

Sjene crnih rupa

Laura Busak

Mentor: izv. prof. Ivica Smolić

Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet
Bijenička 32, Zagreb

Napravljen je pregled analitičkih konstrukcija sjena crnih rupa u općenitom sferno simetričnom i Kerrovu slučaju. Konstrukcija se sastoji od traženja geodezika svjetlosnog tipa usmjerenih od opažača prema crnoj rupi, "u prošlost", te nametanje kritičnog uvjeta skretanja na fotonsku sferu. Objasnjena je definicija i fizikalni princip nastanka sjene crne rupe. Promotreno je pitanje jedinstvenosti crnih rupa i komentirane su dvije klase degeneracije predstavljene u literaturi. Konačno, pripremljen je sažetak predstavljenih postupaka u pregledne korake, zajedno s komentarom o mogućim implikacijama dobivenih rezultata u kontekstu opažačke astrofizike.

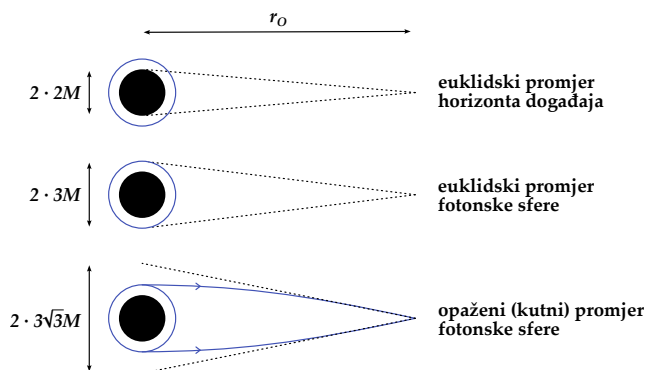
I. UVOD

Einsteinova opća teorija relativnosti dosad je prošla mnoštvo eksperimentalnih potvrda. Zakrivljene putanje svjetlosti (uslijed geometrije, odnosno zakrivljenosti samog prostorvremena) imaju veliku ulogu na toj domeni – koliko jer se na njima temeljila prva eksperimentalna potvrda tijekom pomrčine Sunca 1919., toliko jer se na tom principu danas zasniva čitava opažačka tehnika, metoda gravitacijske leće. [1, 2]

Jedan od većih opažačkih rezultata na modernoj fronti jest slika ("fotografija") crne rupe koju je 2019. objavila Event Horizon Telescope kolaboracija [3]. Crna rupa ondje se vidi kao crni disk, što je upravo rezultat gibanja svjetlosti iz raznih izvora oko crne rupe po zakrivljenim geodezicima. Takav se vizual možda na prvu misao čini očitim, no validno je pitati se *što* točno predstavlja.

"Sjena crne rupe" po definiciji je odgovor na to pitanje. Svjetlost ne može služiti kao proba "rupa" horizonta događaja crne rupe kao što bi u ravnom prostoru mogla za kruto tijelo jer mu ne može prići proizvoljno blizu. Zato, iako možemo očekivati izostanak svjetlosti na području na kojem se nalazi crna rupa, rub takve tamne mrlje neće opisivati "stvarni" obris horizonta, u smislu u kojem to zamišljamo kad svjetlosne zrake mogu putovati jedino ravno. Jednostavna ilustracija efekta zakrivljenih geodezika u Schwarzschildovoj geometriji vidljiva je na slici 1.

Prva skica odozgo na slici 1 prikazuje naivni pristup, gdje zamišljamo da svjetlosne zrake koje definiraju rub sjene prolaze odmah po horizontu događaja i dalje putuju ravno do opažača. To, naravno, nije slučaj; svjetlosni geodezici zatvaraju kružnu orbitu, tzv. fotonski prsten (ili fotonsku sferu), izvan horizonta crne rupe, u Schwarzschildovu slučaju na radijusu $r = 3M$ (u prirodnim jedinicama), što predstavlja najbliži mogući prolazak zrake kraj crne rupe. To je situacija prikazana na drugoj skici. Poistovjećivanje sjene i fotonskog prstena česta je zablude izvan stručnih krugova – disk koji će opažatelj vidjeti u pravilu neće veličinom odgovarati fotonskom prstenu jer treba uzeti u obzir jaku zakrivljenost svjetlosnih geodezika blizu crne rupe. Tek tada dobivamo predodžbu o stvarnoj situaciji, vidljivu na pos-



Slika 1. Usporedba veličine horizonta događaja i fotonskog prstena, odnosno pogrešnih konstrukcija sjene crne rupe, s njezinom stvarnom veličinom (skroz dolje) za Schwarzschildovo prostorvrijeme. Prilagođeno iz [1, 4].

ljednjoj skici.

Za različite geometrije pitanje oblika i veličine sjene zahtijeva precizan matematički tretman. Svojstva sjene u pravilu nisu odmah očita iz svojstava samog prostorvremena, pogotovo jer je sjena po definiciji ovisna o opažaču. Budući da sad postoji mogućnost direktnog opažanja sjena realnih crnih rupa, značaj dobrog razumijevanja utjecaja fizikalnog modela na izgled sjene ne zahtijeva mnogo obrazloženja.

