

Određivanje totalnog udarnog presjeka procesa $e^-e^+ \rightarrow \text{hadroni}$ do prvog reda u QCD konstanti vezanja

IVICA KIČIĆ

Fizički odsjek, PMF, Bijenička c. 32, 10000 Zagreb

MENTOR: DR. SC. GORAN DUPLANČIĆ

Institut Ruđer Bošković, Bijenička c. 54, 10000 Zagreb

Sažetak

U ovom radu prikazujemo račun Feynmanovih dijagrama s jednom petljom na primjeru procesa anihilacije elektron-pozitron para i stvaranja hadrona. Račun je napravljen u ultrarelativističkom limesu, gdje su sve mase zanemarene. Za eliminaciju divergencija dijagrama koristimo dimenzionalnu regularizaciju. Rad može poslužiti kao pregled osnovnih metoda za rješavanje dijagrama s jednom petljom.

1. UVOD

U ovom radu računamo ukupni udarni presjek za proces $e^-e^+ \rightarrow \text{hadroni}$, gdje nastali hadroni imaju proizvoljne kvantne brojeve, impulse i polarizacije. Hadroni su vezana stanja kvarkova i gluona (zajedno ih zovemo *partonima*). Kvarkovi i gluoni su elementarne čestice, pa gornji proces opisujemo preko kvarkovsko-gluonskih međustanja. Ovdje ćemo razmatrati samo dva najniža relevantna stanja, to jest $q\bar{q}$ i $q\bar{q}g$.

U formalizmu kvantne teorije polja, udarni presjeci računaju se korištenjem računa smetnje. Radi se o računu gdje se slobodne čestice uzimaju kao baza, a interakcija se uvodi kao smetnja. Dakle, kod računa smetnje radi se o razvoju po konstanti vezanja. Da bi taj razvoj imao smisla i konvergirao, konstanta vezanja mora biti mala. Rezultat je to točniji što veći red uzmemo u obzir. U ovom radu se ograničavamo na vodeći red i red do vodećeg (na nulti i prvi red).

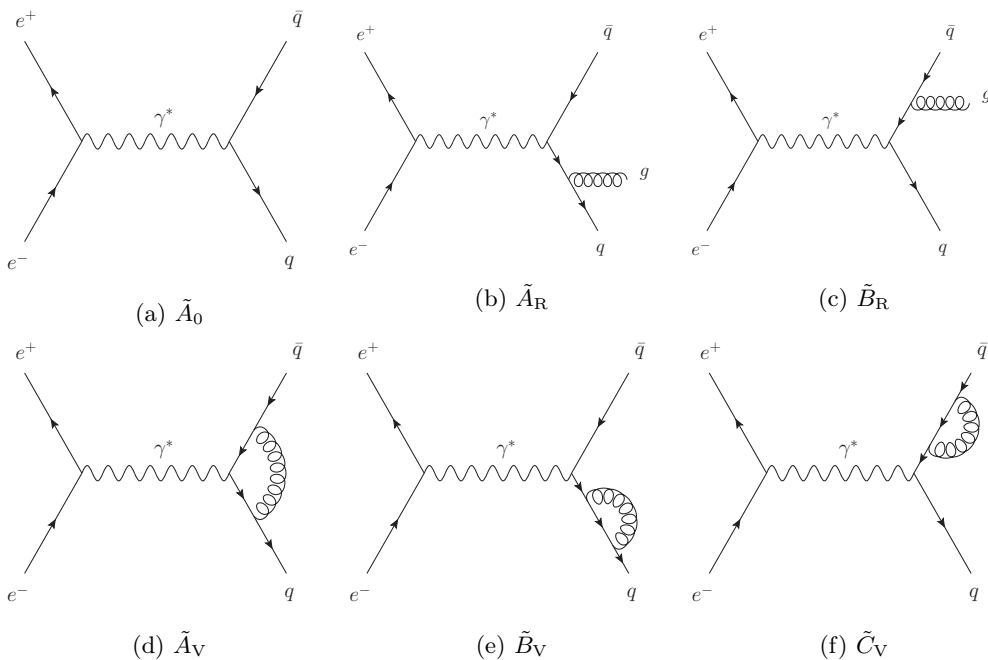
Za naš račun interakcija od važnosti je interakcija kvarkova i gluona, koja je opisana kvantnom kromodinamikom (QCD). Kako je QCD konstanta vezanja α_s mala na visokim energijama, a velika na malim, ograničavamo se na visoke energije pa račun izvodimo u ultrarelativističkom limesu, što znači da možemo zanemariti mase.

Doprinos u računu smetnje praktično je reprezentirati pomoću Feynmanovih dijagrama. Za proces $e^-e^+ \rightarrow \text{hadroni}$ do $\mathcal{O}(\alpha_s)$ u razvoju (red do vodećeg u perturbativnom razvoju) pojavljuje se šest dijagrama (slika 1). S obzirom na formalizam vidimo da se radi o dva procesa, anihilaciji elektron-pozitron para u kvark-antikvark te u kvark-antikvark i gluon. To u stvari znači da se udarni presjek za $e^-e^+ \rightarrow \text{hadroni}$ razdvaja na dva udarna presjeka, onaj za $e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}$ te za $e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}g$. Kako je udarni presjek za neki proces proporcionalan apsolutnoj vrijednosti kvadrata amplitude vjerojatnosti, potrebno je izračunati sljedeće članove:

$$\begin{aligned} |\tilde{\mathcal{M}}_{q\bar{q}}|^2 &= |\tilde{A}_0 + \tilde{A}_V + \tilde{B}_V|^2 = \underbrace{\tilde{A}_0\tilde{A}_0^*}_{\mathcal{O}(1)} + \underbrace{2\text{Re}(\tilde{A}_0\tilde{A}_V^* + \tilde{A}_0\tilde{B}_V^* + \tilde{A}_0\tilde{C}_V^*)}_{\mathcal{O}(\alpha_s)} + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \\ |\tilde{\mathcal{M}}_{q\bar{q}g}|^2 &= |\tilde{A}_R + \tilde{B}_R|^2 = \underbrace{\tilde{A}_R\tilde{A}_R^* + 2\text{Re}(\tilde{A}_R\tilde{B}_R^*)}_{\mathcal{O}(\alpha_s)} + \tilde{B}_R\tilde{B}_R^* \end{aligned}$$

Budući da se ograničavamo na red do vodećeg, izostavljamo doprinose koji su proporcionalni $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$, jer bi za ispravnu analizu do tog reda morali uključiti i dijagrame višeg reda.

Svaki član gornjih suma ćemo računati odvojeno. Nakon što zapišemo preko Feynmanovih pravila izraze za te vrijednosti, čini se da bi račun trebao biti jednostavan. No, ubrzo nastaju problemi, jer se u svim doprinosima, osim u vodećem, pojavljuju divergentni integrali.



Slika 1: Šest dijagrama koji doprinose dvama najnižim redovima u računu smetnje za totalni udarni presjek procesa $e^-e^+ \rightarrow \text{hadroni}$. U ta dva najniža reda, pojavljuju se u stvari dva procesa: $e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}$ (dijagrami $\tilde{A}_0, \tilde{A}_V, \tilde{B}_V$ i \tilde{C}_V) te $e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}g$ (dijagrami \tilde{A}_R i \tilde{B}_R). Oznaka V označava pojavljivanje virtualnog gluona, a R realnog gluona.

Jedna stvar koju bismo mogli iz toga zaključiti je da su teorija ili barem račun smetnje netočni i da rezultate koje daju nemaju smisla. No, možemo razmišljati na drugi način, da je formalizam sam uveo komplikacije kojih ne bi trebalo biti, a da bi trebalo biti moguće adekvatnim tretiranjem staviti pod kontrolu divergencije i izvući točan rezultat.

Postupak koji tražimo ili trebamo poznat je kao *regularizacija*. Koriste se razne regularizacije, primjerice Pauli-Villarsova regularizacija, gdje se uvodi jedna ili više čestica beskonačnih masa, čiji se parametri namještavaju tako da poništavaju sve divergencije, ali kako imaju beskonačnu masu, u konačnici ne utječu na udarni presjek. Drugi primjer je uvođenje mase gluona, za koju se na kraju računa uzme da teži nuli. Ovdje ćemo koristiti *dimenzionalnu regularizaciju*, kod koje se problem rješava računanjem u općenitom broju dimenzija D , a na kraju uzimamo graničnu vrijednost od interesa, to jest za $D \rightarrow 4$.

Izvod totalnog udarnog presjeka je napravljen na temelju izvoda u [1].

2. DETALJI O PROCESU

Na početku smo rekli da se stvaranje hadrona opisuje preko međustanja kvarkova i gluona (partona). Ukupan proces bismo mogli zapisati na sljedeći način:

$$e^-e^+ \rightarrow \gamma^* \rightarrow \text{partoni} \rightarrow \text{hadroni},$$

gdje smo s γ^* označili virtualni foton nastao anihilacijom e^-e^+ para (slika 1). Partoni se u eksperimentu manifestiraju kao *jet*-ovi. Postojanje *jet*-a s velikom sigurnošću pokazuje da se stvorio parton. Smjer *jet*-a zapravo (ugrubo) odgovara početnom smjeru tog partona. Dio procesa opisan Feynmanovim dijagramima se odnosi na prva tri dijela, od elektron-pozitron para do partona. Nakon nastajanja partona slijedi hadronizacija. U ovom radu pretpostavljamo da je vjerojatnost hadronizacije jednaka 1.

Dodatno, svaki navedeni dijagram sadrži isti faktor, koji se odnosi na anihilaciju elektron-pozitron para u foton γ^* . Zbog toga ga možemo izostaviti, promatrati samo raspad virtualnog

fotona u kvarkove i gluone i na kraju ga vratiti u konačni izraz za udarni presjek. Tako će nam jedini zadani parametar računa biti impuls fotona $q = p_{e^-} + p_{e^+}$. Također, račun ćemo raditi u sustavu centru mase pa je efektivno jedini parametar $Q \stackrel{\text{def}}{=} q^0$, ukupna ulazna energija elektrona i pozitrona.

