bi opisali Hawkingovo zračenje.

Nadalje, konstruiramo termalni sustav pomoću ubrzanog opažača koji se giba u proizvoljnom prostorvremenu i onda pomoću principa ekvivalencije razmatramo što se događa na proizvoljnom dijelu tog prostorvremena na jako maloj okolini koja je približno ravna.

Jedna od glavnih pretpostavki će nam biti ta da postoji proporcionalnost između entropije i površine lokalnog horizonta kojeg također konstruiramo.

Dobivene rezultate primjenjujemo te pokazujemo da u ovom kontekstu gravitacijske jednadžbe polja odgovaraju jednadžbama stanja u termodinamici. Prvo sve promatramo u najjednostavnijem, ravnotežnom, slučaju što nam omogućuje korištenje Clausiusove relacije $\delta Q = TdS$ (ovdje δ označava nepravi diferencijal, ponekad se u literaturi koristi i oznaka đ). Nadalje, poopćavamo problem te nam to sugerira da moramo raditi s neravnotežnom termodinamikom, odnosno da mora vrijediti $dS \geq \frac{\delta Q}{T}$.

Potonji tretman problema u jednom dijelu opet daje potrebne jednadžbe polja, no ostatak daje doprinose entropiji koje ćemo pokušati interpretirati u kontekstu relativističke disipativne hidromehanike.

Ovakvim pristupom gravitaciji izvest ćemo jednadžbe polja za standardnu OTR te za najjednostavnije poopćenje te teorije, tzv. $f(R)$ gravitaciju, gdje je $f(R)$ neka glatka funkcija Riccijevog skalara (R).

Još napomenimo da će se nadalje kroz cijeli rad koristiti $(-,+,+,+)$ signatura metrike te da će se koristiti sustav mjernih jedinica za koji vrijedi $c = k_B = 1$. Također, često ćemo parcijalne derivacije ($\partial_a f$) označavati s $f_{,a}$, a kovarijantne ($\nabla_a f$) s $f_{;a}$ (ovdje je to napisano za neku skalarnu funkciju f, no naravno podrazumijeva se da ćemo ovo koristiti za bilo koji tenzor).

II. RINDLEROVE KOORDINATE

Za početak ćemo izvesti putanju ubrzanog opažača u prostorvremenu Minkowskog, radit ćemo bez smanjenja općenitosti s vremenskom i jednom prostornom koordinatom. Napomenimo da ćemo ovaj dio ovog poglavlja podosta bazirati na [9]. Iz tih rezultata ćemo doći do općenite forme Rindlerovih koordinata. Prvo uvodimo pojam vlastite akceleracije, to je akceleracija koju mjeri ubrzani opažač u svom sustavu mirovanja, ovu ćemo akceleraciju označavati s a. S druge strane neki inercijalni opažač također mjeri kojom akceleracijom se giba ovaj ubrzani opažač, tu akceleraciju ćemo zvati koordinatnom i označavat ćemo ju s A. Akceleracija ubrzanog opažača a za njega može biti konstantna, odnosno nemamo problema s tim da će mu brzina postati veća od brzine svjetlosti jer on mjeri tu akceleraciju uvijek u trenutno mirujućem sustavu. Takav trenutno mirujući sustav nazivamo sugibajućim inercijskim sustavom. Sugibajući inercijski sustav definiramo kao sustav koji u svakom odabranom trenutku vlastitog vremena τ, koje mjeri ubrzani opažač, miruje u odnosu na tog opažača. To postižemo tako da tom sustavu damo brzinu u odnosu na inercijalnog opažača upravo na način da taj sustav miruje u odnosu na ubrzanog opažača u odabranom trenutku vlastitog vremena. To je moguće napraviti za svaki odabrani trenutak vlastitog vremena ubrzanog opažača. U tom smislu možemo gibanje ubrzanog opažača promatrati prelazak iz jednog u drugi sugibajući inercijski sustav. To nas vodi do toga da je 4-akceleracija koju bi mjerio opažač iz sugibajućeg inercijskog koordinatnog sustava jednaka $a^a = (0, a, 0, 0)$ (radimo samo s jednom prostornom koordinatom, u ovom slučaju X). Drugim riječima, vremenski dio 4-akceleracije za tog opažača je jednak 0 jer on akceleraciju mjeri trenutno. Sada možemo pronaći vezu Minkowski koordinata (X, T) s vlastitim vremenom ubrzanog opažača, odnosno možemo pronaći putanju ubrzanog opažača u (X, T) koordinatama. Za to nam je još potrebno uvesti brzinu u, odnosno brzinu ubrzanog opažača u odnosu na sugibajući inercijski sustav. Ova brzina je po definiciji jednaka 0 za svaki τ, no njena prva derivacija nije jednaka 0 jer tada ne bismo ni imali nikakvo ubrzano gibanje. Još uvodimo brzinu v, to je relativna brzina između sugibajućeg inercijskog sustava i sustava inercijalnog opažača u prostorvremenu Minkowskog. Brzina v nam definira potrebni Lorentzov faktor $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$. Dakle, računamo

$$\begin{aligned} a &= \frac{du}{dT} = \frac{d(\gamma v)}{dT} = v\frac{d\gamma}{dT} + \gamma\frac{dv}{dT} \\ &= Av^2\gamma^3 + A\gamma \; ; \; A = \frac{dv}{dT} \; , \; \frac{d\gamma}{dT} = Av\gamma^3 \\ &= A\gamma\frac{1}{1-v^2} = A\gamma^3 \implies a = \gamma^3\frac{dv}{dT} \; . \end{aligned}$$

Jednostavna integracija daje

$$aT = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \implies v = \frac{aT}{\sqrt{1+(aT)^2}} \; .$$

Veza između T i τ nam je dobro poznata i ona je

$$T = \gamma\tau \implies \frac{dT}{d\tau} = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \; .$$

Sada imamo

$$\frac{dT}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{aT}{\sqrt{1+(aT)^2}}\right)^2}} = \sqrt{1 + (aT)^2} \ .$$

Jednostavna integracija daje

$$a\tau = \sinh^{-1}(aT) \implies T(\tau) = \frac{1}{a}\sinh(a\tau) \ . \quad (2)$$

Nadalje, iz

$$v = \frac{dX}{dT} = \frac{aT}{\sqrt{1 + (aT)^2}}$$

jednostavnom integracijom dobivamo

$$X = \frac{\sqrt{1 + (aT)^2}}{a} \ ,$$

što nakon uvrštavanja izraza za $T(\tau)$ (2) rezultira s

$$X(\tau) = \frac{1}{a}\cosh(a\tau) \ . \quad (3)$$

Lako se uvjeravamo da vrijedi

$$X^2 - T^2 = \frac{1}{a^2} \ ,$$

odnosno da je putanja ubrzanog opažača s akceleracijom a u (X, T) koordinatama (koordinatama inercijalnog opažača u sustavu Minkowskog) hiperbola.

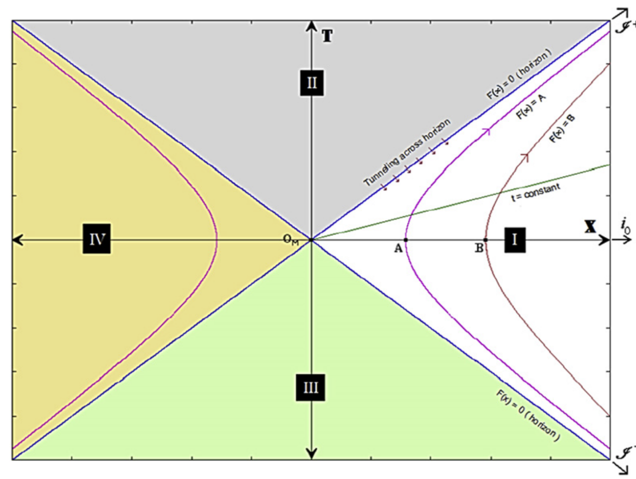
Napomenimo da smo kroz gornje račune implicitno fiksirali sve potencijalne integracijske konstante pomoću translacijskih simetrija prostorvremena Minkowskog.

Izrazi (2) i (3) nam sugeriraju općenitu formu Rindlerovih koordinata koje su adaptirane na svjetske linije ubrzanih opažača. Ta forma je [10]

$$\begin{gathered} T = F(x)\sinh(\kappa t) \ , \ X = F(x)\cosh(\kappa t) \\ Y = y \ , \ Z = z \ , \end{gathered} \quad (4)$$

gdje su (X, T) Minkowski koordinate, a (x, t) su Rindlerove koordinate, κ je konstanta te je $F(x)$ neka glatka funkcija Rindlerove koordinate x.

Na Slici 1 vidimo da uvođenjem Rindlerovih koordinata prostorvrijeme dijelimo na četiri klina odvojena svjetlosnim hiperplohama (jer kao što se lako uočava već sa same slike granice klinova su mjesta gdje vrijedi $X = \pm T$). Bitno je uočiti da (4) vrijedi za tzv. desni Rindlerov klin, na Slici 1 označen s **I**, za ostale klinove potrebne su sitne modifikacije. Toga ćemo se dotaći u sljedećem poglavlju pri izvodu Unruhove temperature. Također, napomenimo da se u literaturi još koristi sljedeća nomenklatura: **I** = desni, **II** = budući, **III** = prošli, **IV** = lijevi Rindlerov klin. To će nam biti važno kasnije kod konstrukcije termalnog sustava. Također, na Slici 1 su za desni klin prikazani položaji svjetlosne prošlosti - $\mathcal{I}^-$, prostorne budućnosti - i_0 i svjetlosne budućnosti -



Slika 1. Prikaz četiri Rindlerova klina razdvojena svjetlosnim hiperplohama. Slika preuzeta iz [10].

$\mathcal{I}^+$. To su standardne oznake s Penroseovih (ili Carter-Penroseovih) dijagrama.

Sada koristeći (4) možemo izvesti najopćenitiju formu Rindlerove metrike

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dT^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \\ &= -\kappa^2 F(x)^2 dt^2 + \left(\frac{dF(x)}{dx}\right)^2 dx^2 + dy^2 + dz^2 \ . \quad (5) \end{aligned}$$

Mi ćemo kroz rad koristiti dvije reprezentacije Rindlerove metrike: $F(x) = x$, uz $x = \frac{1}{a}$ i $F(x) = \frac{1+ax}{a}$ (a je akceleracija ubrzanog opažača u oba slučaja).

Prva reprezentacija nam daje metriku

$$ds^2 = -\kappa^2 x^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \ , \quad (6)$$

a druga

$$ds^2 = -\left(\frac{\kappa}{a}\right)^2 (1 + ax)^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \ . \quad (7)$$

Još ćemo samo navesti koje su domene pojedinih koordinata s kojima radimo. Naravno (X, T) standardno pokrivaju $-\infty < X, T < +\infty$. Koordinate (x, t) iz reprezentacije dane sa (6) pokrivaju $0 \leq x < +\infty$, $-\infty < t < +\infty$. Koordinate (x, t) iz reprezentacije dane sa (7) pokrivaju $-\frac{1}{a} \leq x < +\infty$, $-\infty < t < +\infty$.

III. WKB IZVOD UNRUHOVE TEMPERATURE

Cilj ovog poglavlja nam je doći do izraza za Unruhovu temperaturu. Standardni udžbenički izvod [11] polazi od skalarnog (spin mu je 0) bezmasenog polja u vremenskoj i jednoj prostornoj dimenziji te se potom to polje kvantizira u Minkowski koordinatama te u Rindlerovim koordinatama. To proizvodi dva skupa operatora stvaranja i poništenja. Po samoj definiciji tako dobiveni operatori poništenja ne poništavaju isti vakuum, odnosno jedan operator poništenja će poništavati Minkowski vakuum $|0\rangle_M$, a drugi Rindlerov vakuum $|0\rangle_R$. Ta dva skupa operatora su povezani tzv. Bogoljubljevim transformacijama. Naposljetku se računa očekivani broj čestica pomoću Rindlerovih operatora stvaranja i poništenja u vakuumu Minkowskog. To producira Bose-Einsteinovu raspodjelu u slučaju skalarnog bezmasenog polja. Iz te raspodjele se zatim iščitava Unruhova temperatura. Mi ćemo ovdje koristiti heurističan pristup, sličan WKB aproksimaciji u kvantnoj mehanici, koji je po svojoj prirodi poluklasičan te ćemo se dobrim dijelom bazirati na idejama iz članaka [7, 8, 10].

Za početak ćemo pokušati riješiti kovarijantnu Klein-Gordonovu jednadžbu, koja je dana s (A3) (uzet ćemo slučaj $m = 0$), koristeći reprezentaciju Rindlerove metrike danu izrazom (7). Također, radit ćemo s vremenskom i jednom prostornom koordinatom.

Ako izračunamo determinantu te metrike dobivamo da je ona jednaka

$$g = \det(g_{ab}) = -\left(\frac{\kappa}{a}\right)^2 (1+ax)^2 \ .$$

Odmah uočavamo da dobivena determinanta iščezava za $x = -\frac{1}{a}$. No to nam predstavlja problem u jednadžbi (A3) zbog faktora $\frac{1}{\sqrt{-g}}$. Na isti problem bismo naišli koristeći reprezentaciju Rindlerove metrike danu izrazom (6).