Za naboj kvarkova uzimamo da je jednak naboju elektrona, e . Na kraju računa se po potrebi rezultat može pomnožiti s e_q^2 (odnosno, zamijeniti svaki e na kvarkovskoj strani dijagrama sa ee_q), gdje je $e_q = \pm 1/3$ ili $\pm 2/3$.

3. TEHNIKE RAČUNANJA

Račun koji slijedi je relativno dugačak i koristi metode specifične za ovakav problem. Da ne bismo prekidali račun općenitim izvodima, odmah navodimo sve bitnije korištene metode i formule.

3.1. Dimenzionalna regularizacija

Kao što je rečeno u uvodu, cijeli izračun ćemo raditi u općenitom broju dimenzija, općenitom u smislu da D može biti realan broj. Prirodno pitanje koje se nameće je kako je uopće moguće to smisljeno i konzistentno definirati. Odgovor je vrlo jednostavan. Sve potrebne formule izvodimo za cijeli broj dimenzija, a budući da će dobiveni izrazi biti analitičke funkcije (do na polove) s obzirom na broj dimenzija D , broj dimenzija poopćujemo na realne (i kompleksne brojeve).

Razlog je taj što su integrali od interesa divergentni za $D = 4$, a konvergentni za broj dimenzija različitih od 4. Ideja je da ćemo u slučaju računanja u D dimenzija moći izolirati one članove koji divergiraju i one članove koji ostaju konačni kada se D približava 4, to jest kada se vraćamo u standardno 3+1 dimenzionalno prostor-vrijeme. Iz navedenih razloga, praktično je uvesti supstituciju $D = 4 + \epsilon$. Oznaku ϵ ćemo koristiti paralelno oznaci D gdje je to prikladnije.

Formalno, zanima nas granična vrijednost za $\epsilon \rightarrow 0$ ukupnog udarnog presjeka pa sve doprinose razvijamo u Taylorov (MacLaurinov) red s obzirom na ϵ oko točke $\epsilon = 0$ i zadržavamo samo članove do $\mathcal{O}(\epsilon^0)$, uključujući. Napomenimo da je $\lim_{\epsilon \rightarrow 0}$ zadnja stvar u računu koju ćemo napraviti. Odnosno, fiksiramo ϵ , napravimo cijeli račun u toliko dimenzija, dobijemo rezultat kao funkciju od ϵ , i na kraju uzimamo limes u nuli.

3.2. Promjena broja dimenzija

Navodimo sve nama bitne promjene u formulama koje su posljedica promjene broja dimenzija. Prvo, integral po impulsima se mijenja:

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \rightarrow \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}$$

Nakon Wickove rotacije (vidi dolje), prebacivat ćemo se u sferni sustav, koji u d (prostornih) dimenzija glasi:

$$d^d k = dk k^{d-1} \sin^{d-1} \theta_1 \sin^{d-2} \theta_2 \cdots \sin \theta_{d-2} d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_{d-2} d\theta_{d-1} \quad (1)$$

$$k \in [0, \infty), \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{d-2} \in [0, \pi], \theta_{d-1} \in [0, 2\pi)$$

Iskoristili smo d umjesto D , jer će nam sferni sustav trebati za $d = D$ i $d = D - 1$. Ako je podintegralna funkcija neovisna o kutovima, odmah se može pointegrirati po kutovima:

$$d^d k \rightarrow dk k^{d-1} S_{d-1}, \quad (2)$$

gdje je S_{d-1} površina d -dimenzionalne kugle [2]:

$$S_d = \frac{2\pi^{(d+1)/2}}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} \quad (3)$$

$$S_0 = 2, S_1 = 2\pi, S_2 = 4\pi, S_3 = 2\pi^2, \dots$$

Za tenzorske integrale vrijedi:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D K}{(2\pi)^D} f(K^2) K^\mu &= 0, & (\text{zbog neparnosti}), \\ \int \frac{d^D K}{(2\pi)^D} f(K^2) K^\mu K^\nu &= \frac{1}{D} g^{\mu\nu} \int \frac{d^D K}{(2\pi)^D} f(K^2) K^2. \end{aligned} \quad (4)$$

U D dimenzija za γ -matrice i dalje vrijedi $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}$, ali se mijenja njihov broj (ima ih D). Relevantne relacije glase:

$$\begin{aligned} g^\mu{}_\mu &= D \\ \gamma^\mu \gamma_\mu &= D\mathbb{1} \\ \gamma^\mu \gamma_\nu \gamma_\mu &= (2 - D)\gamma_\nu \\ \gamma^\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\nu &= 4g_{\nu\rho} - (4 - D)\gamma_\nu \gamma_\rho \\ \gamma^\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\nu &= -2\gamma_\sigma \gamma_\rho \gamma_\nu + (4 - D)\gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \\ \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] &= 4g^{\mu\nu} \\ \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] &= 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\nu\rho} g^{\sigma\mu} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}) \end{aligned} \quad (5)$$

Formula za (diferencijalnu) širinu raspada jedne čestice u K čestica u D dimenzija glasi:

$$d\Gamma = \frac{1}{2E_{\text{CM}}} |\mathcal{M}|_{\text{tot}}^2 d^{K(D-1)} R_K, \quad \Gamma = \int d\Gamma, \quad (6)$$

gdje je $E_{\text{CM}} = Q$ energija centra mase (energija virtualnog fotona), $|\mathcal{M}|_{\text{tot}}^2$ ukupni kvadrat amplitude (vidi dolje), a $d^{K(D-1)} R_K$ infinitezimalni dio volumena faznog prostora. Dimenzija faznog prostora, $K(D-1)$, odgovara broju prostornih komponenti impulsa izlaznih čestica. Navodimo odmah i izraz za (diferencijalni) udarni presjek za dvije ulazne čestice u K izlaznih za $D = 4$ (vidi Peskin-Schroeder [3], jedn. (4.79), za sustav centra mase):

$$d\sigma = \frac{1}{2E_{\text{CM}}^2} \langle |\mathcal{M}|_{\text{tot}}^2 \rangle d^{3K} R_K, \quad \sigma = \int d\sigma, \quad (7)$$

gdje $\langle |\mathcal{M}|_{\text{tot}}^2 \rangle$ predstavlja prosjek $|\mathcal{M}|_{\text{tot}}^2$ po kvantnim brojevima (spinovima) ulaznih čestica.

Prilikom prelaska u drugi broj dimenzija, konstante vezanja e i g_s postaju dimenzionalne pa je korisno definirati bezdimenzionalne konstante vezanja:

$$e_D = \frac{e}{(\mu)^\epsilon}, \quad g_D = \frac{g_s}{(\mu)^\epsilon}, \quad (8)$$

gdje je μ *regularizacijska skala*. Konačan rezultat ne smije ovisiti o izboru te skale. Koristimo i standardne oznake $\alpha = e^2/4\pi$ i $\alpha_s = g_s^2/4\pi$. Udarni presjek, dakle, razvijamo po α_s .

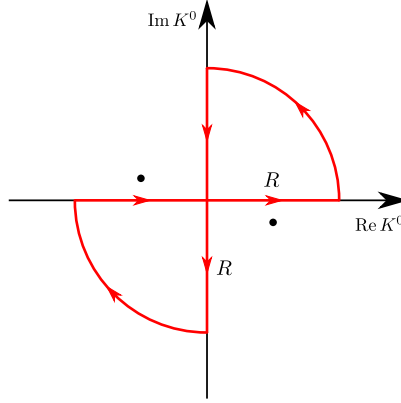
3.3. Wickova rotacija

U dijagramima s petljama pojavljivat će se integrali oblika:

$$\int \frac{d^D K}{(2\pi)^D} \frac{f(K^2)}{(K^2 - C + i\chi)^M}, \quad (9)$$

gdje je $C > 0$, $M \in \mathbb{N}$, $f(z)$ analitička funkcija za sve $z \in \mathbb{C}$, χ infinitezimalan pozitivan broj iz Feynmanovih propagatora, a K^μ D -vektor u prostor-vremenu s metrikom $(1, -1, -1, \dots, -1)$. Kada bi metrika bila euklidska, mogli bismo napraviti prijelaz u sferni sustav, kao što je opisano gore u tekstu te svesti višestruki integral na jednostruki i nakon toga ga lakše riješiti. Euklidsku metriku postizemo postupkom *Wickove rotacije*.

Promotrimo gornji integral. On se sastoji od D integrala, 1 po vremenskoj koordinati, $D-1$ po prostornoj. Poredajmo te integrale tako da je vremenski najunutarniji. Dakle, računamo integral



Slika 2: Prikaz krivulje integracije u dokazu valjanosti Wickove rotacije za integral (9). Integral po crvenoj krivulji je 0, zato što je funkcija analitička na području obuhvaćenom krivuljom integracije. Točke predstavljaju singularitete podintegralne funkcije. R je radijus lukova.

po K^0 uz fiksirirane K^i . Wickova rotacija je zamjena krivulje integracije, pravca $\text{Im } K^0 = 0$, s pravcem $\text{Re } K^0 = 0$. Tvrdimo da su ta dva integrala jednaka po iznosu. Kako bi to pokazali, pozivamo se na teorem o reziduumu za krivulju prikazanu na slici 2:

$$\int_{|\text{Im } K^0| < R} + (-) \int_{|\text{Re } K^0| < R} + \int_{\text{lukovi}} = \text{suma singularita obuhvaćenih krivuljom.} \quad (10)$$

Minus predznak dolazi od toga što nas zanima integral usmjeren u pozitivnom smjeru $\text{Im } K^0$. Desna strana jednadžbe (10) iščezava jer su singulariti podintegralne funkcije,

$$(K_0)_{\text{singulariteti}} = \pm \sqrt{\mathbf{K}^2 + C - i\chi} = \pm \sqrt{\mathbf{K}^2 + C} \mp i\chi,$$

izvan područja obuhvaćenog krivuljom integracije, za svaki R . Integrali lukova iščezavaju za dovoljno velike potencije M , ovisno o funkciji $f(z)$. Nas će zanimati samo integrali za $f(z) = \mathcal{O}(z^2)$ pa lukovi iščezavaju za svaki $M \geq 2$. Uzimanjem granične vrijednosti za $R \rightarrow \infty$, reproduciramo tražene integrale, čime pokazujemo njihovu jednakost. Nakon zamjene pravca $\text{Im } K^0 = 0$ s pravcem $\text{Re } K^0 = 0$, euklidsku metriku dobivamo supstitucijom $K^0 = iK_E^0$, $K^i = K_E^i$, $K^2 = -K_E^2$.

Potreban će nam biti iznos integrala samo za $f \equiv 1$:

$$I_M \stackrel{\text{def}}{=} \int \frac{d^D K}{(2\pi)^D} \frac{1}{(K^2 - C + i\chi)^M}. \quad (11)$$

Rješavamo ga, dakle, korištenjem Wickove rotacije, zatim korištenjem (1) za $d = D$. Može se pokazati da konačan iznos glasi [1]:

$$I_M = i \left(\frac{C}{4\pi} \right)^{D/2} \left(\frac{-1}{C} \right)^M \frac{\Gamma(M - D/2)}{\Gamma(M)}. \quad (12)$$

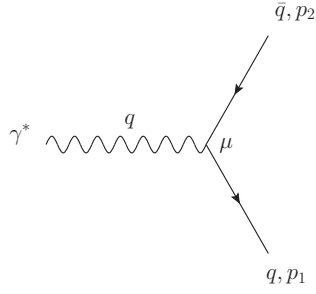
3.4. Feynmanova parametrizacija

Feynmanova parametrizacija [1,4] je tehnika rješavanja integrala koji se pojavljuju u dijagramima s petljama. Radi se o zamjeni razlomka integralom:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{dx}{(xA + (1-x)B)^2}, \quad (13)$$

ili u općenitijem slučaju:

$$\frac{1}{A_1^{k_1} \dots A_n^{k_n}} = \frac{\Gamma(k_1 + \dots + k_n)}{\Gamma(k_1) \dots \Gamma(k_n)} \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_n \frac{\delta(1 - x_1 - \dots - x_n) x_1^{k_1-1} \dots x_n^{k_n-1}}{(x_1 A_1 + \dots + x_n A_n)^{k_1 + \dots + k_n}} \quad (14)$$



Slika 3: Dijagram najnižeg reda u raspadu $\gamma^* \rightarrow \text{partoni}$, gdje se virtualni foton γ^* raspada u kvark-antikvart par $q\bar{q}$.

3.5. Notacija i pokrate

Čestice označavamo sljedećim oznakama: kvark brojem 1, antikvark brojem 2, a gluon brojem 3. Radi preglednosti, koristit ćemo sljedeće pokrate za spinore:

$$\begin{aligned} u_1 &\stackrel{\text{def}}{=} u^{s_1}(p_1)c_i, & v_2 &\stackrel{\text{def}}{=} v^{s_2}(p_2)c_j, \\ \bar{u}_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \bar{u}^{s_1}(p_1)c_i^\dagger, & \bar{v}_2 &\stackrel{\text{def}}{=} \bar{v}^{s_2}(p_2)c_j^\dagger, \end{aligned}$$

gdje su s_1 i s_2 spinovi kvarka i antikvarka, p_1 i p_2 impulsi, i i j boje ($i, j \in \{R, G, B\}$), a c_i i c_j tripleti boje. Pri množenju spinora i konjugiranog spinora dobivamo Kronecker δ simbole za spin i boju, npr.:

$$\bar{u}_1 v_2 = \bar{u}^{s_1}(p_1) v^{s_2}(p_2) \delta_{s_1 s_2} \delta_{ij}$$

Za skalarne produkte pišemo skraćeno:

$$\begin{aligned} (ij) &\stackrel{\text{def}}{=} p_i \cdot p_j, \\ (ki) &\stackrel{\text{def}}{=} k \cdot p_i. \end{aligned}$$

Za fiksni skup ulaznih i izlaznih parametara definiramo amplitudu vjerojatnosti \mathcal{M} , koju dobijemo koristeći Feynmanova pravila. S $|\mathcal{M}|_{\text{tot}}^2$ ćemo označavati sumu kvadrata amplitude $|\mathcal{M}|^2$ po svim kvantnim brojevima (spinu i boji). Tu vrijednost onda integriramo po svim mogućim impulsima, kako je opisano u jednadžbi (6).

3.6. Baždarenje

Račun provodimo u općenitom baždarenju:

$$\mu \text{ } \circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \nu = \frac{-i \left(g_{\mu\nu} + \eta \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)}{k^2}, \quad \sum_\lambda \varepsilon_\mu^\lambda \varepsilon_{\mu'}^\lambda = - \left(g_{\mu\mu'} + \eta \frac{k_\mu k_{\mu'}}{k^2} \right),$$

za neki $\eta \in \mathbb{R}$. Za sumu se može pokazati da bi član s $k^\mu k^\nu$ u amplitudi uvijek iščezavao pa je dovoljno promatrati:

$$\sum_\lambda \varepsilon_\mu^\lambda \varepsilon_{\mu'}^\lambda = -g_{\mu\mu'} \quad (15)$$

Kako je teorija baždarno invarijantna, konačni rezultat ne smije ovisiti o η , što će nam biti neki oblik provjere.

4. ŠIRINA RASPADA $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}$ U VODEĆEM REDU - $\mathcal{O}(1)$

Na početku računamo širinu raspada $\gamma^* \rightarrow \text{partoni}$ u vodećem redu računa smetnje, jer ćemo rezultate za viši red zapisati kao korekciju na ovaj rezultat (podsjetimo se da promatramo samo

raspad γ^* , jer ćemo faktor za prvi dio procesa, $e^-e^+ \rightarrow \gamma^*$, dodati na kraju cijelog računa). U vodećem redu računa smetnje pojavljuje se jedan dijagram, gdje se virtualni foton direktno pretvara u kvark-antikvark par (slika 3).

4.1. Amplituda procesa i $|\mathcal{M}|_{\text{tot}}^2$

Amplitudu procesa očitavamo s dijagrama (slika 3):

$$A_0 = \bar{u}_1(-ie_D\gamma^\mu)v_2 \times \varepsilon_\mu^\lambda, \quad (16)$$

gdje je ε_μ^λ polarizacija fotona, $\lambda \in \{0, 1, 2, 3\}$. Množenjem s konjugiranim A_0 dobivamo:

$$|\mathcal{M}|^2 = e_D^2 \bar{u}_1 \gamma^\mu v_2 \bar{v}_2 \gamma^{\mu'} u_1 \times \varepsilon_\mu^\lambda \varepsilon_{\mu'}^{\lambda*}. \quad (17)$$

Zbrajamo po svim polarizacijama fotona ϵ^μ te bojama i spinovima kvarkova:

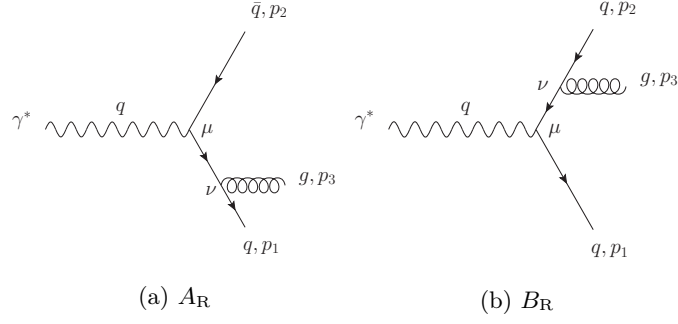
$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|_{\text{tot}}^2 &= \sum_\lambda \sum_{i,j=1}^3 \sum_{s_1, s_2=1}^2 |\mathcal{M}|^2 \\ &= -3e_D^2 \text{Tr} \left[\not{p}_1 \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma_\mu \right] \\ &= 3e_D^2 4(D-2)(12) \\ &= 3e_D^2 2(D-2)Q^2 \end{aligned} \quad (18)$$

U prvom smo koraku iskoristili (15), u drugom (5), a u trećem da je $Q^2 = q^2 = (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + 2(12) + p_2^2 = 2(12)$, gdje je Q ulazna energija.

4.2. Fazni prostor za dvije čestice R_2

Budući da amplituda procesa ne ovisi o parametrima izlaznih čestica, volumen faznog prostora možemo odmah u potpunosti integrirati:

$$\begin{aligned} R_2 &= \int d^{2D-2} R_2 \\ &= \int \frac{d^{D-1} p_1}{(2\pi)^{D-1} 2E_1} \frac{d^{D-1} p_2}{(2\pi)^{D-1} 2E_2} (2\pi)^D \delta^D(q - p_1 - p_2) \\ &= |\text{sustav centra mase, } \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{q} = \mathbf{0}, E_1 = E_2| \\ &= \int \frac{d^{D-1} p_1}{(2\pi)^{D-1} 2E_1} \frac{1}{2E_2} (2\pi) \delta(Q - E_1 - E_2) \\ &= \int \frac{dp_1 p_1^{D-2} S_{D-2}}{(2\pi)^{D-1} 2E_1 2E_2} (2\pi) \delta(Q - E_1 - E_2) \\ &= |p_1 = E_1, dp_1 = dE_1, \text{ jer su čestice bezmasene}| \\ &= \frac{1}{4(2\pi)^{D-2}} S_{D-2} \int dE_1 E_1^{D-4} \delta(Q - 2E_1) \\ &= \frac{1}{4(2\pi)^{D-2}} \frac{2\pi^{(D-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)} \frac{Q^{D-4}}{2^{D-3}} \\ R_2 &= \frac{Q^{D-4}}{4^{D-2} \pi^{(D-3)/2} \Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)} \\ R_2 &= \frac{1}{4^{2+\epsilon/2} \pi^{1/2} \Gamma\left(\frac{\epsilon+3}{2}\right)} \left(\frac{Q^2}{4\pi}\right)^{\epsilon/2} \end{aligned} \quad (19)$$



Slika 4: Dijagrami za proces $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g$, kao doprinosi u redu do vodećeg u procesu $\gamma^* \rightarrow \text{partoni}$.