Ovo nam sugerira da konstruiramo koordinatnu transformaciju iz jednadžbe (7) koja će ukloniti ovakvo ponašanje metrike te koja će imati signaturu metrike po konvenciji koju smo odabrali na početku. To postižemo na sljedeći način:

$$1 + ax = \begin{cases} \sqrt{1+2ax'} & ,\ x' \geq -\frac{1}{2a} \\ i\sqrt{|1+2ax'|} & ,\ x' \leq -\frac{1}{2a} \end{cases} \ , \tag{8}$$

$$\sinh(\kappa t) = \begin{cases} \sinh(\kappa t') & ,\ x' \geq -\frac{1}{2a} \\ -i\cosh(\kappa t') & ,\ x' \leq -\frac{1}{2a} \end{cases} \ , \tag{9}$$

$$\cosh(\kappa t) = \begin{cases} \cosh(\kappa t') & ,\ x' \geq -\frac{1}{2a} \\ -i\sinh(\kappa t') & ,\ x' \leq -\frac{1}{2a} \end{cases} \ . \tag{10}$$

Izrazi (9) i (10) nam govore da za ovakvu transformaciju mora vrijediti

$$t = \begin{cases} t' & ,\ x' \geq -\frac{1}{2a} \\ t' - \frac{i\pi}{2\kappa} & ,\ x' \leq -\frac{1}{2a} \end{cases} \ . \tag{11}$$

Dakle, (8) i (11) nam daju transformaciju iz koordinata (x,t) reprezentacije dane sa (7) u koordinate (x',t'). To nam odmah implicira da je transformacija iz Minkowski koordinata (X,T) u (x',t') koordinate dana s:

$$\text{za } x' \geq -\frac{1}{2a} : \begin{cases} T = \frac{\sqrt{1+2ax'}}{a}\sinh(\kappa t') \\ X = \frac{\sqrt{1+2ax'}}{a}\cosh(\kappa t') \end{cases} \ , \tag{12}$$

$$\text{za } x' \leq -\frac{1}{2a} : \begin{cases} T = \frac{\sqrt{|1+2ax'|}}{a}\cosh(\kappa t') \\ X = \frac{\sqrt{|1+2ax'|}}{a}\sinh(\kappa t') \end{cases} \ . \tag{13}$$

Koordinate (x',t') pokrivaju $-\infty < x', t' < +\infty$.

Prvo što uočavamo je to da nam je metrika jednaka i za (12) i za (13) te je dana s:

$$ds^2 = -\left(\frac{\kappa}{a}\right)^2 (1+2ax')dt'^2 + (1+2ax')^{-1}dx'^2 \ . \tag{14}$$

Ako (14) usporedimo sa Schwarzschildovom metrikom u sfernim koordinatama

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \ , \tag{15}$$

uz zanemarivanje kutnog dijela $r^2 d\Omega^2$ koji efektivno odgovara y i z koordinatama, vidimo da metrika (14) ima istu formu kao Schwarzschildova metrika u sfernim koordinatama (15). Ovaj korak je jako važan jer smo na neki način uspjeli konstruirati horizont u (x',t') koordinatama koji je iste prirode kao dobro poznati horizont Schwarzschildove metrike, a nalazi se na položaju $x' = -\frac{1}{2a}$.

Nadalje, vidimo da je determinanta metrike (14) dobivene iz (12) i (13) jednaka $g = -\left(\frac{\kappa}{a}\right)^2$ te $\neq 0\ \forall\ x', t'$. Dakle, uspjeli smo riješiti problem od kojeg smo krenuli.

Ono što smo mi efektivno postigli gornjom analizom je sljedeće. Ako pogledamo [10], onda vidimo da je veza Minkowski i Rindlerovih koordinata u klinu **II** sa Slike 1 jednaka

$$\begin{gathered} T = F(x)\cosh(\kappa t) \ ,\ X = F(x)\sinh(\kappa t) \\ Y = y \ ,\ Z = z \ , \end{gathered} \tag{16}$$

što je očito jer bi u tom klinu putanje ubrzanih opažača bile hiperbole

$$T^2 - X^2 = \frac{1}{a^2} \ .$$

Ako pogledamo (12) i (13) vidimo da su hiperbolni dijelovi ovih transformacija u jednakom odnosu kao hiperbolni dijelovi iz transformacija za klin **I** i klin **II**.

Ovo je jako bitna opservacija jer nam ona govori da imamo, barem efektivno, tuneliranje čestica (skalarnih bezmasenih u našoj analizi) između klinova **I** i **II** sa Slike 1 preko horizonta danog u (x',t') koordinatama s $x' = -\frac{1}{2a}$.

Sada smo u prilici, po analogiji s npr. WKB teorijom alfa raspada, uzeti da nam je skalarno polje, odnosno valna funkcija, koje ulazi u jednadžbu (A3) oblika

$$\phi(x) = \phi_0 e^{\frac{i}{\hbar}S(x)} \ , \tag{17}$$

gdje je ϕ_0 konstanta, a $x = (t, \vec{x})$ 4-vektor položaja, dok je $S(x)$ akcija.

Iz (A3) imamo

$$-\frac{\hbar^2}{\sqrt{-g}}\left(g^{ab}\partial_b\phi\partial_a\sqrt{-g} + \sqrt{-g}(\partial_a g^{ab})\partial_b\phi + \right. \\ \left. + \sqrt{-g}g^{ab}\partial_a\partial_b\phi\right) + m^2\phi = 0 \ ,$$

u našem slučaju smo rekli da je $m = 0$ pa imamo

$$- \hbar^2 \left(g^{ab}\partial_b\phi\partial_a\sqrt{-g} + \sqrt{-g}(\partial_a g^{ab})\partial_b\phi + \right. \\ \left. + \sqrt{-g} g^{ab}\partial_a\partial_b\phi \right) = 0 \ .$$

Sada ćemo iskoristiti jedan od postulata diferencijalne geometrije [5], a to je tzv. kompatibilnost kovarijantne derivacije s metrikom, koji kaže da vrijedi $\nabla_a g^{bc} = 0$ te ćemo se ograničiti na slučajeve koordinatnih sustava s dijagonalnom metrikom, a s takvima i radimo kroz cijeli ovaj rad.

Dakle, imamo

$$\nabla_a g^{bc} = \partial_a g^{bc} + \Gamma^b_{ad} g^{dc} + \Gamma^c_{ad} g^{bd} = 0 \ .$$

Za dijagonalnu metriku znamo da vrijedi [12]

$$\Gamma^a_{bc} = 0, \text{ za } a \neq b \neq c \ ,$$
$$\Gamma^a_{ab} = \frac{\partial_b\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} \ .$$

Time dolazimo do

$$\partial_a g^{ab} = -\Gamma^a_{ac} g^{cb} - \Gamma^b_{ad} g^{ad} \ ,$$

što uz korištenje tzv. harmoničkog baždarenja $\Gamma^b_{ad} g^{ad} = 0$ [13] daje

$$-\hbar^2 g^{ab}\partial_a\partial_b\phi = 0 \ . \tag{18}$$

Sada uvrštavanjem (17) u (18) dobivamo

$$-i\hbar g^{ab}\partial_a\partial_b S(x) + g^{ab}(\partial_a S(x))(\partial_b S(x)) = 0 \ ,$$

što uz poluklasični limes $\hbar \to 0$ postaje

$$g^{ab}(\partial_a S(x))(\partial_b S(x)) = 0 \ . \tag{19}$$

Sljedeća bitna opservacija je ta da akciju iz (17) možemo pisati na način

$$S(x) = S(t, \vec{x}) = -Et + S_0(\vec{x}) \ , \tag{20}$$

iz klasične mehanike znamo da ovakva dekompozicija akcije vrijedi za konzervativne sustave, odnosno sustave u kojima je očuvana energija [14]. U jeziku gravitacije to izražavamo na način da kažemo da ako je prostorvrijeme stacionarno (prostorvrijeme koje posjeduje Killingov vektor vremenskog tipa), onda je energija u tom prostorvremenu očuvana. Jer nama zapravo stacionarnost implicira postojanje simetrije u vremenskim translacijama, što po Noetherinom teoremu implicira upravo očuvanje energije. Za reprezentacije Rindlerove metrike dane izrazima (6) i (7) postojanje Killingovih vektora vremenskog tipa koji odgovaraju nultoj komponenti u metrici je odmah vidljivo, no metrika (14) koji smo iskonstruirali ima jednu tehničku poteškoću koja se javlja upravo i u njenoj analogiji - Schwarzschildovoj metrici, a to je da Killingov vektor koji odgovara nultoj komponenti u metrici mijenja svoj karakter u ovisnosti s koje strane horizonta se nalazimo, odnosno on nije globalno vremenskog tipa. No to je samo jedna tehnikalija koja nam nije toliko bitna pa ćemo raditi bez ikakvih problema s izrazom (20).

Sljedeća veličina koja nam je potrebna je koeficijent tuneliranja $\mathbf{T}$ iz nerelativističke kvantne mehanike, za jednu prostornu dimenziju (x), za kojeg vrijedi [15]

$$\mathbf{T} \sim e^{-\frac{1}{\hbar}\mathfrak{Im}\oint p(x)\,dx} \ , \tag{21}$$

gdje $\oint$ znači da integriramo prvo od jedne klasične točke obrata do druge, a zatim obrnuto.

Kao što nam je već poznato $\oint p(x)\,dx$ u većini slučajeva možemo zamijeniti s $2\int p(x)\,dx$, gdje sada samo integriramo od jedne do druge klasične točke obrata.

U [7] autori pokazuju da prethodno opažanje u vezi integracije nije primjenjivo uvijek u WKB pristupu gravitaciji, no ovdje to opažanje možemo koristiti.

No u [7] autori iznose jednu važniju tvrdnju, a to je da jer nam sada više vrijeme nije parametar kao u nerelativističkoj kvantnoj mehanici, već koordinata ravnopravna prostornim, onda moramo i to uključiti u $\mathbf{T}$. Način na koji to postižemo je da $\mathbf{T}$ pišemo kao

$$\mathbf{T} \sim e^{-\frac{1}{\hbar}\mathfrak{Im}(2\int p(x)\,dx - E\Delta t)} \ , \tag{22}$$

uz $\Delta t = t^+ + t^-$, gdje t^+ označava promjenu u vremenskoj koordinati kod prelaska horizonta pri integraciji od $-\infty$ do $+\infty$, a t^- promjenu pri integraciji od $+\infty$ do $-\infty$.

Sljedeći korak, koji nam je možda i najbitniji u cijelom WKB pristupu izvodu Unruhove temperature i u kojem se možda najbolje očitavaju heurističnost i poluklasičnost ovakvog pristupa je taj da $\mathbf{T}$ poistovjećujemo s Maxwell-Boltzmannovom raspodjelom ($\mathbf{T} \sim e^{-\frac{E}{T}}$). Razlog tome je taj da u nekom smislu mi možemo tretirati ovaj problem na način da se desni Rindlerov klin **I** zbog procesa tuneliranja između klinova **I** i **II** termalizira te da je proces te termalizacije opisan upravo Maxwell-Boltzmannovom raspodjelom. Kao što je već ranije rečeno u računu pomoću kvantne teorije polja jedine raspodjele koje nam se mogu javiti su Bose-Einsteinova ili Fermi-Diracova. No bilo kako bilo uzet ćemo da vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &\sim e^{-\frac{1}{\hbar}\mathfrak{Im}(2\int p(x)\,dx - E\Delta t)} \ , \\ \mathbf{T} &\sim e^{-\frac{E}{T}} \ . \end{aligned} \tag{23}$$

Jednostavno se pokazuje da vrijedi [9]

$$S_0(x) = \int p(x)dx \ .$$

Tako da (23) daje

$$T = \frac{E\hbar}{\mathfrak{Im}\,(2S_0(x) - E\Delta t)} \ . \tag{24}$$

Sada iz (14), (19) i (20) dobivamo

$$-\left(\frac{a}{\kappa}\right)^2 \frac{E^2}{1+2ax'} + (1+2ax')(\partial_{x'} S_0(x'))^2 = 0$$

$$\implies S_0(x') = \frac{Ea}{\kappa}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx'}{1+2ax'} \ ; \ u = 1+2ax'$$

$$\implies dx' = \frac{du}{2a}$$

$$\implies S_0 = \frac{E}{2\kappa}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u} \ . \tag{25}$$

Naivno gledajući u (25) imamo posla s divergentnim integralom, no kako je sugerirano u radu [16] u ovom kontekstu tog problema se rješavamo pomoću Sokhotski-Plemeljovog teorema danog s (B1).

Nadalje, kako je pokazano u radu [17] termodinamički tretman možemo uključiti u cijeli ovaj kontekst jedino ako vrijedi $\mathfrak{Im}(S_0) > 0$, to nas automatski ograničava da na lijevoj strani jednadžbe (B1) moramo koristiti $x - i\epsilon$ u nazivniku.

Sada direktna primjena (B1) na (25) rezultira s

$$S_0 = i\frac{E\pi}{2\kappa} + \frac{E}{2\kappa} P.V. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u} =$$

$$= i\frac{E\pi}{2\kappa} + \frac{E}{2\kappa}\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{-\epsilon}\frac{du}{u} + \int_{\epsilon}^{+\infty}\frac{du}{u}\right) =$$

$$\stackrel{v=-u}{=} i\frac{E\pi}{2\kappa} + \frac{E}{2\kappa}\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\cancel{-\int_{\epsilon}^{+\infty}\frac{dv}{v}} + \cancel{\int_{\epsilon}^{+\infty}\frac{du}{u}}\right)$$

$$\implies S_0 = i\frac{E\pi}{2\kappa} \ . \tag{26}$$

Još nam preostaje izračunati $\Delta t'$. Za to ćemo provjeriti što se događa s faktorima ovisnim o x' iz (12) i (13) pri prelasku horizonta u $x' \leq -\frac{1}{2a} \to x' \geq -\frac{1}{2a}$, odnosno $x' \geq -\frac{1}{2a} \to x' \leq -\frac{1}{2a}$ smjeru, jer će nam to fiksirati i ponašanje t' pri prelasku horizonta. Uvodimo pokratu $\mathbf{Y}$=1+2ax', iz toga slijedi da kada vrijedi $x' \leq -\frac{1}{2a}$, onda je $\mathbf{Y} \leq 0$, a kada vrijedi $x' \geq -\frac{1}{2a}$, onda je $\mathbf{Y} \geq 0$.
Dakle, imamo

$$\underbrace{\sqrt{|\mathbf{Y}|} = \sqrt{-\mathbf{Y}}}_{\mathbf{Y}\leq 0} \longrightarrow \underbrace{\sqrt{(-)(-)(-\mathbf{Y})} = i\sqrt{\mathbf{Y}}}_{\mathbf{Y}\geq 0}$$

$$\underbrace{\sqrt{\mathbf{Y}}}_{\mathbf{Y}\geq 0} \longrightarrow \underbrace{\sqrt{(-)(-\mathbf{Y})} = i\sqrt{-\mathbf{Y}} = i\sqrt{|\mathbf{Y}|}}_{\mathbf{Y}\leq 0} \ ,$$

vidimo da se u oba slučaja generira faktor i ispred korijena. Ovo nam govori da ako želimo da transformacije (12) i (13) ostanu konzistentne, onda pri prelasku horizonta u oba smjera mora vrijediti

$$t' \longrightarrow t' - \frac{i\pi}{2\kappa} \ .$$

Zaključujemo $t'^{\pm} = -\frac{i\pi}{2\kappa}$, odnosno

$$\Delta t' = t'^{+} + t'^{-} = -\frac{i\pi}{\kappa} \ . \tag{27}$$

Iz (24), (26) i (27) dobivamo

$$T = \frac{\hbar\kappa}{2\pi} \ . \tag{28}$$

Rezultat (28) je upravo temperatura desnog Rindlerovog klina.

Sada ćemo koristeći (28) i Tolmanov zakon doći do izraza za Unruhovu temperaturu.

Tolmanov zakon [18] nam govori da ako imamo neki medij na temperaturi T (u našem kontekstu je preciznije reći da je to temperatura koju mjeri opažač akceleracije $a = \kappa$) i neku statičnu metriku (metrika je statična ako je stacionarna ($g_{00}(x) = g_{00}(\vec{x})$) te ako vrijedi $g_{0i} = 0$ i $g_{ij}(x) = g_{ij}(\vec{x})$ (gdje je $i,j = 1,2,3$)), onda je temperatura koju mjeri neki opažač ($T_{op}(\vec{x})$) jednaka

$$T_{op}(\vec{x}) = \frac{T}{\sqrt{-g_{00}(\vec{x})}} \ . \tag{29}$$

Sada ako shvatimo desni Rindlerov klin kao sustav na temperaturi T danoj s (28), onda možemo reći da će svaki opažač u tom sustavu (koji je karakteriziran svojom akceleracijom a) prema Tolmanovom zakonu (29) mjeriti temperaturu, koju zovemo Unruhovom (T_U), koja je uz g_{00} iz reprezentacije Rindlerove metrike dane izrazom (6), jer nam tu kroz $x = \frac{1}{a}$ akceleracija pojedinog ubrzanog opažača odmah ulazi u priču, jednaka

$$T_U = \frac{\hbar\kappa}{2\pi}\frac{1}{\kappa x} = \frac{\hbar\cancel{\kappa}}{2\pi}\frac{1}{\frac{\cancel{\kappa}}{a}} \implies T_U = \frac{\hbar a}{2\pi} \ . \tag{30}$$

Izraz (30) je dobro poznati rezultat za Unruhovu temperaturu $\Big($u SI sustavu jedinica on glasi $T_U = \frac{\hbar a}{2\pi c k_B}\Big)$.

Napomenimo još da se izvod Unruhove temperature može raditi i uz ostale vrste čestica, odnosno polja. U [10] je to napravljeno za bezmasene fermione spina $\frac{1}{2}$, rezultat je očekivano isti. U tom radu formalizirana je ovdje prikazana metoda tuneliranja. To je učinjeno na način da se konstruira matrica gustoće nakon rješavanja pripadajuće kovarijantne jednadžbe uz Rindlerove koordinate, koju nam određuje spin (za spin $\frac{1}{2}$ to je naravno Diracova jednadžba) te se onda pomoću reducirane matrice gustoće može doći do izraza (30). Također, kvalitetan pregled Unruhovog efekta može se pronaći u [19].

IV. KONSTRUKCIJA TERMALNOG SUSTAVA UZ PROIZVOLJNU METRIKU

U prethodnim poglavljima smo razvili sve pojmove i rezultate potrebne za konstrukciju termalnog sustava u ovom kontekstu. U toj konstrukciji nam važnu ulogu igra ubrzani opažač, jer sve potrebne veličine će biti mjerene iz njegovog sustava. Drugim riječima, reći ćemo da neki ubrzani opažač, akceleracije a mjeri potrebne veličine. Jer kao što ćemo vidjeti upravo će Unruhova temperatura koju smo izveli imati jako bitnu ulogu u kasnijim računima. Napomenimo da će nam nadalje najviše odgovarati da radimo sa reprezentacijom Rindlerove metrike danom sa (6) te da ćemo raditi s vremenskom i tri prostorne koordinate jer se svi već izvedeni rezultati uz vremensku i jednu prostornu koordinatu prirodno prevode u ovaj općenitiji slučaj.

Za početak opažamo da u (6) nemamo ovisnost o t, dakle takva metrika posjeduje Killingov vektor ∂_t. Sada možemo prevesti ovaj vektor u (X, T) koordinate koristeći (4) (uz $F(x) = x$)

$$\begin{aligned}\partial_t &= \frac{\partial T}{\partial t}\partial_T + \frac{\partial X}{\partial t}\partial_X + \frac{\partial Y}{\partial t}\partial_Y + \frac{\partial Z}{\partial t}\partial_Z = \\ &= \kappa\,(x\cosh(\kappa t)\partial_T + x\sinh(\kappa t)\partial_X) + 0 + 0 = \\ &= \kappa\,(X\partial_T + T\partial_X) \\ &\implies \partial_t = \kappa\,\underbrace{(X\partial_T + T\partial_X)}_{\equiv\chi^a}\ ,\end{aligned} \tag{31}$$

što odmah prepoznajemo kao generator potiska u X smjeru (kako smo već rekli, cijelo vrijeme bez smanjenja općenitosti radimo sa pretpostavkom da se ubrzanje događa upravo u tom smjeru), kao što je i očekivano.

Ako zahtijevamo da je norma ovog Killingovog vektorskog polja (označili smo ga s χ^a) jednaka 0, uz

$$\partial_T = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ ,\ \partial_X = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \implies \chi^a = \begin{pmatrix}X\\T\\0\\0\end{pmatrix}\ ,$$

onda imamo

$$\begin{aligned}\chi_a\chi^a &= g_{ab}\chi^a\chi^b = g_{00}\chi^0\chi^0 + g_{11}\chi^1\chi^1 = \\ &= -X^2 + T^2 = 0 \implies X = \pm T\ .\end{aligned} \tag{32}$$

Ako pogledamo na Sliku 1, onda vidimo da smo pomoću (32) pokazali da su pravci $X = \pm T$ s te slike upravo traženi Rindlerovi horizonti.

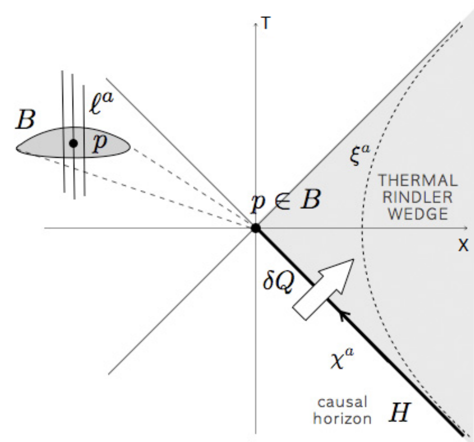
Dakle, uspjeli smo pokazati da su Rindlerovi horizonti svjetlosne hiperplohe (kako radimo u 4 dimenzije, onda su te hiperplohe po definiciji trodimenzionalne) generirane Killingovim vektorskim poljem χ^a. Također, primijetimo da χ^a iščezava za $(X, T) = (0, 0)$, odnosno iščezava na mjestu gdje se dane hiperplohe sijeku.

Još moramo navesti jedan bitan teorem, kojeg nećemo dokazivati (dokaz se može pronaći u radu [20]), a bit će nam važan za konstrukciju lokalnog horizonta:

Teorem. *Ako su generatori Killingovog horizonta geodetski kompletni u prošlost, uz neiščezavajuću površinsku gravitaciju, onda Killingov horizont sadrži (D-2)-dimenzionalnu (u našem slučaju dvodimenzionalnu) prostornoliku plohu B na kojoj Killingovo vektorsko polje χ^a iščezava. B nazivamo bifurkacijskom plohom.* [21]

Sada možemo konstruirati lokalni horizont, a zatim i termalni sustav uz proizvoljnu metriku.

Krećemo od odabira proizvoljne točke p u nekom proizvoljnom prostorvremenu. Promatrat ćemo okolinu te točke za koju vrijedi da je metrika približno jednaka Minkowski metrici η_{ab}, odnosno okolinu koja je približno ravna. U takvu ravnu okolinu točke p ćemo uvesti ubrzanog opažača akceleracije a, koji će kao što smo već rekli mjeriti Unruhovu temperaturu $T_U = \frac{\hbar a}{2\pi}$. Uvođenjem ubrzanog opažača smo automatski proizveli Rindlerove klinove, a time i Rindlerove horizonte, koji su kao što smo rekli svjetlosne hiperplohe generirane Killingovim vektorskim poljem χ^a. Naravno χ^a je sad približno Killingovo vektorsko polje jer kao što smo rekli okolina točke p je samo približno ravna. Sve ćemo raditi s desnim Rindlerovim klinom.



Slika 2. Prostornolika ploha B i desni Rindlerov klin uz označen lokalni horizont H. Slika preuzeta iz [22].

Sada u priču možemo uvesti ranije navedeni teorem. Naime, kako znamo da smo uvođenjem ubrzanog opažača u okolini točke p generirali dvije svjetlosne hiperplohe koje se sijeku, to nam sugerira da odaberemo neku prostornoliku dvodimenzionalnu plohu B koja sadrži p u kojoj će se se dvije navedene hiperplohe sjeći jer prema navedenom teoremu te hiperplohe sadržavaju takvu plohu na kojoj χ^a iščezava. Također, uvest ćemo kongruenciju (skup geodezika kroz neki dio prostorvremena koji se ne sijeku i istog su tipa) svjetlosnih geodezika l^a koja je okomita na B, time postižemo to da sada imamo dva skupa generatora svjetlosnih hiperploha, odnosno Rindlerovih horizonata, a to su l^a i χ^a. Još ćemo za vektorsko polje l^a uzeti da je afino parametrizirano, odnosno da zadovoljava geodetsku jednadžbu oblika

$$l^a l^b{}_{;a} = 0\ . \tag{33}$$

Ovakva konstrukcija nam omogućava da $X = -T$ Rindlerov horizont iz desnog Rindlerovog klina smatramo tzv. lokalnim horizontom H oko točke p, uz proizvoljnu metriku. Na Slici 2 je lokalni horizont označen podebljanom linijom.

Nadalje, imamo slobodu odabrati da je vektorsko polje l^a usmjereno u prošlost, a vektorsko polje χ^a u budućnost. To postižemo vezom

$$\chi^a = -\kappa\lambda l^a \ , \tag{34}$$

gdje je $\lambda < 0$. Ovo nam implicira da χ^a zadovoljava geodetsku jednadžbu koja nije afino parametrizirana. Naime,

$$\chi^a \chi^b{}_{;a} = -\kappa(l^b \chi^a \lambda_{;a} - \kappa\lambda^2 \underbrace{l^a l^b{}_{;a}}_{\overset{(33)}{=}0}) \ ,$$

također

$$l^a \lambda_{;a} = -1 \implies -\kappa\lambda l^a \lambda_{;a} = \kappa\lambda \implies \chi^a \lambda_{;a} = \kappa\lambda$$

pa dobivamo

$$\begin{aligned} &\chi^a \chi^b{}_{;a} = \kappa(-\kappa\lambda l^b) = \kappa\chi^b \\ &\implies \chi^a \chi^b{}_{;a} = \kappa\chi^b \ . \end{aligned} \tag{35}$$

Izraz (35) je upravo geodetska jednadžba za χ^a koja nije afino parametrizirana.

U [12] se nalazi jednostavni postupak kojim možemo povezati afini parametar iz jednadžbe (33) λ te neafini parametar iz jednadžbe (35) v, taj postupak nam daje vezu

$$\lambda = -e^{-\kappa v} \ , \tag{36}$$

a trivijalno se provjeri da (36) stvarno reproducira (34).

Nama će nadalje kroz rad parametri λ i v igrati ulogu "vremena" kojim karakteriziramo evoluciju našeg sustava. Vidjet ćemo da upravo izbor jednog, odnosno drugog parametra kao prirodnog "vremena" sustava odgovara dvama različitim termodinamičkim pristupima problemima koje ćemo kroz sljedeća poglavlja rješavati.

Sada smo u prilici definirati što nam je termalni sustav uz proizvoljnu metriku. To će biti desni Rindlerov klin, s lokalnim horizontom H kojeg smo uveli, u približno ravnoj okolini točke p u kojoj se giba neki ubrzani opažač koji mjeri Unruhovu temperaturu T_U povezanu s njegovom akceleracijom a. Temperaturu ovog termalnog sustava T dobivamo pomoću Tolmanovog zakona jer za približno ravnu okolinu točke p možemo koristiti reprezentaciju Rindlerove metrike danu sa (6). Pa imamo

$$\begin{aligned} T = T_U\sqrt{-g_{00}} &= \frac{\hbar \cancel{a}}{2\pi}\frac{\kappa}{\cancel{a}} = \frac{\hbar\kappa}{2\pi} \\ \implies T &= \frac{\hbar\kappa}{2\pi} \ . \end{aligned} \tag{37}$$

Ovaj rezultat možemo direktno povezati s (1a), naime ako κ iz (37) poistovjetimo s površinskom gravitacijom iz (1a), onda možemo reći da je naš termalni sustav upravo desni Rindlerov klin na temperaturi danoj s (37) koja jednaka temperaturi njegovog lokalnog horizonta H. Drugim riječima, temperatura termalnog sustava je jednaka temperaturi njegovog lokalnog horizonta H.