4.3. Ukupna širina raspada Γ_0

Ukupnu širinu raspada dobivamo iz formule za Γ iz (6), gdje oznaku e_D raspisujemo preko (8).

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 &= \frac{1}{2E_{\text{CM}}} |\mathcal{M}|_{\text{tot}}^2 R_2 \\
&= \frac{1}{2Q} \times 3e_D^2 2(D-2)Q^2 \times \frac{Q^{D-4}}{4^{D-2} \pi^{(D-3)/2} \Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)} \\
\Gamma_0 &= 3\alpha Q \frac{\sqrt{\pi}(\epsilon+2)}{2^{\epsilon+2} \Gamma\left(\frac{\epsilon+3}{2}\right)} \left(\frac{Q^2}{4\pi\mu^2}\right)^{\epsilon/2} \\
\Gamma_0 &= 3\alpha Q \frac{\Gamma(2+\epsilon/2)}{\Gamma(2+\epsilon)} \left(\frac{Q^2}{4\pi\mu^2}\right)^{\epsilon/2} \tag{20}
\end{aligned}$$

5. ŠIRINA RASPADA $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g$ U REDU $\mathcal{O}(\alpha_s)$

U ovom poglavlju računamo doprinos procesa stvaranja kvark-antikvark para i gluona totalnom udarnom presjeku. Za razliku od prethodnog jednostavnog računa, gdje je amplituda vjerojatnosti bila neovisna o izlaznim parametrima, ovdje se radi o tročestičnim stanjima, pa će amplituda vjerojatnosti ovisiti o energijama izlaznih čestica¹. Zbog toga ćemo volumen faznog prostora dR_3 integrirati samo dok nam jedine preostale varijable ne ostanu te energije. Na kraju množimo ta dva rezultata i integriramo po svim dozvoljenim energijama (preciznije, umjesto energija koristit ćemo dolje definirane varijable x_1 i x_2).

Definiramo pokrate specifične za slučaj tri čestice:

$$x_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2E_i}{Q}, \quad E_i = \text{energija } i\text{-te čestice}, \tag{21}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2, \tag{22}$$

$$s \stackrel{\text{def}}{=} (p_1 + p_3)^2 = 2(13) = Q^2(1 - x_2),$$

$$t \stackrel{\text{def}}{=} (p_2 + p_3)^2 = 2(23) = Q^2(1 - x_1),$$

$$u \stackrel{\text{def}}{=} (p_1 + p_2)^2 = 2(12) = Q^2(1 - x_3) = Q^2(x_1 + x_2 - 1).$$

5.1. Amplituda procesa i $|\mathcal{M}|_{\text{tot}}^2$

Prvo zapisujemo amplitude dvije varijante procesa, kada gluon nastane iz grane kvarka i kada nastane iz antikvarka (slika 4):

$$\begin{aligned} A_R &= \bar{u}_1(-ig_D\gamma^\nu T_{ij}^a)\varepsilon'_\nu \frac{i(\not{p}_1 + \not{p}_3)}{(p_1 + p_3)^2}(-ie_D\gamma^\mu)\varepsilon_\mu v_2 \\ B_R &= \bar{u}_1(-ie_D\gamma^\nu)\varepsilon_\mu \frac{i(-\not{p}_2 - \not{p}_3)}{(p_2 + p_3)^2}(-ig_D T_{ij}^a\gamma^\nu)\varepsilon'_\nu v_2 \end{aligned} \quad (23)$$

Primijetimo da smo ovdje u amplitudama radi preglednosti koristili iste indekse za iste vrste vrhova, μ za QED, a ν za QCD vrh. Također, ε se odnosi na virtualni foton, a ε' na izlazni gluon. Indeksi polarizacije λ za ε i λ' za ε' se podrazumijevaju pa ih radi preglednosti izostavljamo. Nas zanima kvadrat ukupne amplitude, čime dobivamo tri različita člana:

$$|\mathcal{M}|^2 = |A_R|^2 + |B_R|^2 + 2\text{Re}(A_R B_R^*) \quad (24)$$

Za član $|A_R|^2$ ćemo napisati detaljan izvod, a za ostale skraćeni.

$$\begin{aligned} |A_R|^2 &= e_D^2 g_D^2 T_{ij}^a T_{ji}^a \bar{u}_1 \gamma^\nu \frac{\not{p}_1 + \not{p}_3}{(p_1 + p_3)^2} \gamma^\mu v_2 \bar{v}_2 \gamma^{\mu'} \frac{\not{p}_1 + \not{p}_3}{(p_1 + p_3)^2} \gamma^{\nu'} u_1 \varepsilon_\mu \varepsilon_{\mu'} \varepsilon'_\nu \varepsilon'_{\nu'} \\ &= \frac{e_D^2 g_D^2}{(p_1 + p_3)^4} T_{ij}^a T_{ji}^a \bar{u}_1 \gamma^\nu (\not{p}_1 + \not{p}_3) \gamma^\mu v_2 \bar{v}_2 \gamma^{\mu'} (\not{p}_1 + \not{p}_3) \gamma^{\nu'} u_1 \varepsilon_\mu \varepsilon_{\mu'} \varepsilon'_\nu \varepsilon'_{\nu'} \\ |A_R|_{\text{tot}}^2 &= \sum_{\lambda, \lambda'=0}^2 \sum_{a=1}^8 \sum_{i,j=1}^3 \sum_{s_1, s_2=1}^2 |A_R|^2 \\ &= \sum_{a=1}^8 \frac{e_D^2 g_D^2}{s^2} \text{Tr}[T^a T^a] \text{Tr}[\not{p}_1 \gamma^\nu (\not{p}_1 + \not{p}_3) \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma_\mu (\not{p}_1 + \not{p}_3) \gamma_\nu] \\ &= \frac{e_D^2 g_D^2}{s^2} \times 4 \times 8(\epsilon + 2)^2 (13)(23) \\ &= 8e_D^2 g_D^2 (\epsilon + 2)^2 \frac{t}{s} \end{aligned}$$

Izraz $|B_R|_{\text{tot}}^2$ se dobije potpuno analogno, a najlakše je samo zamijeniti p_1 i p_2 , dakle t i s :

$$|B_R|_{\text{tot}}^2 = 8e_D^2 g_D^2 (\epsilon + 2)^2 \frac{s}{t}$$

Kod izvoda trećeg, miješanog, člana trebamo biti pažljivi oko predznaka. Dok su se prije bilo koji faktori i ili $-i$ pokratili sami sa sobom prilikom uzimanja kvadrata apsolutne vrijednosti, ovaj put A_R i B_R^* imaju različite faktore. Doduše, jedini faktor koji ne dijele je minus predznak u $i(-\not{p}_2 - \not{p}_3)$. Dakle, imamo:

$$\begin{aligned} (2\text{Re}(A_R B_R^*))_{\text{tot}} &= -2\text{Re} \frac{e_D^2 g_D^2}{st} 4 \text{Tr}[\not{p}_1 \gamma^\nu (\not{p}_1 + \not{p}_3) \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma_\nu (\not{p}_2 + \not{p}_3) \gamma_\mu] \\ &= 16 \frac{e_D^2 g_D^2}{st} 4(\epsilon + 2)[\epsilon(13)(23) + 2(12)(13) + 2(12)(23) + 2(12)(12)] \\ &= 16e_D^2 g_D^2 (\epsilon + 2) \left[2\frac{uQ^2}{st} + \epsilon \right] \end{aligned}$$

¹I u slučaju dvije čestice amplituda ovisi o energijama izlaznih čestica, ali budući da radimo u sustavu centra mase, energija svake čestice je unaprijed definirana te iznosi $Q/2$.

Ukupni kvadrat amplitude na kraju glasi (vidi jedn. (21)):

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}|_{\text{tot}}^2 &= 8e_D^2 g_D^2 (\epsilon + 2) \left[(\epsilon + 2) \left(\frac{t}{s} + \frac{s}{t} \right) + 4 \frac{uQ^2}{st} + 2\epsilon \right] \\
&= 8e_D^2 g_D^2 \left[(\epsilon + 2)^2 \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)} + 2\epsilon(\epsilon + 2) \frac{(1-x_1)(1-x_2) - (x_1 + x_2 - 1)}{(1-x_1)(1-x_2)} \right] \quad (25) \\
&= 32e_D^2 g_D^2 \underbrace{\left[\left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right)^2 \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)} + \epsilon \left(\epsilon + \frac{1}{2}\right) \frac{2 - 2x_1 - 2x_2 - x_1x_2}{(1-x_1)(1-x_2)} \right]}_{F(x_1, x_2)}
\end{aligned}$$

5.2. Fazni prostor za tri čestice R_3

Počinjemo od $d^{3D-3}R_3$, volumena faznog prostora ovisnog o impulsima svake čestice. Integriremo dio po dio, sve dok nam jedini diferencijalni ne ostanu dx_1 i dx_2 .

$$d^{3D-3}R_3 = \frac{d^{D-1}p_1}{(2\pi)^{D-1} 2E_1} \frac{d^{D-1}p_2}{(2\pi)^{D-1} 2E_2} \frac{d^{D-1}p_3}{(2\pi)^{D-1} 2E_3} (2\pi)^D \delta^D(q - p_1 - p_2 - p_3)$$

Prelazimo u sustav centra mase, $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 = \mathbf{q} = \mathbf{0}$ te integriramo po $d^{D-1}p_3$:

$$d^{2D-2}R_3 = \frac{d^{D-1}p_1}{(2\pi)^{D-1} 2E_1} \frac{d^{D-1}p_2}{(2\pi)^{D-1} 2E_2} \frac{1}{2E_3} (2\pi) \delta(Q - E_1 - E_2 - E_3)$$