Sljedeća važna veličina će nam biti tok topline koju unosimo u termalni sustav te ga tako malo perturbiramo, za nju ćemo uzeti da je jednaka

$$\delta Q = \int_H T_{ab}\chi^a d\Sigma^b \ , \tag{38}$$

gdje je $d\Sigma^b$ volumni element svjetlosne hiperplohe po kojoj ćemo integrirati (odnosno volumni element lokalnog horizonta), a dan je s [23]

$$d\Sigma^b = l^b \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}} d\lambda \ ,$$

gdje je $\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}$ površinski element.

Na Slici 2 je naznačeno u kojem smjeru je tok topline kojom perturbiramo naš termalni sustav, dakle toplina ulazi preko lokalnog horizonta u sustav.

Još je bitno napomenuti da je 4-struja $j_b = T_{ab}\chi^a$ pomoću koje smo definirali tok topline (38) jedina kovarijantno očuvana 4-struja koju je moguće konstruirati kontrakcijom tenzora energije i impulsa T_{ab} s nekim vektorskim poljem, jer kako je pokazano u [24] zahtjev očuvanosti tako dobivene 4-struje nužno vodi na to da korišteno vektorsko polje mora biti Killingovo.

Za daljnje račune će nam biti potrebna afino parametrizirana Raychaudhurijeva (ili Landau-Raychaudhurijeva) jednadžba za svjetlosne geodezike koja je standardni udžbenički rezultat pa ju nećemo izvoditi (izvod je moguće pronaći npr. u [23]). Afino parametrizirana Raychaudhurijeva jednadžba za svjetlosne geodezike glasi

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \sigma^{ab}\sigma_{ab} + \omega^{ab}\omega_{ab} - R_{ab}l^a l^b \ ,$$

gdje je θ skalar ekspanzije, σ_{ab} tenzor smicanja, ω_{ab} tenzor rotacije, a R_{ab} Riccijev tenzor.

Kako je u [23] pokazano za kongruenciju svjetlosnih geodezika l^a okomitu na prostornoliku plohu B koju smo ranije uveli vrijedi $\omega_{ab} = 0$ jer l^a po konstrukciji leži u svjetlosnoj hiperplohi H, a također je i svjetlosnog tipa čime je nužno okomit sam na sebe. To znači da je l^a nužno okomit i na H što je prema [23] dovoljan uvjet za $\omega_{ab} = 0$. Stoga ćemo nadalje raditi s jednadžbom

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \sigma^{ab}\sigma_{ab} - R_{ab}l^a l^b \ . \tag{39}$$

Kao što vidimo u [23] vrijedi $\theta = l^a{}_{;a}$ te je uspostavljena relacija između θ i $\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}$

$$\theta = \frac{1}{\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}}\frac{d\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}}{d\lambda} \equiv \frac{1}{\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}}\,\dot{\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}} \ , \tag{40}$$

odsada nadalje nam točka iznad simbola označava derivaciju po λ.

Reparametrizacijom $\lambda \to v$ izraza (39) jednostavno se dolazi do relacija

$$\begin{aligned} \theta(v) &= -\kappa\lambda\theta(\lambda) \ , \\ \sigma_{ab}(v)\sigma^{ab}(v) &= (-\kappa\lambda)^2\sigma_{ab}(\lambda)\sigma^{ab}(\lambda) \ . \end{aligned} \tag{41}$$

Dakle, pomoću veličina λ, $\theta(\lambda)$, $\sigma_{ab}(\lambda)$ ili v, $\theta(v)$, $\sigma_{ab}(v)$ ćemo pratiti evoluciju svjetlosnih geodezika l^a koje smo uveli u priču.

Napomenimo da je izbor točke p posve proizvoljan, tako da se ove konstrukcije onda prirodno prenose na bilo koju točku promatranog prostorvremena.

Integracija kakva nam se javlja u (38) će se javljati dalje kroz račune, zato moramo objasniti što točno mislimo pod $\int_H$. Naime, mi ćemo integrirati po lokalnom horizontu H u blizini točke p, a formalno pod time podrazumijevamo

$$\int_H \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}} d\lambda(...) = \int d\lambda \int_{H(\lambda)} \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}(...) \ .$$

Dakle, prvo integriramo po površinskom elementu $\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}$, a zatim po parametru λ, koji odgovara generatoru lokalnog horizonta.

Za kraj samo napomenimo da izbor okoline oko točke p ne može biti proizvoljno malen jer bi nam pri takvom izboru akceleracija a i tok topline δQ divergirali, kako sugerira T. Jacobson u članku odakle ovakav pristup gravitaciji i dolazi [3]. On predlaže da stoga svu analizu provodimo u limesu omjera Unruhove temperature ($\sim a$) i toka topline, koji je konačan. Time analizu činimo lokalnom najviše što možemo.

V. TERMALNI SUSTAV U TERMODINAMIČKOJ RAVNOTEŽI

Nakon što smo konstruirali termalni sustav u prilici smo raditi termodinamičku analizu nad njim. Za početak uvodimo možda i najvažniju pretpostavku u ovakvom pristupu gravitaciji, a to je proporcionalnost između entropije S i površine A lokalnog horizonta

$$dS = \alpha \delta A \ , \tag{42}$$

uz $\alpha = konst.$, naravno to činimo motivirani s (1b). Ovdje smo u priču implicitno uveli jaki princip ekvivalencije (kroz $\alpha = konst.$) koji zahtijeva da je Newtonova konstanta G konstantna svugdje u svemiru (prostorvremenu) (za detalje pogledati [22, 25]). Dakle, ovdje nam α ima ulogu nekakve univerzalne gustoće entropije po površini lokalnog horizonta.

Cilj ovog poglavlja je tretirati naš termalni sustav u okvirima termodinamičke ravnoteže, to znači da kada u termalni sustav na temperaturi T danoj s (37) ubacimo toplinu δQ danu s (38) mora biti ispunjena tzv. Clausiusova relacija

$$\delta Q = T dS \ . \tag{43}$$

Dakle, imamo

$$\delta Q = T\alpha \underbrace{\delta A}_{=\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}} \ ,$$

što uz (40) postaje

$$\delta Q = T\alpha \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}} = T\alpha \int_H d\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}} = T\alpha \int_H \theta(\lambda) \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}} d\lambda \ .$$

Kako je sustav uvođenjem topline δQ malo perturbiran to nam sugerira da $\theta(\lambda)$ razvijemo po λ do prvog reda oko točke p, dobivamo

$$\theta(\lambda) \approx \theta(\lambda)_p + \lambda \frac{d\theta(\lambda)}{d\lambda}\bigg|_p \ .$$

Stoga, imamo uz korištenje (39)

$$\delta Q = T\alpha \int_H \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}} d\lambda \left(\theta(\lambda)_p + \lambda \left(-\frac{1}{2}\theta(\lambda)^2 - \sigma^{ab}(\lambda)\sigma_{ab}(\lambda) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - R_{ab} l^a l^b \right) \bigg|_p \right) \ .$$

S druge strane iz (34) i (38) imamo

$$\delta Q = \int_H T_{ab} \chi^a d\Sigma^b = \int_H T_{ab} (-\kappa\lambda) l^a l^b \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}} d\lambda \ .$$

Dakle, odmah vidimo da je $\delta Q = 0$ za $\lambda = 0$, što implicira $\theta(\lambda)_p = 0$. Stoga, imamo jednakost

$$\int_H \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}} d\lambda (-\kappa\lambda) T_{ab} l^a l^b =$$
$$= T\alpha \int_H \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}} d\lambda (-\lambda) (\sigma^{ab}(\lambda)\sigma_{ab}(\lambda) + R_{ab} l^a l^b) \bigg|_p \ .$$

Ovdje ćemo napraviti pretpostavku da vrijedi $\sigma_{ab}(\lambda)_p = 0$. Time uz (37) dolazimo do

$$\int_H \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}} d\lambda \kappa\lambda T_{ab} l^a l^b = \frac{\hbar\kappa}{2\pi} \alpha \int_H \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}} d\lambda \lambda R_{ab} l^a l^b \ ,$$

ova jednakost je dakle ispunjena ako za sve l^a, l^b vrijedi

$$\frac{2\pi}{\hbar\alpha} T_{ab} l^a l^b = R_{ab} l^a l^b \ . \tag{44}$$

Kako je l^a svjetlosnog tipa, odnosno kako vrijedi $l_a l^a = g_{ab} l^a l^b = 0$, iz (44) slijedi

$$\frac{2\pi}{\hbar\alpha} T_{ab} = R_{ab} + \boldsymbol{\Psi} g_{ab} \ . \tag{45}$$

Funkciju $\boldsymbol{\Psi}$ ćemo odrediti iz zakona sačuvanja energije

$$\nabla^b T_{ab} = 0 \tag{46}$$

i kontrahiranog Bianchijevog identiteta (čiji dokaz je moguće pronaći u [5])

$$\nabla^b R_{ab} = \frac{1}{2} \nabla_a R \ . \tag{47}$$

Dakle, imamo

$$
\begin{aligned}
&\frac{2\pi}{\hbar\alpha}T_{ab} = R_{ab} + \mathbf{\Psi} g_{ab} \Big/ \nabla_c \\
&\Longrightarrow \frac{2\pi}{\hbar\alpha}\nabla_c T_{ab} = \nabla_c R_{ab} + g_{ab}\nabla_c \mathbf{\Psi} + \mathbf{\Psi}\underbrace{\nabla_c g_{ab}}_{=0} \\
&\Longrightarrow \frac{2\pi}{\hbar\alpha} g_{ad} g_{be}\nabla_c T^{de} = g_{ak}\nabla_c R^{k}{}_{b} + g_{ab}\nabla_c \mathbf{\Psi} \Big/ g^{ac} \\
&\Longrightarrow \frac{2\pi}{\hbar\alpha}\delta^c_d g_{be}\nabla_c T^{de} = \delta^c_k \nabla_c R^{k}{}_{b} + \delta^c_b \nabla_c \mathbf{\Psi} \\
&\Longrightarrow \frac{2\pi}{\hbar\alpha} g_{be}\underbrace{\nabla_c T^{ce}}_{\overset{(46)}{=}0} = \underbrace{\nabla_c R^{c}{}_{b}}_{\overset{(47)}{=}\frac{1}{2}\nabla_b R} + \nabla_b \mathbf{\Psi} \\
&\Longrightarrow \nabla_b \mathbf{\Psi} = -\frac{1}{2}\nabla_b R \\
&\Longrightarrow \partial_b \mathbf{\Psi} = -\frac{1}{2}\partial_b R \quad \text{(jer su } \mathbf{\Psi} \text{ i } R \text{ skalari)} \\
&\qquad\qquad \Longrightarrow \mathbf{\Psi} = -\frac{R}{2} + \Lambda \ . \qquad (48)
\end{aligned}
$$

Uvrštavanjem (48) u (45) dobivamo

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R + \Lambda g_{ab} = \frac{2\pi}{\hbar\alpha}T_{ab} \ ,$$

što su upravo jednadžbe polja za OTR (D6) uz korespondenciju

$$\frac{2\pi}{\hbar\alpha} = 8\pi G \implies \alpha = \frac{1}{4\hbar G} \ , \qquad (49)$$

a to je upravo faktor proporcionalnosti iz (1b) u sustavu mjernih jedinica s kojim ovdje radimo.

Dakle, uz pretpostavku proporcionalnosti entropije i površine lokalnog horizonta te uz invokaciju jakog principa ekvivalencije koji nam je faktor te proporcionalnosti ograničio na neku konstantu te uz uvjet da je termalni sustav nakon unošenja topline δQ ostao u termodinamičkoj ravnoteži, odnosno da vrijedi $\delta Q = TdS$ smo došli do uvjeta $\theta(\lambda)_p = 0$. Nadalje, iz pretpostavke da tenzor smicanja $\sigma_{ab}(\lambda)_p$ kongruencije svjetlosnih geodezika u točki p iščezava i zakona očuvanja energije (46) smo uspjeli reproducirati jednadžbe polja za OTR (D6) uz uvjet da za univerzalnu gustoću entropije α vrijedi (49). No (49) je upravo ono što se dobiva iz analogije zakona mehanike crnih rupa sa zakonima termodinamike, dakle to je očekivan rezultat. To nas vodi do zaključka da smo uspjeli jednadžbe polja za OTR izvesti kao jednadžbe stanja, analogno jednadžbama stanja u termodinamici.

VI. TERMALNI SUSTAV U TERMODINAMIČKOJ NERAVNOTEŽI

Za početak primijetimo da smo u prethodnom poglavlju pretpostavku $\sigma_{ab}(\lambda)_p = 0$ uzeli jedino iz tog razloga da bismo reproducirali jednadžbe polja za OTR, odnosno ona nema nikakve druge fizikalne motivacije. Stoga se postavlja pitanje treba li nam takva pretpostavka uopće u našoj analizi. Kao što je prvi put primijećeno u [4] ovu pretpostavku možemo povezati s tim koji od parametara λ i v smatramo prirodnim "vremenom" kojim opisujemo evoluciju promatranog sustava. Naime, ako (41) napišemo koristeći (36), onda imamo

$$
\begin{aligned}
\theta(v) &= \kappa e^{-\kappa v}\theta(\lambda) \ , \\
\sigma_{ab}(v)\sigma^{ab}(v) &= (\kappa e^{-\kappa v})^2 \sigma_{ab}(\lambda)\sigma^{ab}(\lambda) \ .
\end{aligned} \qquad (50)
$$

Dakle, ako za "vrijeme" kojim pratimo evoluciju sustava uzmemo da je v, onda iz (50) vidimo da kada $\theta(\lambda)$ i $\sigma_{ab}(\lambda)$ ne iščezavaju, onda $\theta(v)$ i $\sigma_{ab}(v)$ trnu na način $\sim e^{-\kappa v}$. Dok u slučaju iščezavanja $\theta(\lambda)$ i $\sigma_{ab}(\lambda)$ imamo trnjenje $\sim e^{-\kappa v r}$, gdje je $r > 1$. Dakle, sustav se može naći u situaciji gdje je trnjenje u odnosu na "vrijeme" v dovoljno sporo da se sustav više ne nalazi u termodinamičkoj ravnoteži. Ovaj argument nam otvara mogućnost poopćavanja naše analize na slučajeve gdje $\theta(\lambda)_p$ i $\sigma_{ab}(\lambda)_p$ ne moraju nužno iščezavati. No cijena koju moramo platiti je ta da više ne možemo koristiti Clausiusovu relaciju (43), već moramo prijeći na slučaj $dS \geq \frac{\delta Q}{T}$. Standardni pristup neravnotežnoj termodinamici [26] rezultira tzv. zakonom ravnoteže entropije

$$dS = \frac{\delta Q}{T} + dS_i \ , \qquad (51)$$

gdje član $dS_i \geq 0$ odgovara entropiji nastaloj samo od unutarnje strukture promatranog sustava.