Orijentaciju čestice 1 biramo proizvoljno, česticu 2 orijentiramo s obzirom na 1. Čestica 3 tada ima jedinstveno određen impuls ($\mathbf{p}_3 = -\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$). Prelazimo u sferni sustav (jedn. (1)):

$$\begin{aligned}
d^{D-1}p_1 &= dp_1 \sin^{D-2} \theta_1 \sin^{D-3} \theta_2 \cdots \sin \theta_{D-3} d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_{D-3} d\theta_{D-2} \\
d^{D-1}p_2 &= dp_2 \sin^{D-2} \theta'_1 \sin^{D-3} \theta'_2 \cdots \sin \theta'_{D-3} d\theta'_1 d\theta'_2 \cdots d\theta'_{D-3} d\theta'_{D-2}
\end{aligned}$$

Kut θ'_1 definiramo kao θ_{12} , kut između implusa čestice 1 i čestice 2. Po svim ostalim kutevima možemo odmah integrirati:

$$\begin{aligned}
d^{D-1}p_1 &\rightarrow dp_1 p_1^{D-2} S_{D-2} \\
d^{D-1}p_2 &\rightarrow dp_2 p_2^{D-2} \sin^{D-3} \theta_{12} d\theta_{12} S_{D-3} \\
&= dp_2 p_2^{D-2} (1 - z^2)^{D/2-2} dz S_{D-3}
\end{aligned}$$

U zadnjem retku smo uveli oznaku $z \stackrel{\text{def}}{=} \cos \theta_{12}$. Uvrštavamo gornje supstitucije u $d^{2D-2}R_3$ i spuštamo se na samo 3 diferencijala:

$$d^3R_3 = \frac{S_{D-2} S_{D-3}}{8(2\pi)^{D-3}} dE_1 E_1^{D-3} dE_2 E_2^{D-3} dz (1 - z^2)^{D/2-2} \frac{1}{E_3(z)} \delta(\underbrace{Q - E_1 - E_2 - E_3(z)}_{f(z)})$$

Sada imamo elegantno parametriziran izraz u δ -funkciji po z pa ju možemo eliminirati. Zanimaju nas multočke z_0 izraza u δ -funkciji te iznos derivacije tog izraza po z u z_0 :

$$\begin{aligned}
\int g(z) \delta(f(z)) dz &= \sum_{f(z_0)=0} \frac{g(z_0)}{|f'(z_0)|} \\
f(z) &\stackrel{\text{def}}{=} Q - E_1 - E_2 - E_3(z) \\
f(z_0) &= Q - E_1 - E_2 - E_3(z_0) \stackrel{\text{def}}{=} 0 \\
E_3 &= |\mathbf{p}_3| = \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + |\mathbf{p}_2|^2 + 2z_0 |\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_2|} = Q - E_1 - E_2 \\
E_1^2 + E_2^2 + 2z_0 E_1 E_2 &= E_1^2 + E_2^2 + Q^2 - 2Q(E_1 + E_2) + 2E_1 E_2
\end{aligned}$$

$$z_0 = 1 + \frac{2Q(Q - 2E_1 - 2E_2)}{4E_1E_2} = 1 + \frac{2(1 - x_1 - x_2)}{x_1x_2} \quad (26)$$

$$|f'(z_0)| = \left| -\frac{d}{dz} \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2zE_1E_2} \right|_{z=z_0} = \frac{1}{2} \frac{2E_1E_2}{\sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2z_0E_1E_2}} = \frac{E_1E_2}{E_3(z_0)}$$

Uvrštavanjem rezultata integriranja δ -funkcije dobivamo:

$$\begin{aligned} d^2R_3 &= \frac{1}{8(2\pi)^{2D-3}} \frac{2\pi^{(D-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)} \frac{2\pi^{(D-2)/2}}{\Gamma\left(\frac{D-2}{2}\right)} dE_1E_1^{D-4} dE_2E_2^{D-4} (1 - z_0^2)^{D/2-2} \\ &= \frac{1}{2^{2D-2}\pi^{D-3/2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D-2}{2}\right)} dE_1E_1^{D-4} dE_2E_2^{D-4} (1 - z_0^2)^{D/2-2} \\ &= \frac{1}{2^{2\epsilon+6}\pi^{\epsilon+5/2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\epsilon+3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\epsilon+2}{2}\right)} \frac{1}{2^{\epsilon+1}} Q^{\epsilon+1} dx_1x_1^\epsilon \frac{1}{2^{\epsilon+1}} Q^{\epsilon+1} dx_2x_2^\epsilon (1 - z_0^2)^{\epsilon/2} \\ &= \frac{Q^2}{2^{3\epsilon+8}\pi^{\epsilon+5/2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\epsilon+3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\epsilon+2}{2}\right)} (Q^2)^\epsilon dx_1x_1^\epsilon dx_2x_2^\epsilon \left(\frac{1 - z_0^2}{4}\right)^{\epsilon/2} \\ d^2R_3 &= \frac{Q^2}{16(2\pi)^3\Gamma(2 + \epsilon)} \left(\frac{Q^2}{4\pi}\right)^\epsilon dx_1x_1^\epsilon dx_2x_2^\epsilon \left(\frac{1 - z_0^2}{4}\right)^{\epsilon/2} \end{aligned} \quad (27)$$

5.3. Ukupna širina raspada Γ_R

Granice integracije po x_1 i x_2 su definirani ograničenjem da niti jedna izlazna čestica ne može uzeti više od pola ulazne energije, jer inače ne bi mogao biti zadovoljen zakon očuvanja impulsa. Dakle, $0 \leq x_i \leq 1$. U kombinaciji s (22) dobiju se sljedeće granice:

$$0 \leq x_1 \leq 1, \quad 1 - x_1 \leq x_2 \leq 1$$

Napokon smo u mogućnosti izračunati ukupnu širinu raspada za proces $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g$. Krećemo od (6):

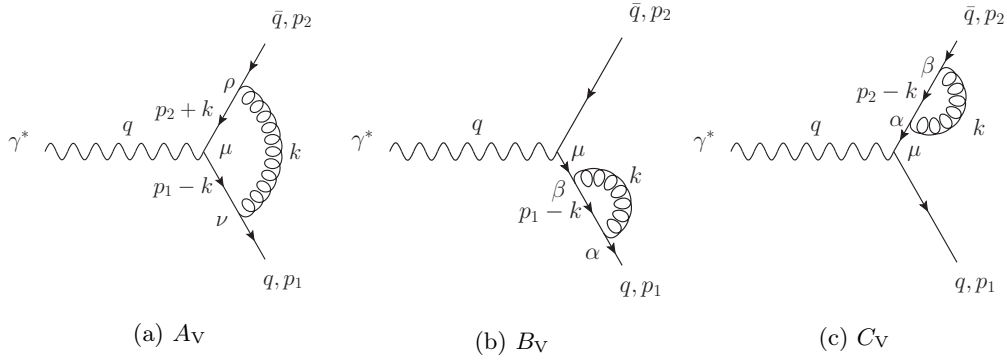
$$\begin{aligned} \Gamma_R &= \int dx_1 dx_2 \frac{d\Gamma_R}{dx_1 dx_2} \\ &= \int dx_1 dx_2 \frac{1}{2E_{CM}} |\mathcal{M}|_{\text{tot}}^2 \frac{d^2R_2}{dx_1 dx_2} \\ &= \int dx_1 dx_2 \frac{1}{2Q} \times 32e_D^2 g_D^2 F(x_1, x_2) \times \frac{Q^2}{16(2\pi)^3\Gamma(2 + \epsilon)} \left(\frac{Q^2}{4\pi}\right)^\epsilon x_1^\epsilon x_2^\epsilon \left(\frac{1 - z_0^2}{4}\right)^{\epsilon/2} \\ &= \frac{2\alpha_s Q}{\pi\Gamma(2 + \epsilon)} \left(\frac{Q^2}{4\pi\mu^2}\right)^\epsilon \int_0^1 dx_1 x_1^\epsilon \int_{1-x_1}^1 dx_2 x_2^\epsilon \left(\frac{1 - z_0^2}{4}\right)^{\epsilon/2} F(x_1, x_2) \\ &= |x_2 = 1 - vx_1, dx_2 = -dv_1| \\ &= \frac{2\alpha_s Q}{\pi\Gamma(2 + \epsilon)} \left(\frac{Q^2}{4\pi\mu^2}\right)^\epsilon \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dv [x_1^2(1-v)v(1-x_1)]^{\epsilon/2} x_1 F(x_1, 1 - vx_1) \\ &= \Gamma_0 \frac{2\alpha_s}{3\pi\Gamma\left(2 + \frac{\epsilon}{2}\right)} \left(\frac{Q^2}{4\pi\mu^2}\right)^{\epsilon/2} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dv [x_1^2(1-v)v(1-x_1)]^{\epsilon/2} x_1 F(x_1, 1 - vx_1) \end{aligned}$$

Integral se može izvrijediti korištenjem integralnog oblika B -funkcije:

$$\int_0^1 dx x^{K-1} (1-x)^{L-1} = B(K, L) = \frac{\Gamma(K)\Gamma(L)}{\Gamma(K+L)} \quad (28)$$

Mi smo rezultat izračunali u Mathematici te on glasi:

$$\Gamma_R = \Gamma_0 \frac{2\alpha_s}{3\pi\Gamma\left(2 + \frac{\epsilon}{2}\right)} \left(\frac{Q^2}{4\pi\mu^2}\right)^\epsilon \frac{\sqrt{\pi}(\epsilon^2 + 4\epsilon + 8)\Gamma\left(2 + \frac{\epsilon}{2}\right)\Gamma^2\left(\frac{\epsilon}{2}\right)}{2(\epsilon + 2)\Gamma\left(\frac{1+\epsilon}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3\epsilon}{2} + 3\right)} \quad (29)$$



Slika 5: Dijagrami za proces $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}$ koji doprinose redu do vodećeg u α_s . Impuls virtualnog gluona označen je s k .

Razvijamo u red po ϵ , koristeći razvoj a^ϵ te razvoje i svojstva Γ funkcije:

$$a^\epsilon = e^{\epsilon \ln a} = 1 + \epsilon \ln a + \frac{1}{2}\epsilon^2 \ln^2 a + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (30)$$

$$\Gamma(1+x) = x\Gamma(x),$$

$$\begin{aligned} \Gamma(\epsilon) &= \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \frac{1}{2}\left(\gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}\right)\epsilon + \frac{1}{6}\left(\gamma^3 + \frac{\gamma\pi}{2} + 2\zeta(3)\right)\epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3), \\ \Gamma\left(\frac{1}{2} + \epsilon\right) &= \sqrt{\pi}\left(1 - (\ln 4 + \gamma)\epsilon + \frac{1}{4}(\pi^2 + 2(\ln 4 + \gamma)^2)\epsilon^2\right) + \mathcal{O}(\epsilon^3), \end{aligned} \quad (31)$$

gdje je γ Euler-Mascheronijeva konstanta, a $\zeta(z)$ Riemannova zeta funkcija. Razvoj širine raspada Γ_R (jedn. (29)) glasi:

$$\begin{aligned} \Gamma_R &= \Gamma_0 \frac{2\alpha_s}{3\pi} \left[\frac{8}{\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon} \left(4 \ln \frac{Q^2}{4\pi\mu^2} + 4\gamma - 6 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\ln^2 \frac{Q^2}{4\pi\mu^2} + (2\gamma - 3) \ln \frac{Q^2}{4\pi\mu^2} - 3\gamma + \gamma^2 - \frac{7}{6}\pi^2 + \frac{19}{2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon) \right] \end{aligned} \quad (32)$$

Kao što smo u uvodu naveli, regularizirani izraz divergira za $\epsilon \rightarrow 0$. Preostaje izračun $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}$ procesa u redu do vodećeg. Očekujemo da će taj rezultat poništiti ove $1/\epsilon^2$ i $1/\epsilon$ divergentne članove.

6. ŠIRINA RASPADA ZA $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}$ U REDU DO VODEĆEG - $\mathcal{O}(\alpha_s)$

Nakon problema s tri čestice, vraćamo se na problem dvije čestice. Ovdje imamo tri dijagrama, od kojih su dva simetrična (slika 5). Svaki od ova tri dijagrama ima dva QCD vrha, što znači da su sami po sebi već reda $\mathcal{O}(\alpha_s)$ prije kvadriranja. Dakle, jedini doprinosi koji nas zanimaju su oni u kombinaciji s A_0 amplitudom (slika 3).

$$|\mathcal{M}|^2 = |A_0 + A_V + B_V + C_V|^2 \quad (33)$$

$$|\mathcal{M}|^2 = \underbrace{|A_0|^2}_{\text{već izračunato}} + \underbrace{2 \operatorname{Re}(A_0 A_V^*) + 2 \operatorname{Re}(A_0 B_V^*) + 2 \operatorname{Re}(A_0 C_V^*)}_{\text{sada računamo}} + \underbrace{\mathcal{O}(\alpha_s^2)}_{\text{viši red}} \quad (34)$$

6.1. Dijagram A_V

Amplitude A_0 i A_V glase:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \bar{u}_1(-ie_D\gamma^\mu)v_2 \times \varepsilon_\mu \\
A_V &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \bar{u}_1(-ig_D T_{il}^a \gamma^\nu) \frac{i(\not{p}_1 - \not{k})}{(p_1 - k)^2} (-ie_D\gamma^\mu) \\
&\quad \frac{i(-\not{p}_2 - \not{k})}{(p_2 + k)^2} (-ig_D T_{ij}^a \gamma^\rho) v_2 \frac{-i(g_{\nu\rho} + \eta k_\nu k_\rho / k^2)}{k^2} \varepsilon_\mu,
\end{aligned} \tag{35}$$

gdje smo s l označili boju virtualnog kvarka između vrhova ν i ρ . Umnožak gornje dvije amplitude daje:

$$\begin{aligned}
\sum_\lambda 2A_0 A_V^* &= 2e_D^2 g_D^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p_1 - k)^2 (p_2 + k)^2 k^2} \underbrace{(-i)i(-i)i(-i)ii}_{i} T_{jl}^a T_{li}^a \times \\
&\quad \times \bar{u}_1 \gamma^\mu v_2 \bar{v}_2 \gamma^\rho (-\not{p}_2 - \not{k}) \gamma_\mu (\not{p}_1 - \not{k}) \gamma^\nu u_1 (g_{\nu\rho} + \eta k_\nu k_\rho / k^2) \\
2(A_0 A_V^*)_{\text{tot}} &= -2ie_D^2 g_D^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{4}{(p_1 - k)^2 (p_2 + k)^2 k^2} \left\{ \text{Tr} \left[\not{p}_1 \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu (\not{p}_2 + \not{k}) \gamma_\mu (\not{p}_1 - \not{k}) \gamma_\nu \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{\eta}{k^2} \text{Tr} \left[\not{p}_1 \gamma^\mu \not{p}_2 \not{k} (\not{p}_2 + \not{k}) \gamma_\mu (\not{p}_1 - \not{k}) \not{k} \right] \right\}
\end{aligned}$$

Izraz unutar vitičastih zagrada iznosi:

$$\begin{aligned}
\left\{ \dots \right\} &= 32 \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \right) \left[(k_1)(k_2) - (k_1)(1_2) + (k_2)(1_2) - (1_2)(1_2) + \frac{\epsilon}{4} k^2 (1_2) \right] \\
&\quad + 8 \frac{\eta}{k^2} \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \right) (1_2) (k^2 - 2(k_1)) (k^2 + 2(k_2)) \\
&= 4 \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \right) \left[-2q^4 + 4q^2 ((k_2) - (k_1)) + 8(k_1)(k_2) + q^2 \epsilon k^2 \right. \\
&\quad \left. + \eta q^2 k^2 + 2\eta q^2 ((k_2) - (k_1)) - 4\eta q^2 \frac{(k_1)(k_2)}{k^2} \right]
\end{aligned}$$

U nazivniku imamo tri člana koja ovise o k . Direktni integral bi bilo teško izračunati, pa pristupamo Feynmanovom parametrizacijom iz (13). Prvo povezujemo faktore $(p_1 - k)^2$ i $(p_2 + k)^2$:

$$\begin{aligned}
a &= (p_1 - k)^2 = k^2 - 2(k_1) \\
b &= (p_2 + k)^2 = k^2 + 2(k_2) & ay + b(1 - y) &= k^2 - 2k \cdot p_y \\
\frac{1}{ab} &= \int_0^1 \frac{dy}{(ay + b(1 - y))^2} & p_y &= yp_1 - (1 - y)p_2
\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}
2(A_0 A_V^*)_{\text{tot}} &= -2ie_D^2 g_D^2 16 \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \right) q^2 \int_0^1 dy \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - 2k \cdot p_y) k^2} \times \\
&\quad \times \left(-2q^2 + (4 - 2\eta)((k_2) - (k_1)) + 8 \frac{(k_1)(k_2)}{q^2} + (\epsilon + \eta)k^2 - 4\eta \frac{(k_1)(k_2)}{k^2} \right)
\end{aligned} \tag{37}$$

Sada spajamo $(k^2 - 2k \cdot p_y)$ i k^2 preko (14):

$$\begin{aligned}
c &= k^2 - 2k \cdot p_y \\
d &= k^2 & cx + d(1 - x) &= k^2 - 2xk \cdot p_y \\
\frac{1}{c^2 d} &= \int_0^1 dx \frac{2x}{(cx + d(1 - x))^3} & &\stackrel{\text{def}}{=} K^2 - C \\
\frac{1}{c^2 d^2} &= \int_0^1 dx \frac{6x(1 - x)}{(cx + d(1 - x))^4} & K &\stackrel{\text{def}}{=} k - xp_y \\
& & C &\stackrel{\text{def}}{=} x^2 p_y^2
\end{aligned} \tag{38}$$

Prilikom uvrštavanja supstitucije u gornji integral, odmah ćemo napraviti supstituciju $k \rightarrow K$, $dk = dK$. Također, odmah izbacujemo članove neparne u K te zamjenjujemo pojavljivanja $K^\mu K^\nu$ s $K^2 g^{\mu\nu}/D$ (jedn. (4)):

$$\begin{aligned}
(k2) - (k1) &= (K + xp_y) \cdot p_2 - (K + xp_y) \cdot p_1 \\
&\rightarrow xp_y \cdot p_2 - xp_y \cdot p_1 \\
&= (xy + x(1-y)) \frac{q^2}{2} = \frac{1}{2} q^2 x \\
(k1)(k2) &= ((K + xp_y) \cdot p_1)((K + xp_y) \cdot p_2) \\
&= (K \cdot p_1)(K \cdot p_2) + K \cdot (\dots) - x(1-y) \frac{q^2}{2} xy \frac{q^2}{2} \\
&\rightarrow \frac{1}{D} K^2 \frac{q^2}{2} - \frac{1}{4} x^2 y (1-y) q^4 = \frac{1}{2D} K^2 q^2 + \frac{1}{4} C q^2 \\
p_y^2 &= -2y(1-y)(12) = -y(1-y)q^2 \\
k^2 &= (K + xp_y)^2 \\
&\rightarrow K^2 + x^2 p_y^2 = K^2 + C
\end{aligned} \tag{39}$$

Dobivamo sljedeći integral²:

$$\begin{aligned}
2(A_0 A_V^*)_{\text{tot}} &= -2ie_D^2 g_D^2 16 \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) q^2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \times \\
&\times \left\{ \frac{2x}{(K^2 - C)^3} \left[-2q^2 + (2 + \eta)q^2 x + \frac{4}{D} K^2 + 2C + (\epsilon + \eta)K^2 + (\epsilon + \eta)C \right] + \right. \\
&\quad \left. \frac{6x(1-x)}{(K^2 - C)^4} (-4\eta) \left[\frac{1}{2D} K^2 q^2 + \frac{1}{4} C q^2 \right] \right\}
\end{aligned} \tag{40}$$