To znači da odsada nadalje u sve analize krećemo s $\theta(\lambda)_p \neq 0$ i $\sigma_{ab}(\lambda)_p \neq 0$ te uz relaciju (51).

Sada nam je potrebna digresija u relativističku disipativnu hidromehaniku jer će nam odatle trebati neke veličine koje ćemo moći direktno prepoznati u kasnijim analizama.

Za početak u slučaju idealnog fluida znamo da za tenzor energije i impulsa vrijedi

$$T^{ab} = (\rho + p)u^a u^b + p g^{ab} \ , \qquad (52)$$

gdje je ρ volumna gustoća energije, p tlak, a u^a 4-brzina elementa fluida. Također, uzeli smo da je kemijski potencijal jednak 0, odnosno da nema promjene broja čestica te da nemamo prisustvo nikakvih naboja u fluidu.

Hidromehanika je po svojoj prirodi efektivni model za opis interagirajućeg mnogočestičnog sustava koji se nalazi u približnoj ravnoteži. Glavna pretpostavka hidromehanike je ta da je karakteristična skala kojom opisujemo fluid puno veća od srednjeg slobodnog puta vezanog uz same čestice koje tvore fluid [27, 28]. Time postižemo to da možemo koristiti već dobro poznate jednadžbe termodinamike jer je skala na kojoj termodinamičke varijable variraju puno veća od srednjeg slobodnog puta.

Stoga, možemo na (52) dodati malu smetnju Π^{ab}. Smetnju Π^{ab} ćemo ograničiti na ovisnost o prvim derivacijama 4-brzine u^a te ćemo na nju nametnuti tzv. Landauovo baždarenje [29] $\Pi^{ab}u_b = 0$ (koje možemo napraviti jer je sve što je potrebno za njega određeni potisak nad u^a). Smetnja Π^{ab} uvedena na ovakav način koja ostavlja T^{ab} simetričnim te zadovoljava Landauovo baždarenje ima oblik [27]

$$\Pi^{ab} = -2\eta\sigma^{ab} - \zeta\theta h^{ab} \ , \tag{53}$$

gdje su η i ζ fenomenološki parametri koji odgovaraju viskoznosti smicanja, odnosno volumnoj viskoznosti te je $\theta = u^a{}_{;a}$. Dok za σ^{ab} i h^{ab} imamo

$$\sigma^{ab} = \frac{1}{2}(u^a{}_{;c}h^{cb} + u^b{}_{;c}h^{ca}) - \frac{\theta}{3}h^{ab} \ , \tag{54}$$

$$h^{ab} = g^{ab} + u^a u^b \ , \tag{55}$$

iz (55) odmah slijedi $h^{ab}h_{ab} = 3$.
Iz normalizacije 4-brzine u^a imamo

$$\begin{aligned} &u^a u_a = -1 \implies u^a u_{a;b} + u_a u^a{}_{;b} = 0 \\ &\implies 2u_a u^a{}_{;b} = 0 \implies u_a u^a{}_{;b} = 0 \implies u^a u_{a;b} = 0 \ . \end{aligned} \tag{56}$$

Nadalje, definiramo 4-struju j_s^a volumne gustoće entropije s

$$j_s^a = s u^a \ . \tag{57}$$

Iz termodinamike znamo da vrijedi tzv. Eulerova relacija (C2)

$$\rho + p = Ts \ .$$

Landauovo baždarenje nam daje

$$\begin{aligned} 0 &= \Pi^{ab}u_b = u_b(T^{ab} - \rho u^a u^b - p u^a u^b - p g^{ab}) = \\ &= u_b T^{ab} + \rho u^a + \cancel{pu^a} - \cancel{pu^a} \\ &\implies u_b T^{ab} = -\rho u^a \ . \end{aligned} \tag{58}$$

Sada možemo izračunati divergenciju od j_s^a:

$$\begin{aligned} \nabla_a j_s^a &= \nabla_a(s u^a) \overset{(C2)}{=} \nabla_a\left(\frac{\rho + p}{T}u^a\right) = \\ &= \frac{1}{T}\nabla_a(\rho u^a + p u^a) \overset{(58)}{=} \frac{1}{T}\nabla_a(-u_b T^{ab} + p u^a) = \\ &= -\frac{1}{T}T^{ab}\nabla_a u_b - \frac{1}{T}u_b \underbrace{\nabla_a T^{ab}}_{\overset{(46)}{=}0} + \frac{p}{T}\nabla_a u^a = \\ &= -\frac{1}{T}((\rho + p)u^a \underbrace{u^b \nabla_a u_b}_{\overset{(56)}{=}0} + p g^{ab}\nabla_a u_b + \Pi^{ab}\nabla_a u_b) + \\ &\quad + \frac{p}{T}\nabla_a u^a = -\cancel{\frac{p}{T}\nabla_a u^a} - \frac{1}{T}\Pi^{ab}\nabla_a u_b + \cancel{\frac{p}{T}\nabla_a u^a} \\ &\implies \nabla_a j_s^a = -\frac{1}{T}\Pi^{ab}u_{b;a} \ . \end{aligned} \tag{59}$$

Iz (59) je očito da je za slučaj idealnog fluida (52) 4-struja j_s^a očuvana, dok u disipativnom slučaju to nije tako. Primijetimo da (54) možemo napisati kao

$$\sigma^{ab} = \frac{1}{2}(u^{a;b} + u^{b;a} + u^a u^c u^b{}_{;c} + u^b u^c u^a{}_{;c}) - \frac{\theta}{3}h^{ab} \ .$$

Sada možemo izračunati

$$\begin{aligned} \sigma^{ab}\sigma_{ab} &= \left(\frac{1}{2}(u^{a;b} + u^{b;a} + u^a u^c u^b{}_{;c} + u^b u^c u^a{}_{;c}) - \frac{\theta}{3}h^{ab}\right) \\ &\quad \left(\frac{1}{2}(u_{a;b} + u_{b;a} + u_a u_d u_b{}^{;d} + u_b u_d u_a{}^{;d}) - \frac{\theta}{3}h_{ab}\right) \\ &= \frac{1}{4}(u^{a;b}u_{a;b} + u^{a;b}u_{b;a} + \underbrace{u_a u^{a;b}}_{\overset{(56)}{=}0} u_d u_b{}^{;d} + \\ &\quad + u^{a;b}u_b u_d u_a{}^{;d} + u^{b;a}u_{a;b} + u^{b;a}u_{b;a} + \\ &\quad + u^{b;a}u_a u_d u_b{}^{;d} + \underbrace{u_b u^{b;a}}_{\overset{(56)}{=}0} u_d u_a{}^{;d} + \\ &\quad + \underbrace{u^a u_{a;b}}_{\overset{(56)}{=}0} u^c u^b{}_{;c} + u^a u^c u^b{}_{;c}u_{b;a} - \\ &\quad - u_d u^c u^b{}_{;c}u_b{}^{;d} + \underbrace{u^a u_a{}^{;d}}_{\overset{(56)}{=}0} u^c u^b{}_{;c}u_b u_d + \\ &\quad + u^b u^c u^a{}_{;c}u_{a;b} + \underbrace{u^b u_{b;a}}_{\overset{(56)}{=}0} u^c u^a{}_{;c} + \\ &\quad + u^b u^c u^a{}_{;c}u_a u_d u_b{}^{;d} - u^c u^a{}_{;c}u_d u_a{}^{;d}) - \\ &\quad - \frac{\theta}{6}(\underbrace{u^a{}_{;a}}_{=\theta} + u_b \underbrace{u_a u^{a;b}}_{\overset{(56)}{=}0} + \underbrace{u^b{}_{;b}}_{=\theta} + u_a \underbrace{u_b u^{b;a}}_{\overset{(56)}{=}0} + \\ &\quad + u^c \underbrace{u_b u^b{}_{;c}}_{\overset{(56)}{=}0} - u^c \underbrace{u_b u^b{}_{;c}}_{\overset{(56)}{=}0} + u^c \underbrace{u_a u^a{}_{;c}}_{\overset{(56)}{=}0} - \\ &\quad - u^c \underbrace{u_a u^a{}_{;c}}_{\overset{(56)}{=}0} + \underbrace{u_a{}^{;a}}_{=\theta} + u^b \underbrace{u^a u_{a;b}}_{\overset{(56)}{=}0} + \underbrace{u_b{}^{;b}}_{=\theta} + \\ &\quad + u^a \underbrace{u^b u_{b;a}}_{\overset{(56)}{=}0} + u_d \underbrace{u_a u^{a;d}}_{\overset{(56)}{=}0} - u_d \underbrace{u^b u_b{}^{;d}}_{\overset{(56)}{=}0} + \\ &\quad + u_d \underbrace{u_b u^{b;d}}_{\overset{(56)}{=}0} - u_d \underbrace{u^a u_a{}^{;d}}_{\overset{(56)}{=}0}) + \frac{\theta^2}{3} \\ &= \dots = \\ &= -\frac{\theta^2}{3} + \frac{1}{2}(u^{a;b}u_{a;b} + u^{a;b}u_{b;a} + u_a u_c u^{b;c}u_b{}^{;a}) \ . \end{aligned} \tag{60}$$

Ako sada raspišemo (59)

$$\begin{aligned} \nabla_a j_s^a &= -\frac{1}{T}\Pi^{ab}u_{b;a} = \frac{1}{T}(\zeta\theta h^{ab} + 2\eta\sigma^{ab})u_{b;a} = \\ &= \frac{1}{T}\left(\zeta\theta(g^{ab} + u^a u^b) + 2\eta\left(\frac{1}{2}(u^{a;b} + u^{b;a} + \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + u^a u^c u^b{}_{;c} + u^b u^c u^a{}_{;c})\right) - \frac{\theta}{3}h^{ab}\right) u_{b;a} = \\ &= \dots = \end{aligned}$$

$$= \frac{\zeta\theta^2}{T} + \frac{2\eta}{T}\left(\frac{1}{2}(u^{a;b}u_{a;b} + u^{a;b}u_{b;a} + u_a u_c u^{b;c}u_b{}^{;a}) - \right.$$
$$\left. - \frac{\theta^2}{3}\right) ,$$

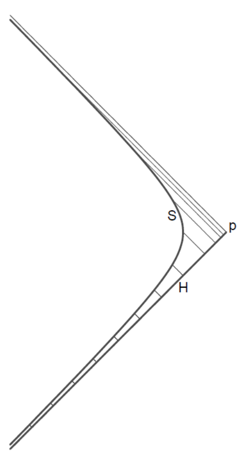
onda usporedbom sa (60) dobivamo

$$\nabla_a(su^a) = \frac{2\eta}{T}\sigma^{ab}\sigma_{ab} + \frac{\zeta}{T}\theta^2 . \tag{61}$$

Jednadžbu (61) ćemo integrirati po svjetlosnoj hiperplohi za čiju normalu n^a je zadovoljeno $u^a n_a = 1$

$$\int \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}} dv \nabla_a(su^a) \overset{\text{Stokes}}{=} \int \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}} s \underbrace{u^a n_a}_{=1} =$$
$$= \underbrace{\int s\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}}_{\equiv dS_{vis}} = \int \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}} dv \left(\frac{2\eta}{T}\sigma^{ab}\sigma_{ab} + \frac{\zeta}{T}\theta^2\right)$$
$$\Longrightarrow dS_{vis} = \int \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}} dv \left(\frac{2\eta}{T}\sigma^{ab}\sigma_{ab} + \frac{\zeta}{T}\theta^2\right) . \tag{62}$$

Za kraj ove digresije napomenimo da ćemo mi dalje kroz rad (62) koristiti u kontekstu u kojemu je lokalni horizont H neki analogon hidromehaničkog sustava. Kako je H ovdje svjetlosna hiperploha, onda sam izvod za (62) ovdje prikazan pati od tehničke poteškoće jer na H ne bismo mogli zbog svjetlosnosti koristiti da je u^a normalizirana na -1. Taj tehnički problem riješen je u [28] tzv. metodom rastezanja horizonta. U toj metodi se svjetlosni horizont zamjenjuje vremenskom hiperplohom, koja se u dobro definiranom limesu svodi na početnu svjetlosnu hiperplohu, odnosno horizont (Slika 3). Naravno tim pristupom se opet dolazi do (62).



Slika 3. Skica tzv. metode rastezanja horizonta. Slika preuzeta iz [28].

Nakon prethodne digresije vraćamo se na problem iz prethodnog poglavlja kojeg ćemo sad tretirati uz početne pretpostavke $\theta(\lambda)_p \neq 0$ i $\sigma_{ab}(\lambda)_p \neq 0$.