Radi jednostavnosti sve svodimo na integrale I_M (jedn. (11)), odnosno sve zapisujemo u obliku integrala $1/(K^2 - C)^M$, bez K^2 faktora u brojniku:

$$\begin{aligned}
2(A_0 A_V^*)_{\text{tot}} &= -2ie_D^2 g_D^2 16 \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) q^2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \times \\
&\times \left\{ 2x(\epsilon + \eta + \frac{4}{D}) I_2 + 2x(2q^2 + (2 + \eta)q^2 x + 2(\epsilon + \eta + 1 + \frac{2}{D})C) I_3 + \right. \\
&\quad \left. 6x(1-x)(-\eta)q^2 \frac{2}{D} I_3 - 6x(1-x)\eta q^2 \left(1 + \frac{2}{D}\right) C I_4 \right\}
\end{aligned} \tag{41}$$

Integrali I_M konvergiraju za $C = -x^2 y (1-y) q^2 > 0$, što nije zadovoljeno jer je $q^2 > 0$ (to najlakše vidimo u sustavu centra mase: $q^2 = (p_{e^-} + p_{e^+})^2 = (E_{e^-} + E_{e^+})^2 - 0^2 = E_{\text{CM}}^2 > 0$). Definiramo zato $\bar{Q}^2 = -q^2 > 0$ te računamo sve pomoću \bar{Q}^2 umjesto q^2 . Na kraju ćemo analitički proširiti rješenje te se vratiti iz domene $q^2 < 0$ u $q^2 > 0$. Rješenja potrebnih integrala I_M glase (jedn. (12)):

$$\begin{aligned}
I_2 &= i \left(\frac{C}{4\pi} \right)^{2+\epsilon/2} \frac{\Gamma(-\epsilon/2)}{C^2} \\
I_3 &= i \left(\frac{C}{4\pi} \right)^{2+\epsilon/2} \frac{-\Gamma(1-\epsilon/2)}{2C^3} \\
I_4 &= i \left(\frac{C}{4\pi} \right)^{2+\epsilon/2} \frac{\Gamma(2-\epsilon/2)}{6C^4}
\end{aligned} \tag{42}$$

²U cijelom ovom računu se podrazumijevaju infinitezimalni članovi $+i\chi$ u faktorima u nazivniku.

Integrale uvrštavamo u izraz za $2(A_0 A_V^*)_{\text{tot}}$, koji uvrštavamo u izraz za širinu raspada (6):

$$\begin{aligned} \Gamma_V = & \Gamma_0 \frac{8g_D^2}{3} (-i) \int_0^1 dx \int_0^1 dy i \left(\frac{C}{4\pi} \right)^{2+\epsilon/2} \frac{\Gamma(-\epsilon/2)}{C^4} \times \\ & \times \left\{ 2x(\epsilon + \eta + \frac{4}{D})C^2 + 2x(-2q^2 + (2 + \eta)q^2 x + 2(\epsilon + \eta + 1 + \frac{2}{D})C) C \frac{\epsilon}{2} \right. \\ & \left. - 6x(1-x)\eta q^2 \frac{2}{D} C \frac{\epsilon}{2} - x(1-x)\eta q^2 (1 + \frac{2}{D})(-\frac{\epsilon}{2})(1 - \frac{\epsilon}{2}) \right\} \end{aligned} \quad (43)$$

Integral se može riješiti koristeći (12) i (28):

$$\Gamma_V = - \frac{\sqrt{\pi}(\epsilon^2 + \epsilon + 4)\Gamma(\frac{\epsilon}{2})\Gamma(-\frac{\epsilon}{2})}{2^{\epsilon+2}\Gamma(\frac{3+\epsilon}{2})} \left(\frac{Q^2}{4\pi\mu^2} \right)^{\epsilon/2} \quad (44)$$

Koristeći (30) i (31) dobivamo razvoj po ϵ :

$$\begin{aligned} \Gamma_V = & \Gamma_0 \frac{2\alpha_s}{3\pi} \text{Re} \left[-\frac{8}{\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon} \left(-4 \ln \frac{\bar{Q}^2}{4\pi\mu^2} - 4\gamma + 6 \right) + \right. \\ & \left. + \left(-\ln^2 \frac{\bar{Q}^2}{4\pi\mu^2} - (2\gamma - 3) \ln \frac{\bar{Q}^2}{4\pi\mu^2} + 3\gamma - \gamma^2 - 8 + \frac{\pi^2}{6} \right) + \mathcal{O}(\epsilon) \right] \end{aligned} \quad (45)$$

Dobiven izraz je analitičan s obzirom na \bar{Q}^2 , što opravdava naš postupak i omogućuje nam da se vratimo iz $q^2 < 0$ na $q^2 > 0$ vrijednost. Pritom transformiramo logaritme na sljedeći način, gdje je odabir grane određen predznakom $i\chi$ konstante iz propagatora:

$$\begin{aligned} \ln(-q^2) &= \ln q^2 - i\pi \\ \ln^2(-q^2) &= \ln^2 q^2 - 2i\pi \ln q^2 - \pi^2 \end{aligned} \quad (46)$$

U konačnici, $\mathcal{O}(\alpha_s)$ član udarnog presjeka za $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}$ proces iznosi:

$$\begin{aligned} \Gamma_V = & \Gamma_0 \frac{2\alpha_s}{3\pi} \left[-\frac{8}{\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon} \left(-4 \ln \frac{Q^2}{4\pi\mu^2} - 4\gamma + 6 \right) + \right. \\ & \left. + \left(-\ln^2 \frac{Q^2}{4\pi\mu^2} - (2\gamma - 3) \ln \frac{Q^2}{4\pi\mu^2} + 3\gamma - \gamma^2 + \frac{7}{6}\pi^2 - 8 \right) + \mathcal{O}(\epsilon) \right] \end{aligned} \quad (47)$$

6.2. Dijagrami B_V i C_V

Pokazat ćemo da dijagrami B_V i C_V u kombinaciji s A_0 ne daju nikakav doprinos. Izvod radimo za B_V , dok je za C_V izvod u potpunosti analogan. Amplituda dijagrama B_V glasi:

$$\begin{aligned} B_V &= \bar{u}_1 \Sigma(p_1) \frac{i\cancel{p}_1}{p_1^2} (-ie_D \gamma^\mu) v_2 \varepsilon_\mu \\ \Sigma(p) &= \sum_{a=1}^8 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (-ig_D \gamma_\alpha T_{ij}^a) \frac{i(\cancel{p} - \cancel{k})}{(p-k)^2} (-ig_D \gamma_\beta T_{ji}^a) \frac{-i(g^{\alpha\beta} + \eta k^\alpha k^\beta / k^2)}{k^2} \end{aligned}$$

Dio amplitude koji se odnosi na petlju smo označili s $\Sigma(p_1)$. Pokazat ćemo da je taj dio jednak 0 te da je proporcionalan s \cancel{p} , čime se ujedno poništava i divergencija u propagatoru $i\cancel{p}_1/p_1^2$ u B_V .

$$\begin{aligned} \Sigma(p) &= \left(\sum_{a=1}^8 T_{ij}^a T_{ji}^a \right) (-g_D^2) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p-k)^2 k^2} \left[\gamma_\alpha (\cancel{p} - \cancel{k}) \gamma^\alpha + \frac{\eta \cancel{k} (\cancel{p} - \cancel{k}) \cancel{k}}{k^2} \right] \\ &\propto \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left[\frac{-(2+\epsilon)(\cancel{p} - \cancel{k}) - \eta(\cancel{p} + \cancel{k})}{(p-k)^2 k^2} + \frac{2\eta(k \cdot p) \cancel{k}}{(p-k)^2 k^4} \right] \end{aligned}$$

Koristimo Feynmanovu parametrizaciju (jedn. (14)):

$$\begin{aligned}
a &= (p-k)^2 & \not{p} - \not{k} &\rightarrow \not{p}(1-x) \\
b &= k^2 & \not{p} + \not{k} &\rightarrow \not{p}(1+x) \\
ax + b(1-x) &= k^2 - 2xp \cdot k + xp^2 \stackrel{\text{def}}{=} K^2 - C & (p \cdot k)k^2 &= (K \cdot p + xp^2)(\not{K} + x\not{p}) \\
K &\stackrel{\text{def}}{=} k - xp & &\rightarrow \not{K}K \cdot p + x^2 p^2 \not{p} \\
C &\stackrel{\text{def}}{=} -p^2 x(1-x) & &= \not{p}(\frac{1}{D}K^2 + x^2 p^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{ab} &= \int_0^1 \frac{1}{(ax + b(1-x))^2} dx \\
\frac{1}{ab^2} &= \int_0^1 \frac{2(1-x)}{(ax + b(1-x))^3} dx \\
\Sigma(p) &\propto \not{p} \int \frac{d^D K}{(2\pi)^D} \int_0^1 dx \left[\frac{-(2+\epsilon)(1-x) - \eta(1+x)}{(K^2 - C)^2} + 2(1-x)(2\eta) \frac{\frac{1}{D}K^2 + x^2 p^2}{(K^2 - C)^3} \right] \\
&= \not{p} \int_0^1 dx \left[\left(-(2+\epsilon)(1-x) - \eta(1+x) + 4(1-x)\eta \frac{1}{D} \right) I_2 + 4(1-x)\eta \left(x^2 p^2 + \frac{C}{D} \right) I_3 \right] \\
&= -i\not{p}(1+\eta) \left(\frac{p^2}{4\pi} \right)^{\epsilon/2} \frac{(\epsilon+2)\Gamma(1+\epsilon/2)\Gamma(-\epsilon/2)}{2^{\epsilon+6}\pi^{3/2}\Gamma((\epsilon+3)/2)}
\end{aligned}$$

Idemo po redu: dobili smo \not{p} faktor koji nam je bio potreban da poništimo divergenciju iz B_V . Dobili smo faktor oblika $(p^2)^{\epsilon/2}$ koji je dobro definiran za svaki $\epsilon \neq 0$ i iznosi 0, zbog $p^2 = 0$. No, tu je i faktor $\Gamma(-\epsilon/2)$ koji divergira za $\epsilon = 0$. Sada se pozivamo na napomenu na početku da je ϵ zadnje za što ćemo uzeti limes u nuli. Dakle, što se tiče ϵ parametra, B_V je uvijek 0, pa je limes u bilo koju točku isto 0. Time smo pokazati da (u dimenzionalnoj regularizaciji) ovaj dijagram ne doprinosi udarnom presjeku.