Dakle, isto kao u prethodnom poglavlju uzimamo da vrijedi jaki princip ekvivalencije te radimo razvoj $\theta(\lambda)$ oko p do prvog reda u λ što nas opet vodi do

$$dS = \alpha \int_H \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}} d\lambda \left(\theta(\lambda)_p + \lambda\left(-\frac{1}{2}\theta(\lambda)^2 - \sigma^{ab}(\lambda)\sigma_{ab}(\lambda) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - R_{ab}l^a l^b\right)\Big|_p\right) ,$$

ako članove u ovoj jednadžbi grupiramo na način

$$dS = \alpha \int_H \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}} d\lambda \left(\left(\theta(\lambda) - \lambda R_{ab}l^a l^b\right)\Big|_p - \right.$$
$$\left. - \lambda\left(\frac{1}{2}\theta(\lambda)^2 + \sigma^{ab}(\lambda)\sigma_{ab}(\lambda)\right)\Big|_p\right) , \tag{63}$$

onda možemo prema dekompoziciji (51) napraviti korespondenciju

$$\begin{aligned} \frac{\delta Q}{T} &= -\frac{\kappa}{T}\int_H \lambda T_{ab}l^a l^b \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}} d\lambda = \\ &= \alpha \int_H \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}} d\lambda \left(\theta(\lambda) - \lambda R_{ab}l^a l^b\right)\Big|_p \end{aligned} \tag{64}$$

$$dS_i = -\alpha \int_H \lambda \left(\frac{1}{2}\theta(\lambda)^2 + \sigma^{ab}(\lambda)\sigma_{ab}(\lambda)\right)\Big|_p \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}} d\lambda . \tag{65}$$

Iz (64) dolazimo do istog zaključka kao u prethodnom poglavlju, odnosno $\theta(\lambda)_p = 0$ te nas to opet vodi do jednadžbi polja za OTR.

Ono što je novo u odnosu na prethodno poglavlje je (65), što uz $\theta(\lambda)_p = 0$ postaje

$$dS_i = -\alpha \int_H \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}} d\lambda \lambda \sigma^{ab}(\lambda)\sigma_{ab}(\lambda)\Big|_p . \tag{66}$$

Ako (66) prevedemo na integraciju po v, imamo

$$dS_i = \frac{\alpha}{\kappa}\int_H \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}} dv \sigma^{ab}(v)\sigma_{ab}(v)\Big|_p . \tag{67}$$

Prirodno nam se nameće da (67) poistovjetimo sa (62), također uz $\theta(\lambda)_p = 0$, što nas vodi na sljedeću korespondenciju

$$\begin{aligned} \frac{2\eta}{T} = \frac{\alpha}{\kappa} &\Longrightarrow \eta = \frac{T\alpha}{2\kappa} = \frac{\alpha}{2\kappa}\frac{\hbar\kappa}{2\pi} = \frac{\alpha\hbar}{4\pi} \\ &\Longrightarrow \frac{\eta}{\alpha} = \frac{\hbar}{4\pi} . \end{aligned} \tag{68}$$

Ovdje nam η ima ulogu nekakvog analogona viskoznosti smicanja našeg lokalnog horizonta H.

Rezultat (68) je upravo ono što se dobiva iz tzv. AdS/CFT korespondencije koja se javlja u kontekstu teorije struna [30]. Dakle, ovdje razvijenom metodom smo uz jednadžbe polja za OTR dobili još jedan poznati rezultat.

Također, korištenjem (37), (49) i (67) dobivamo

$$TdS_i = \frac{1}{8\pi G}\int_H \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}} dv \sigma^{ab}(v)\sigma_{ab}(v)\bigg|_p . \tag{69}$$

Jednakost (69) je poznati izraz za tzv. Hartle-Hawkingovo plimno zagrijavanje klasične crne rupe [31]. Dakle, ova metoda je polučila još jedan poznati rezultat.

VII. $f(R)$ SLUČAJ

Sada smo u prilici testirati ovdje razvijenu metodu na neku od općenitijih teorija gravitacije. Kako je u [22] argumentirano prijelaz na općenitiju teoriju gravitacije od OTR zahtijeva slabiji uvjet od jakog principa ekvivalencije. Taj uvjet je tzv. Einsteinov princip ekvivalencije koji dopušta to da Newtonova konstanta G varira u svemiru (prostorvremenu) (za detalje pogledati [22, 25]). Nama se to u ovom kontekstu očitava u tome da faktor proporcionalnosti entropije i površine lokalnog horizonta H više nije konstanta kao u prethodna dva poglavlja. Ovdje ćemo koristeći tu pretpostavku promatrati slučaj $f(R)$ gravitacije (akcija za $f(R)$ je dana s (D2)), gdje je $f(R)$ neka općenita glatka funkcija Riccijevog skalara R te ćemo pokušati ovdje razvijenom metodom doći do jednadžbi polja i ostalih veličina za ovu teoriju.

Za početak uvodimo pokratu $\mathcal{F}(R) = \frac{df(R)}{dR}$ (kroz ostatak poglavlja ćemo pisati $f = f(R)$ i $\mathcal{F} = \mathcal{F}(R)$). Napomenimo također da ćemo kroz ostatak ovog poglavlja koristiti OTR slučaj kao sinonim za $f = R - 2\Lambda$, odnosno za $\mathcal{F} = 1$ i $\dot{\mathcal{F}} = 0$ (zbog oblika akcije za OTR dane s (D1)).

Einsteinov princip ekvivalencije nam nalaže da dS za $f(R)$ slučaj pišemo kao

$$dS = \beta\mathcal{F}\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}} . \tag{70}$$

Vidimo da se u OTR slučaju (70) svodi na $dS = \beta\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}$, gdje je $\beta = konst.$ i zasad pretpostavljamo $\beta \neq \alpha$ (no očito je da očekujemo da ćemo na kraju dobiti $\beta = \alpha$), što je već ranije korišten oblik.

Raspisivanjem (70) dobivamo

$$\frac{d(dS)}{d\lambda} = \beta(\dot{\mathcal{F}}\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}} + \mathcal{F}\underbrace{\dot{\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}}}_{\overset{(40)}{=}\theta(\lambda)\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}}) = \beta\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}(\dot{\mathcal{F}} + \mathcal{F}\theta(\lambda))$$

$$\Longrightarrow d(dS) = \beta\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}} d\lambda(\dot{\mathcal{F}} + \mathcal{F}\theta(\lambda)) \Big/ \int_H$$

$$\Longrightarrow dS = \beta\int_H \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}} d\lambda(\dot{\mathcal{F}} + \mathcal{F}\theta(\lambda)) . \tag{71}$$

Primijetimo da (71) u OTR slučaju poprima očekivani oblik $dS = \beta\int_H \theta(\lambda)\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}} d\lambda$.

Uvodimo pokratu $\widetilde{\theta}(\lambda) = \dot{\mathcal{F}} + \mathcal{F}\theta(\lambda)$. Ponukani analizama iz prethodnih poglavlja nametnut ćemo uvjet $\widetilde{\theta}(\lambda)_p = 0$. Dakle, posljedično kroz ovo poglavlje će vrijediti

$$\theta(\lambda)_p = -\frac{\dot{\mathcal{F}}}{\mathcal{F}} , \tag{72}$$

vidimo da se u OTR slučaju (72) očekivano svodi na $\theta(\lambda)_p = 0$.

Razvoj $\widetilde{\theta}(\lambda)$ oko p do prvog reda u λ daje

$$\widetilde{\theta}(\lambda) \approx \widetilde{\theta}(\lambda)_p + \lambda\frac{d\widetilde{\theta}(\lambda)}{d\lambda}\bigg|_p .$$

Za $\frac{d\widetilde{\theta}(\lambda)}{d\lambda}\Big|_p$ imamo

$$\frac{d\widetilde{\theta}(\lambda)}{d\lambda}\bigg|_p = \dot{\widetilde{\theta}}(\lambda)_p = (\ddot{\mathcal{F}} + \underbrace{\theta(\lambda)\dot{\mathcal{F}}}_{\overset{(72)}{=} -\frac{\dot{\mathcal{F}}^2}{\mathcal{F}}} + \mathcal{F}\dot{\theta}(\lambda))\bigg|_p ,$$

dok za $\ddot{\mathcal{F}}$ vrijedi

$$\ddot{\mathcal{F}} = l^a\nabla_a(l^b\nabla_b\mathcal{F}) = l^a l^b\nabla_a\nabla_b\mathcal{F} + \underbrace{l^a\nabla_a l^b}_{\overset{(33)}{=}0}\nabla_b\mathcal{F}$$

$$\Longrightarrow \ddot{\mathcal{F}} = l^a l^b\mathcal{F}_{;ab} .$$

Time za $\widetilde{\theta}(\lambda)$ dobivamo

$$\widetilde{\theta}(\lambda) = \underbrace{\widetilde{\theta}(\lambda)_p}_{=0} + \lambda\left(l^a l^b\mathcal{F}_{;ab} - \frac{\dot{\mathcal{F}}^2}{\mathcal{F}} + \mathcal{F}\dot{\theta}(\lambda)\right)\bigg|_p ,$$

što koristeći (39) postaje

$$\begin{aligned}\widetilde{\theta}(\lambda) =& \lambda\Bigg(-\mathcal{F}\left(\frac{1}{2}\theta(\lambda)^2 + \sigma^{ab}(\lambda)\sigma_{ab}(\lambda) + R_{ab}l^a l^b\right) + \\ &+ l^a l^b\mathcal{F}_{;ab} - \underbrace{\frac{\dot{\mathcal{F}}^2}{\mathcal{F}}}_{\overset{(72)}{=}\mathcal{F}\theta(\lambda)^2}\Bigg)\Bigg|_p = \\ =& \lambda\Bigg((\mathcal{F}_{;ab} - \mathcal{F}R_{ab})l^a l^b - \frac{3}{2}\mathcal{F}\theta(\lambda)^2 - \\ &- \mathcal{F}\sigma^{ab}(\lambda)\sigma_{ab}(\lambda)\Bigg)\Bigg|_p .\end{aligned}$$

Dakle, sada za (71) imamo

$$\begin{aligned}dS =& \beta\int_H \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}} d\lambda\lambda\Bigg((\mathcal{F}_{;ab} - \mathcal{F}R_{ab})l^a l^b - \frac{3}{2}\mathcal{F}\theta(\lambda)^2 - \\ &- \mathcal{F}\sigma^{ab}(\lambda)\sigma_{ab}(\lambda)\Bigg)\Bigg|_p .\end{aligned} \tag{73}$$

Uspoređujući (51), (62) i (73) se sada odmah nameće korespondencija

$$\frac{\delta Q}{T} = \beta\int_H \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}} d\lambda\lambda(\mathcal{F}_{;ab} - \mathcal{F}R_{ab})l^a l^b , \tag{74}$$

$$dS_i = -\beta\int_H \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}} d\lambda\lambda\mathcal{F}\left(\frac{3}{2}\theta(\lambda)^2 + \sigma^{ab}(\lambda)\sigma_{ab}(\lambda)\right)\bigg|_p . \tag{75}$$

Iz (34), (37), (38) i (74) dobivamo

$$-\kappa\int_H \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}} d\lambda\lambda T_{ab}l^a l^b = \frac{\hbar\kappa}{2\pi}\beta\int_H \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}} d\lambda\lambda(\mathcal{F}_{;ab} - \mathcal{F}R_{ab})l^a l^b \ ,$$

ova jednakost je ispunjena ako za sve l^a, l^b vrijedi

$$\frac{2\pi}{\hbar\beta}T_{ab}l^a l^b = (\mathcal{F}R_{ab} - \mathcal{F}_{;ab})l^a l^b \ . \tag{76}$$

Kako je l^a svjetlosnog tipa, iz (76) slijedi

$$\frac{2\pi}{\hbar\beta}T_{ab} = \mathcal{F}R_{ab} - \mathcal{F}_{;ab} + \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}g_{ab} \ . \tag{77}$$

Funkciju $\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}$ ćemo kao i ranije odrediti korištenjem (46) i (47). Također, primijetimo da vrijedi $\mathcal{F}_{;ab} = \mathcal{F}_{;ba}$ jer je $\mathcal{F}$ skalarna funkcija.
Dakle, imamo

$$\begin{aligned}
&\frac{2\pi}{\hbar\beta}T_{ab} = \mathcal{F}R_{ab} - \mathcal{F}_{;ba} + \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}g_{ab} \Big/ \nabla_c \\
\implies& \frac{2\pi}{\hbar\beta}\nabla_c T_{ab} = R_{ab}\nabla_c\mathcal{F} + \mathcal{F}\nabla_c R_{ab} - \nabla_c\mathcal{F}_{;ba} + \\
&\qquad + g_{ab}\nabla_c\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} + \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}\underbrace{\nabla_c g_{ab}}_{=0} \\
\implies& \frac{2\pi}{\hbar\beta}g_{ad}g_{be}\nabla_c T^{de} = R_{ab}\nabla_c\mathcal{F} + \mathcal{F}g_{ak}\nabla_c R^k{}_b - \\
&\qquad - \nabla_c\mathcal{F}_{;ba} + g_{ab}\nabla_c\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} \Big/ g^{ac} \\
\implies& \frac{2\pi}{\hbar\beta}g_{be}\delta^c_d\nabla_c T^{de} = R_{ab}\nabla^a\mathcal{F} + \mathcal{F}\delta^c_k\nabla_c R^k{}_b - \\
&\qquad - \nabla^a\mathcal{F}_{;ba} + \delta^c_b\nabla_c\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} \\
\implies& \frac{2\pi}{\hbar\beta}\underbrace{\nabla_c T^{ce}}_{\overset{(46)}{=}0} = R_{ab}\nabla^a\mathcal{F} + \mathcal{F}\underbrace{\nabla_c R^c{}_b}_{\overset{c\leftrightarrow a}{=}\nabla^a R_{ab}} - \\
&\qquad - \nabla^a\mathcal{F}_{;ba} + \underbrace{\nabla_b\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}}_{=\partial_b\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}} \ ,
\end{aligned}$$

iskoristili smo činjenicu da je $\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}$ skalarna funkcija.
Dobili smo

$$\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_{,b} = -(\mathcal{F}R_{ab} - \mathcal{F}_{;ba})^{;a} \ . \tag{78}$$

Iskoristit ćemo još jedan rezultat diferencijalne geometrije [5]

$$(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)z^c = R_{ab}{}^c{}_d z^d \ , \tag{79}$$

gdje je R_{abcd} Riemannov tenzor.

Koristeći (79) $(\mathcal{F}R_{ab})^{;a}$ možemo zapisati kao

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}R_{ab})^{;a} &= \underbrace{R_{ab}}_{=R_{akb}{}^k}\mathcal{F}^{;a} + \mathcal{F}\underbrace{\nabla^a R_{ab}}_{\overset{(47)}{=}\frac{1}{2}R_{,b}} \\
&= \frac{\mathcal{F}}{2}R_{,b} + R_b{}^k{}_{ak}\mathcal{F}^{;a} = \\
&= \frac{\mathcal{F}}{2}R_{,b} - R_b{}^k{}_{ka}\mathcal{F}^{;a} = \\
&= \frac{\mathcal{F}}{2}R_{,b} - R_{bk}{}^k{}_a\mathcal{F}^{;a} = \\
&\overset{(79)}{=} \underbrace{\frac{\mathcal{F}}{2}R_{,b}}_{=\frac{1}{2}f_{,b}} - \nabla_b\underbrace{\nabla_k\nabla^k\mathcal{F}}_{=\Box\mathcal{F}} + \underbrace{\nabla_k\nabla_b\nabla^k\mathcal{F}}_{\overset{k\leftrightarrow a}{=}\nabla^a\nabla_b\nabla_a\mathcal{F}} \ ,
\end{aligned}$$

ovdje smo na više mjesta koristili razne (anti)simetrije Riemannovog tenzora te činjenicu da je R skalar.

Dakle, imamo

$$\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_{,b} = -\left(\frac{f_{,b}}{2} - \nabla_b\Box\mathcal{F} + \cancel{\nabla^a\nabla_b\nabla_a\mathcal{F}} - \cancel{\nabla^a\nabla_b\nabla_a\mathcal{F}}\right) \ ,$$

iskoristit ćemo činjenicu da je d'Alembertijan skalarne funkcije skalar, odnosno da vrijedi $\nabla_b\Box\mathcal{F} = \partial_b\Box\mathcal{F}$.
Time dolazimo do

$$\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_{,b} &= -\left(\frac{f_{,b}}{2} - \partial_b\Box\mathcal{F}\right) = \\
&= \left(\Box\mathcal{F} - \frac{f}{2}\right)_{,b} \\
\implies& \widetilde{\boldsymbol{\Psi}} = \Box\mathcal{F} - \frac{f}{2} \ .
\end{aligned} \tag{80}$$

Uvrštavanjem (80) u (77) dobivamo

$$\mathcal{F}R_{ab} - \mathcal{F}_{;ab} + \left(\Box\mathcal{F} - \frac{f}{2}\right)g_{ab} = \frac{2\pi}{\hbar\beta}T_{ab} \ ,$$

što su upravo jednadžbe polja za $f(R)$ teoriju gravitacije (D7) uz korespondenciju

$$\frac{2\pi}{\hbar\beta} = 8\pi G \implies \beta = \frac{1}{4\hbar G} \ . \tag{81}$$

Dakle, ovdje razvijena metoda nam je polučila jednadžbe polja i za općenitiju, $f(R)$, teoriju gravitacije od OTR te smo kao što je i očekivano pokazali da je u tom slučaju $\beta = \alpha$ ((49) i (81)).

Još nam preostaje analizirati jednadžbu (75). Ako ju prevedemo u integraciju po v, imamo

$$dS_i = \frac{\beta}{\kappa}\int_H \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}} dv\mathcal{F}\left(\frac{3}{2}\theta(v)^2 + \sigma^{ab}(v)\sigma_{ab}(v)\right)\Bigg|_p \ . \tag{82}$$

Usporedba (82) sa (62) nam uz $\beta = \alpha$ izravno daje

$$\frac{\eta}{\alpha} = \frac{\hbar\mathcal{F}}{4\pi} \ , \tag{83}$$

$$\frac{\zeta}{\alpha} = \frac{3\hbar\mathcal{F}}{4\pi} \ . \tag{84}$$

Izraz (83) prepoznajemo kao očekivano poopćenje izraza (68) u OTR slučaju. Dok s druge strane (84) ne možemo usporediti s OTR slučajem jer u tom slučaju nismo mogli izvesti analogon ove jednadžbe zbog $\theta(\lambda)_p = 0$. Napomenimo još da je u [22] dana interpretacija

$$\frac{\beta}{\kappa}\int_H \widetilde{\epsilon} dv \frac{3}{2}\mathcal{F}\theta(v)_p^2$$

doprinosa iz (82), no ovdje nećemo ulaziti u to.

Dakle, u ovom poglavlju smo ovdje razvijenom metodom uspjeli izvesti jednadžbe polja za $f(R)$ teoriju gravitacije te smo pronašli potrebne analogne veličine onima iz OTR slučaja.

VIII. RASPRAVA I ZAKLJUČAK

Ono čega se nismo dotakli u ranijim poglavljima je to odakle dolazi entropija koju smo koristili. Kako je sugerirano u [3, 4, 22] porijeklo ove entropije su korelacije u fluktuacijama vakuuma izvan i unutar promatranog desnog Rindlerovog klina u blizini lokalnog horizonta H. Ovakva entropija bi divergirala u režimima jako visokih energija, odnosno jako malih udaljenosti (UV divergencija). Stoga se, kako je standardno u kvantnoj teoriji polja, uvodi nekakva regularizacija da bi se izbjegla divergencija. Regularizaciju postižemo uvođenjem UV regulatora, odnosno nekakve prostorne skale l_{UV}. Lako se uvjeravamo da za ranije dobiveni faktor proporcionalnosti α vrijedi $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = 2\sqrt{\hbar G}$. S druge strane, tzv. Planckova udaljenost u ovdje odabranom sustavu mjernih jedinica glasi $l_P = \sqrt{\hbar G}$, odnosno možemo tvrditi $l_{UV} \sim l_P$. Dakle, skala l_{UV} je približno Planckova udaljenost, a karakteristični radijus zakrivljenosti prostorvremena je gotovo sigurno veći od te skale pa smo gotovo sigurni da nećemo imati probleme s divergencijom entropije. Nećemo se dalje upuštati u raspravu o porijeklu navedene entropije jer je to tema sama za sebe. No uspjeli smo motivirati mogućnost korištenja ranije pretpostavke o proporcionalnosti entropije i površine lokalnog horizonta H.

Nakon dobivenih rezultata možemo se pitati je li ovdje prikazana metoda jednostavno dobar računski alat ili možda ukazuje nešto dublje o strukturi prostorvremena.

Za početak ako pogledamo u [32], možemo naći tvrdnju koja je L. Boltzmanna navela na atomsku teoriju, odnosno na tvrdnju da materijali posjeduju mikrostrukturu. Naime, toplinu možemo smatrati veličinom u koju su pospremljene informacije o gibanju konstituenata nekog materijala, kako toplina implicira postojanje temperature, onda možemo zaključiti da samo postojanje temperature implicira postojanje mikrostrukture nekog materijala.

Sada je pitanje daje li nam ovdje prikazan termodinamički pristup gravitaciji, također zbog postojanja temperature koja nam se javila pri konstrukciji termalnog sustava, neke informacije o mikrostrukturi prostorvremena koje ne mogu biti sadržane samo u jednadžbama polja.

Najčvršća sugestija za ovako nešto nam je potreba uvođenja tzv. zakona ravnoteže entropije (51) kojim smo doprinose entropiji podijelili na standardni ravnotežni dio i na neravnotežni dio koji dolazi jedino od unutarnje strukture sustava kojeg promatramo. Zatim smo uspjeli te neravnotežne doprinose entropiji povezati s hidromehaničkim veličinama, viskoznošću smicanja te volumnom viskoznošću tretirajući lokalni horizont H kao neki analogon hidromehaničkog sustava.

Autori u [22] predlažu da navedene doprinose možemo povezati sa postojanjem potencijalnih stupnjeva slobode gravitacije koji ne mogu biti obuhvaćeni jednadžbama polja, odnosno predlažu da prostorvrijeme posjeduje nekakvu strukturu koju ne možemo iščitati iz jednadžbi polja. Naime, kako je pokazano i kroz ovaj rad neravnotežni doprinosi su direktno povezani uz informacije o ekspanziji, odnosno smicanju svjetlosnih geodezika koji tvore horizont. Upravo te informacije su ono što je vezano isključivo uz strukturu prostorvremena jer njima opisujemo ponašanje lokalnog horizonta H u blizini proizvoljne točke p kao što je ranije kroz rad objašnjeno. Dakle, to su informacije vezane samo uz kinematiku svjetlosnih geodezika oko svake točke prostorvremena, a kako je pokazano moramo ih uzeti u obzir da bi ovdje prikazana metoda bila kompletna, odnosno kako je pokazano u [4] te informacije uz (51) nam osiguravaju da je i dalje validan zakon sačuvanja energije (46), kao što i očekujemo da je slučaj.

Zaključujemo s tim da smo kroz ovaj rad prikazali termodinamičku metodu u kojoj konstruiramo termalni sustav u okolini proizvoljne točke p nekog općenitog prostorvremena te uvodimo parametar v koji nam je u nekom smislu parametar "vremena" kojim pratimo evoluciju sustava. Time postižemo to da skalar ekspanzije θ i tenzor smicanja σ_{ab}, koji opisuju evoluciju svjetlosnih geodezika koji tvore lokalni horizont H oko točke p, ne moraju nužno iščezavati. To nas vodi na tzv. zakon ravnoteže entropije (51) čiji nam ravnotežni dio reproducira jednadžbe polja (u ovisnosti koji princip ekvivalencije smo invocirali) analogno jednadžbama stanja u termodinamici, a neravnotežni dio nam reproducira rezultate vezane uz viskoznost smicanja i volumnu viskoznost koje, kako je sugerirano u nizu članaka, možemo pripisati stupnjevima slobode prostorvremena koje jednadžbe polja same ne mogu opisati. Za kraj kao povijesni kuriozitet navedimo da je još 1920. godine Sir A. S. Eddington [33] raspravljao o mogućoj statističkoj prirodi gravitacije koju smo kroz ovaj rad uspjeli argumentirati u kontekstu termodinamike.

Dodatak A: Kovarijantna Klein-Gordonova jednadžba

Klein-Gordonova jednadžba za masivno skalarno (spin mu je 0) polje ϕ uz metriku Minkowskog η_{ab} glasi

$$\left(\eta_{ab}\partial^a\partial^b - \frac{m^2}{\hbar^2}\right)\phi = 0 \ . \tag{A1}$$

Ako želimo prevesti ovu jednadžbu u kovarijantnu, koordinatno neovisnu formu, onda moramo provesti postupak tzv. kovarijantizacije [5], gdje zamjenjujemo parcijalne derivacije s kovarijantnim, a Minkowski metriku s nekom proizvoljnom g_{ab}. Dakle, imamo

$$\left(g_{ab}\nabla^a\nabla^b - \frac{m^2}{\hbar^2}\right)\phi = 0 \ .$$

Sada računamo

$$\begin{aligned} g_{ab}\nabla^a\nabla^b\phi &= \nabla_a\nabla^a\phi = \nabla_a\partial^a\phi = \\ &\quad \text{(jer je } \phi \text{ skalarna funkcija)} \\ &= \partial_a\partial^a\phi + \Gamma^b_{ba}\partial^a\phi = \partial_a\partial^a\phi + \frac{1}{2}g^{bc}(\partial_a g_{bc} + \\ &\qquad + \cancel{\partial_b g_{ac}} - \underbrace{\partial_c g_{ab}}_{=\cancel{\partial_b g_{ac}}})\partial^a\phi = \\ &\quad \text{(b} \leftrightarrow \text{c + simetričnost metrike)} \\ &= \partial_a\partial^a\phi + \frac{1}{2}g^{bc}\partial_a g_{bc}\partial^a\phi \ . \end{aligned}$$

Ovdje nam je potreban tzv. Jacobijev identitet:

Neka je M kvadratna matrica i neka je $N = \ln(M)$ $\implies M = e^N$. Također, znamo da vrijedi relacija $\det\left(e^N\right) = e^{Tr(N)}$ [34]. Stoga, imamo

$$\begin{aligned} &\partial_a(\det(M)) = \partial_a\left(\det\left(e^N\right)\right) = \partial_a\left(e^{Tr(N)}\right) = \\ &= e^{Tr(N)}\partial_a(Tr(N)) = e^{Tr(N)}Tr(\partial_a(N)) = \\ &= \det(M)Tr(\partial_a(\ln(M))) = \det(M)Tr(M^{-1}\partial_a(M)) \\ &\implies \partial_a(\det(M)) = \det(M)Tr(M^{-1}\partial_a(M)) \ . \end{aligned} \tag{A2}$$

Za $M = g_{bc}$, uz pokratu $g = \det(g_{bc})$, (A2) daje

$$\partial_a g = g g^{bc}\partial_a g_{bc} \implies g^{bc}\partial_a g_{bc} = \frac{\partial_a g}{g} \ .$$

Iz ovoga slijedi

$$\begin{aligned} &g_{ab}\nabla^a\nabla^b\phi = \partial_a\partial^a\phi + \frac{1}{2g}\partial_a g\partial^a\phi = \\ &= \partial_a\partial^a\phi + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_a\sqrt{-g}\partial^a\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_a(\sqrt{-g}\partial^a\phi) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_a(\sqrt{-g}g^{ab}\partial_b\phi) \ . \end{aligned}$$

Dakle, kovarijantna Klein-Gordonova jednadžba glasi

$$\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_a(\sqrt{-g}g^{ab}\partial_b) - \frac{m^2}{\hbar^2}\right)\phi = 0 \ . \tag{A3}$$

Dodatak B: Sokhotski-Plemeljov teorem

Teorem (Sokhotski-Plemelj [34])**.** *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija i $a<0<b$. Tada je*

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_a^b \frac{f(x)}{x \pm i\epsilon}\,dx = \mp i\pi f(0) + P.V.\int_a^b \frac{f(x)}{x}\,dx \ ,$$

gdje $P.V.$ označava Cauchyjevu glavnu vrijednost, koja je definirana kao

$$P.V.\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_a^{c-\epsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x)\,dx\right) \ ,$$

gdje vrijedi $a<c<b$ i $f(x)$ ima singularitet u c.