7. UKUPNA ŠIRINA RASPADA $\gamma^* \rightarrow \text{partoni}$ DO $\mathcal{O}(\alpha_s)$

Obradili smo sve slučajeve koji nas zanimaju, proces $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}$ i proces $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g$ u dva najniža reda računa smetnje, to jest do $\mathcal{O}(\alpha_s)$. Počeli smo računati s pretpostavkom (ili nadom) da će ukupna širina raspada biti konačna i smisljena. I zbilja, uspoređujući izraze za Γ_R (32) i Γ_V (47) vidimo da se divergentni članovi poništavaju:

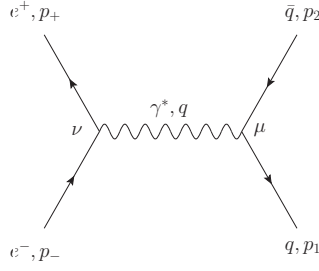
$$\begin{aligned}
\Gamma_R &= \Gamma_0 \frac{2\alpha_s}{3\pi} \left[\frac{8}{\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon} \left(4 \ln \frac{Q^2}{4\pi\mu^2} + 4\gamma - 6 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left(\ln^2 \frac{Q^2}{4\pi\mu^2} + (2\gamma - 3) \ln \frac{Q^2}{4\pi\mu^2} - 3\gamma + \gamma^2 - \frac{7}{6}\pi^2 + \frac{19}{2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon) \right] \quad (32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_V &= \Gamma_0 \frac{2\alpha_s}{3\pi} \left[-\frac{8}{\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon} \left(-4 \ln \frac{Q^2}{4\pi\mu^2} - 4\gamma + 6 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left(-\ln^2 \frac{Q^2}{4\pi\mu^2} - (2\gamma - 3) \ln \frac{Q^2}{4\pi\mu^2} + 3\gamma - \gamma^2 + \frac{7}{6}\pi^2 - 8 \right) + \mathcal{O}(\epsilon) \right] \quad (47)
\end{aligned}$$

Konačan rezultat glasi:

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \Gamma_0 + \Gamma_R + \Gamma_V + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \\
\Gamma &= \Gamma_0 \left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \right) \\
\Gamma &= 3\alpha Q \left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \right) \quad (48)
\end{aligned}$$

gdje smo iskoristili (20) i uvrstili na kraju $\epsilon = 0$.



Slika 6: Dijagram \tilde{A}_0 , kao primjer doprinosa u procesu $e^-e^+ \rightarrow \text{partoni}$.

8. TOTALNI UDARNI PRESJEK ZA PROCES $e^-e^+ \rightarrow \text{partoni}$

Izračunali smo ukupnu širinu raspada za proces $\gamma^* \rightarrow \text{partoni}$ u redu do vodećeg po QCD konstanti vezanja α_s . Preostaje uračunati početni dio procesa, $e^-e^+ \rightarrow \gamma^*$.

Promotrimo neki od dijagrama za proces $e^-e^+ \rightarrow \text{partoni}$, primjerice dijagram na slici 6. Amplituda za taj proces glasi:

$$-i\mathcal{M} = \bar{v}_+(-ie\gamma^\nu)u_- \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \bar{u}_1(-ie\gamma^\mu)v_2,$$

gdje su u_- i v_+ spinori elektrona i pozitrona. Udarni presjek proporcionalan je prosjeku $|\mathcal{M}|_{\text{tot}}^2$ po spinovima ulaznih elektrona:

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|_{\text{tot}}^2 \rangle &= \frac{1}{4} \sum_{s_-, s_+} |\mathcal{M}|_{\text{tot}}^2 \\ &= \frac{1}{4} \sum_{s_-, s_+, s_1, s_2} 3 \frac{1}{q^4} e^2 \bar{v}_+ \gamma^\nu u_- \bar{u}_1 \gamma_\nu v_2 e^2 \bar{v}_2 \gamma^\mu u_1 \bar{u}_- \gamma_\mu v_+ \\ &= \frac{3}{4} \frac{1}{q^4} \left(e^2 \text{Tr} [\not{p}_+ \gamma^\nu \not{p}_- \gamma^\mu] \right) \left(e^2 \text{Tr} [\not{p}_1 \gamma_\nu \not{p}_2 \gamma_\mu] \right) \\ &\equiv \frac{3}{4} \frac{1}{q^4} (L_{e^-e^+})^{\mu\nu} (L_{q\bar{q}})_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (49)$$

gdje smo uveli pokratu $(L_{e^-e^+})^{\mu\nu}$, koja se odnosi na anihilaciju elektron-pozitron para i pokratu $(L_{q\bar{q}})_{\mu\nu}$, koja se odnosi na stvaranje kvark-antikvark para. Općenito će se i za ostale dijagrame procesa $e^-e^+ \rightarrow \text{partoni}$ (vidi sliku 1) dobiti isti oblik, gdje će umjesto $(L_{q\bar{q}})_{\mu\nu}$ stajati neki drugi tenzor. Označimo ga samo s $L_{\mu\nu}$. Ako usporedimo ovaj račun s računom raspada $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}$ ili $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g$, vidjet ćemo da smo u biti bili računali samo dio tog tenzora, konkretno:

$$\Gamma_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}} \propto L^\mu{}_\mu.$$

Pokazat ćemo da nam je ta informacija dovoljna da rekonstruiramo $\langle |\mathcal{M}|_{\text{tot}}^2 \rangle$ za proces $e^-e^+ \rightarrow \text{partoni}$. Prvo, tenzor $L_{\mu\nu}$ ovisi samo o jednom vektoru, impulsu fotona $q = p_- + p_+$, zbog čega se može zapisati kao:

$$L_{\mu\nu} = Ag_{\mu\nu} + Bq_\mu q_\nu,$$

gdje su A i B funkcije od q^2 . Drugo, zbog baždarnosti invarijantnosti, kontrakcija $L_{\mu\nu}$ s vektorom q^μ iščezava:

$$q^\mu L_{\mu\nu} = q^\nu L_{\mu\nu} = 0,$$

iz čega slijedi:

$$q^\mu L_{\mu\nu} = Aq_\nu + Bq^2 q_\nu = 0 \quad \implies \quad Bq^2 = -A.$$

Sada možemo zapisati cijeli tenzor $L_{\mu\nu}$ preko traga $L \stackrel{\text{def}}{=} L^\mu{}_\mu$:

$$L \stackrel{\text{def}}{=} L^\mu{}_\mu = 4A + Bq^2 = 3A \quad \implies \quad L_{\mu\nu} = \frac{1}{3} L \left[g_{\mu\nu} - \frac{1}{q^2} q_\mu q_\nu \right]$$

Uspoređujemo izraze (6) za $d\Gamma$ i (7) za $d\sigma$ te koristimo (15) i (49):

$$\begin{aligned}
d\Gamma &= \frac{1}{2Q} |\mathcal{M}_\Gamma|_{\text{tot}}^2 dR = \frac{1}{2Q} \times 3 \sum_{\lambda, \lambda'} L_{\mu\nu} \epsilon_\lambda^\mu \epsilon_{\lambda'}^\nu dR = \frac{1}{2Q} \times 3(-L) dR \\
d\sigma &= \frac{1}{2Q^2} \times \langle |\mathcal{M}_\sigma|_{\text{tot}}^2 \rangle dR = \frac{1}{2Q^2} \times 3 \frac{e^2}{q^4} \left(-\frac{1}{3} L q^2 \right) dR \\
&\implies d\sigma = \frac{4\pi\alpha}{3Q^3} d\Gamma \\
&\implies \sigma = \frac{4\pi\alpha}{3Q^3} \Gamma
\end{aligned} \tag{50}$$

$$\tag{51}$$

Ovdje smo s \mathcal{M}_Γ označili amplitudu za raspad virtualnog fotona γ^* , a s \mathcal{M}_σ amplitudu za raspršenje elektrona i pozitrona. dR predstavlja infinitezimalni dio volumena faznog prostora za općeniti broj izlaznih čestica. Faktor 3 u $d\Gamma$ i $d\sigma$ dolazi od broja boja kvarkova.

Jednadžba (50) opisuje traženu tranziciju iz procesa $\gamma^* \rightarrow \text{partoni}$ u proces $e^-e^+ \rightarrow \text{partoni}$. Završavamo račun s uvrštavanjem relativnog naboja kvarkova e_q :

$$\sigma(e^-e^+ \rightarrow \text{hadroni}) \approx \sigma(e^-e^+ \rightarrow \text{partoni}) = \frac{4\pi\alpha^2 e_q^2}{Q^2} \left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \right) \tag{52}$$

9. ZAKLJUČAK

Proveli smo izračun totalnog udarnog presjeka za proces $e^-e^+ \rightarrow \text{hadroni}$ u nultom (vodećem) i prvom redu u QCD konstanti vezanja α_s . Ukupno je bilo potrebno uračunati šest Feynmanovih dijagrama, četiri za proces $e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}$ i dva za proces $e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}g$. Za eliminaciju divergencija u integralima koji se pojavljuju korištena je dimenzionalna regularizacija.

LITERATURA

- [1] Richard D. Field, *Applications of Perturbative QCD*, 1989
- [2] Wikipedia, N-sphere, <https://en.wikipedia.org/wiki/N-sphere>
- [3] Michael E. Peskin, Daniel V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, 1995
- [4] Wikipedia, Feynman Parametrization, https://en.wikipedia.org/wiki/Feynman_parametrization