Dokaz.

$$\begin{aligned} I &\equiv \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_a^b \frac{f(x)}{x \pm i\epsilon}dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_a^b \frac{x \mp i\epsilon}{x^2+\epsilon^2}f(x)\,dx = \\ &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_a^b \frac{xf(x)}{x^2+\epsilon^2}\,dx \mp i\int_a^b \frac{\epsilon f(x)}{x^2+\epsilon^2}\,dx\right) \equiv \\ &\equiv (1) + (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_a^{-\epsilon} \frac{xf(x)}{x^2+\epsilon^2}\,dx + \int_\epsilon^b \frac{xf(x)}{x^2+\epsilon^2}\,dx\right) = \\ &= P.V.\int_a^b \frac{\cancel{x}f(x)}{x^{\cancel{2}}}\,dx = P.V.\int_a^b \frac{f(x)}{x}\,dx \end{aligned}$$

$$(2) = \mp i\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_a^b \frac{\epsilon f(x)}{x^2+\epsilon^2}\,dx = \mp i\pi\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_a^b \frac{\epsilon f(x)\,dx}{\pi(x^2+\epsilon^2)} \ ,$$

ovdje $\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{\epsilon}{\pi(x^2+\epsilon^2)}$ prepoznajemo kao jednu od brojnih reprezentacija Diracove delta funkcije $\delta(x)$ [35],

$$(2) = \mp i\pi\int_a^b f(x)\delta(x)\,dx = \mp i\pi f(0) \ ,$$

kako je $I = (1) + (2)$, dobivamo

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_a^b \frac{f(x)}{x \pm i\epsilon}\,dx = \mp i\pi f(0) + P.V.\int_a^b \frac{f(x)}{x}\,dx \tag{B1}$$

$\square$

Dodatak C: Eulerova relacija

Ekstenzivnost energije E koja ovisi o entropiji S i volumenu V nam daje

$$E(\lambda S, \lambda V) = \lambda E(S, V) \ . \tag{C1}$$

Deriviranjem (C1) po λ dobivamo

$$\frac{\partial E(\lambda S, \lambda V)}{\partial(\lambda S)}\underbrace{\frac{\partial(\lambda S)}{\partial\lambda}}_{=S} + \frac{\partial E(\lambda S, \lambda V)}{\partial(\lambda V)}\underbrace{\frac{\partial(\lambda V)}{\partial\lambda}}_{=V} = E(S, V) \ .$$

Sada uzimanjem $\lambda = 1$ dobivamo

$$\underbrace{\frac{\partial E}{\partial S}}_{=T} S + \underbrace{\frac{\partial E}{\partial V}}_{=-p} V = E$$
$$\Longrightarrow TS - pV = E \Big/ : V$$
$$\Longrightarrow Ts - p = \rho$$
$$\Longrightarrow \rho + p = Ts \ . \tag{C2}$$

Dodatak D: Jednadžbe polja iz akcije

Gravitacijske jednadžbe polja se mogu izvesti principom ekstremizacije akcije $\mathcal{S}$, odnosno iz zahtjeva

$$\delta\mathcal{S} = 0 \ ,$$

gdje je δ varijacija.

Ovdje ćemo to napraviti za OTR pomoću Einstein-Hilbertove akcije

$$\mathcal{S}_{EH} = \int \left(\frac{1}{16\pi G}(R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_M \right) \sqrt{-g}\, d^4x \tag{D1}$$

te za $f(R)$ teoriju gravitacije pomoću akcije oblika

$$\mathcal{S}_{f(R)} = \int \left(\frac{1}{16\pi G} f(R) + \mathcal{L}_M \right) \sqrt{-g}\, d^4x \ . \tag{D2}$$

U obje akcije $\mathcal{L}_M$ označava doprinose polja materije. Definiramo tenzor energije i impulsa

$$T^{ab} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\delta g_{ab}} \ ,$$

koji je po definiciji simetričan.

Sam račun varijacija potrebnih tenzorskih veličina je dosta dug, no jednostavan i izravan pa ga ovdje nećemo cijelog provesti nego ćemo samo napisati rezultate:

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2} g^{ab} \delta g_{ab} \ , \tag{D3}$$
$$\delta g^{ab} = -g^{ac} g^{db} \delta g_{cd} \ , \tag{D4}$$
$$\delta R = (-R^{ab} - g^{ab}\Box + \nabla^a\nabla^b)\delta g_{ab} \ . \tag{D5}$$

U (D5) $\Box$ označava d'Alembertijan, odnosno $\Box = \nabla_a \nabla^a$. Također, napomenimo da će doprinosi zadnja dva člana iz (D5) propasti pri integraciji u izvodu jednadžbi polja za OTR, dok to neće biti tako u $f(R)$ slučaju.

Dakle, za $\mathcal{S}_{EH}$ imamo

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{S}_{EH} = \int \Big(& \frac{\sqrt{-g}}{16\pi G}\delta R + \frac{R}{16\pi G}\delta\sqrt{-g} - \frac{\Lambda}{8\pi G}\delta\sqrt{-g} + \\
& + \delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M) \Big)\, d^4x = \\
= \int \Big(& -\frac{1}{16\pi G} R^{ab} + \frac{R}{32\pi G} g^{ab} - \frac{\Lambda}{16\pi G} g^{ab} + \\
& + \frac{T^{ab}}{2} \Big) \delta g_{ab} \sqrt{-g}\, d^4x = 0 \\
\Longrightarrow & -R^{ab} + \frac{1}{2} g^{ab} R - \Lambda g^{ab} + 8\pi G T^{ab} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow R^{ab} - \frac{1}{2} g^{ab} R + \Lambda g^{ab} = 8\pi G T^{ab} \\
&\Longrightarrow R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R + \Lambda g_{ab} = 8\pi G T_{ab} \ .
\end{aligned} \tag{D6}$$

Izraz (D6) su upravo jednadžbe polja za OTR, još poznate i kao Einsteinove jednadžbe polja (EJP). Λ je naravno kozmološka konstanta.

Nadalje, za $\mathcal{S}_{f(R)}$, uz pokratu $\mathcal{F}(R) = \frac{df(R)}{dR}$ (također ćemo pisati $f = f(R)$ i $\mathcal{F} = \mathcal{F}(R)$), imamo

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{S}_{f(R)} = \int \Big(& \frac{f\sqrt{-g}}{32\pi G} g^{ab} + \frac{\sqrt{-g}}{2} T^{ab} - \frac{\mathcal{F}\sqrt{-g}}{16\pi G} R^{ab} + \\
& + \frac{\mathcal{F}\sqrt{-g}}{16\pi G} \left(-g^{ab}\Box + \nabla^b\nabla^b\right) \Big) \delta g_{ab}\, d^4x = 0 \ .
\end{aligned}$$

Kada zadnji član u gornjem integralu dva puta parcijalno integriramo dobivamo površinski član koji propada te drugi član oblika

$$\int d^4x \sqrt{-g} \delta g_{ab} \left(-g^{ab}\Box + \nabla^a\nabla^b\right) \mathcal{F} \ .$$

Dakle, imamo

$$\begin{aligned}
0 = \int \Big(& \frac{f}{32\pi G} g^{ab} + \frac{T^{ab}}{2} - \frac{\mathcal{F}}{16\pi G} R^{ab} + \\
& + \frac{1}{16\pi G}(-g^{ab}\Box + \nabla^a\nabla^b)\mathcal{F} \Big) \delta g_{ab} \sqrt{-g}\, d^4x \\
\Longrightarrow & \frac{f}{2} g^{ab} + 8\pi G T^{ab} - \mathcal{F} R^{ab} + \\
& + (-g^{ab}\Box + \nabla^a\nabla^b)\mathcal{F} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \mathcal{F} R^{ab} - \mathcal{F}^{;ab} + \left(\Box\mathcal{F} - \frac{f}{2}\right) g^{ab} = 8\pi G T^{ab} \\
&\Longrightarrow \mathcal{F} R_{ab} - \mathcal{F}_{;ab} + \left(\Box\mathcal{F} - \frac{f}{2}\right) g_{ab} = 8\pi G T_{ab} \ .
\end{aligned} \tag{D7}$$

Izraz (D7) su upravo jednadžbe polja za $f(R)$ gravitaciju.

Napomenimo da smo i u (D6) i u (D7) napisali jednadžbe polja i s gornjim i s donjim indeksima, što su naravno dva ekvivalentna zapisa.

Također, odmah uočavamo da se (D7) u slučaju $f(R) = R - 2\Lambda$ očekivano svodi na (D6).

[1] J. M. Bardeen, B. Carter, and S. Hawking, The Four Laws of Black Hole Mechanics, Commun. math. Phys. **31**, 161 (1973).
[2] K. Krhač, Emergent Gravitation, diplomski rad, Prirodoslovno-matematički fakultet Zagreb, Fizički odsjek (2021).
[3] T. Jacobson, Thermodynamics of Spacetime: The Einstein Equation of State, Phys. Rev. Lett. **75** (1995).
[4] C. Eling, R. Guedens, and T. Jacobson, Nonequilibrium Thermodynamics of Spacetime, Phys. Rev. Lett. **96** (2006).
[5] I. Smolić, Diferencijalna geometrija u fizici, skripta (2022).
[6] W. G. Unruh, Notes on black hole evaporation, Phys. Rev. D **15**, 870 (1976).
[7] A. de Gill, D. Singleton, V. Akhmedova, and T. Pilling, A WKB-like approach to Unruh radiation, Am. J. Phys. **78**, 685 (2010).
[8] M. K. Parikh and F. Wilczek, Hawking radiation as tunneling, Phys. Rev. Lett. **85**, 5042 (2000).
[9] T. Dobrian, Hawking Radiation with the WKB and Graviational WKB approximations, Calculated Near the Horizon and Extended to r<2M, Undergraduate honors thesis, University of Colorado Boulder (2017).
[10] D. Roy, The Unruh thermal spectrum through scalar and fermion tunneling, Physics Letters B **681**, 185 (2009).
[11] V. F. Mukhanov and S. Winitzki, Introduction to Quantum Fields in Classical Backgrounds (2004).
[12] I. Smolić, Opća teorija relativnosti, bilješke s vježbi (2012).
[13] P. A. M. Dirac, General Theory of Relativity (Princeton University Press, 1975).
[14] T. Nikšić, Klasična mehanika 2 (Hamiltonova mehanika), bilješke s vježbi (2014).
[15] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Quantum Mechanics (Non-relativistic Theory) (Pergamon Press, 1965).
[16] F. D. Porro, M. Herrero-Valea, S. Liberati, and M. Schneider, Gravitational Tunneling in Lorentz Violating Gravity, Phys. Rev. D:Particles and fields **106** (2022).
[17] C. Giavoni and M. Schneider, Quantum effects across dynamical horizons, Class. Quant. Grav. **37** (2020).
[18] J. Santiago and M. Visser, Tolman temperature gradients in a gravitational field, 9 Eur. J. Phys. **40** (2019).
[19] M. Murković, Unruhov i Hawkingov efekt, diplomski rad, Prirodoslovno-matematički fakultet Zagreb, Fizički odsjek (2012).
[20] I. Rácz and R. Wald, Global Extensions of Spacetimes Describing Asymptotic Final States of Black Holes, Class. Quan. Grav. **9** (1992).
[21] T. Jacobson, G. Kang, and R. C. Myers, On Black Hole Entropy, Phys. Rev. D **49** (1994).
[22] G. Chirco and S. Liberati, Non-equilibrium Thermodynamics of Spacetime: the Role of Gravitational Dissipation, Phys. Rev. D **81** (2010).
[23] E. Poisson, A Relativist's Toolkit, The Mathematics of Black-Hole Mechanics (Cambridge University Press, 2004).
[24] M. Blau, Lecture notes on General Relativity, skripta (2022).
[25] S. Tsujikawa, Matter density perturbations and effective gravitational constant in modified gravity models of dark energy, Phys. Rev. D **76** (2007).
[26] S. de Groot and P. Mazur, Non-Equilibrium Thermodynamics (Dover Publications, 1962).
[27] N. Banerjee, S. Dutta, A. Jain, and D. Roychowdhury, Entropy current for non-relativistic fluid, Journal of High Energy Physics **2014** (2014).
[28] C. Eling, Hydrodynamics of spacetime and vacuum viscosity, Journal of High Energy Physics **2008** (2008).
[29] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Fluid Mechanics (Pergamon Press, 1987).
[30] D. T. Son and A. O. Starinets, Viscosity, black holes, and quantum field theory, Annual Review of Nuclear and Particle Science **57**, 95 (2007).
[31] E. Poisson, Absorption of mass and angular momentum by a black hole: Time-domain formalisms for gravitational perturbations, and the small-hole or slow-motion approximation, Phys. Rev. D **70** (2004).
[32] T. Padmanabhan, Thermodynamical aspects of gravity: new insights, Reports on Progress in Physics **73**, 046901 (2010).
[33] A. S. Eddington, Space, Time and Gravitation: An Outline of the General Relativity Theory (Cambridge University Press, 1920).
[34] I. Smolić, Matematičke metode fizike, skripta (2021).
[35] `https://books.physics.oregonstate.edu/LinAlg/deltareps.html`, [pristupljeno 8.11.2022.].