Ovdje ćemo napraviti pregled dosadašnjih analitičkih konstrukcija sjena crnih rupa raznih geometrija. Temeljni princip objasniti ćemo na primjeru općenitog statičkog, sferno simetričnog prostorvremena i izvrijediti na primjeru Schwarzschildove metrike. Komentirat ćemo kvalitativna svojstva dobivenih konstrukcija. Također ćemo promotriti pitanje jedinstvenosti sjene, odnosno njezinu razlikovnu moć među geometrijama koje nisu izometrične, ponovno poglavito na primjeru sferno simetričnog slučaja. Demonstrirane principe zatim ćemo komentirati u kontekstu nenabijene rotirajuće (Kerrove) crne rupe i prezentirati glavne rezultate.

Račun ćemo uvelike bazirati na radovima [1] i [5], uz potrebne modifikacije i nadopune. Još napomenimo da ćemo svugdje koristiti $(-, +, +, +)$ signaturu metrike i prirodne jedinice $c = G = 1$.

II. ODREĐIVANJE SJENE CRNE RUPE

Iako sjena crne rupe jest jednostavno "ono što opažamo gledajući u crnu rupu", njezina je fizikalna, odnosno matematička definicija prošla više etapa razvoja. Već od sredine prošlog stoljeća poznata je tzv. Synegeva formula:

$$\sin^2 \alpha_{\text{esc}} = \frac{27M^2(1 - 2M/r_O)}{r_O^2}, \quad (1)$$

kojom je on definirao "escape cone", odnosno stožac koji definira usmjerenja fotona emitiranih s površine jako gravitirajućeg objekta u Schwarzschildovoj geometriji, a koji ne ostaju gravitacijski vezani za nju, već mogu otići u beskonačnost [6]. Kasnije se javlja čitavo mnoštvo definicija – koristan pregled dan je u [1] – ali sve se fizikalno svode na isti argument: postoji kritični upadni kut za koji svi fotoni završavaju na fotonskom prstenu i koji tako određuje rub sjene crne rupe.

U svim daljnjim postupcima pretpostavljat ćemo da crnu rupu promatramo ispred savršeno svijetle pozadine, odnosno da za bilo koji kut promatranja postoji točkasti izvor čija zraka se raspršuje na crnoj rupi na očekivani način. Naša će "sjena" stoga biti svojevrsna silueta crne rupe na svijetloj pozadini, pod utjecajem zakrivljenosti svjetlosnih zraka. Također pretpostavljamo da između crne rupe i opažača ne postoje dodatni izvori svjetlosti. Naravno, takav scenarij nije astrofizički relevantan, ali predstavlja idealni model unutar kojeg možemo postaviti temelje.

Što se tiče astrofizičke relevantnosti, jasno je da oko i iza realne crne rupe, zanemarujući i dalje izvore između crne rupe i opažača, može biti više različitih izvora svjetlosti. Akrecijski disk idealan je kandidat za promatranje sjene jer su emitirani fotoni vrlo koncentrirani blizu horizonta događaja i fotonskih prstena. Međutim, akrecijski disk kao izvor predstavlja posebne izazove jer nije statički, a općenito ni konstantnog toka zračenja (vremenski ni prostorno). Postoje pojednostavljene analize sjena crnih rupa s akrecijskim diskom koje daju, bar dijelom, analitičke rezultate – najznamenitije [7] – ali one su van dosega naše rasprave.

Mi ćemo se, dakle, zadržati na idealno svijetloj pozadini. Prema tome, možemo zamisliti da svjetlosne zrake kreću unatrag, emitirane od opažača "u prošlost". Tada za neku zraku očekujemo da će ili skrenuti pod utjecajem gravitacije crne rupe i završiti u beskonačnosti, pri čemu je možemo identificirati s nekom svijetlom točkom ("izvorom") na pozadini, ili da će ostati zarobljena, pri čemu ćemo je povezati s tamnim dijelom slike, odnosno sjenom. Uvjet koji nam daje potonje zrake jest upravo ono što tražimo.

A. Sjena statičke sferno simetrične crne rupe

Konstrukciji sjene crne rupe možemo pristupiti na nekoliko načina, ovisno, prije svega, o cilju daljnjeg

računa. Jedna je metoda primjenjiva na sva statična, sferno simetrična prostorvremena, a sastoji se od dvaju glavnih koraka:

- Izvod izraza za trajektoriju općenite svjetlosne zrake, odnosno njezin kut otklona, emitirane od opažača "u prošlost".
- Izdvajanje onih zraka koje asimptotski ulaze u nestabilne kružne orbite.

Gornji koraci detaljno su izloženi u [1]. U nastavku ove cjeline slijedi detaljan pregled primjene tih koraka na općenitom sferno simetričnom prostorvremenu, kao što je predstavljeno u tom radu, uz nadopune i komentare te poneke izmjene korisne za kasnije.

Uzmimo općenitu statičku sferno simetričnu metriku, odnosno odgovarajući linijski element:

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + D(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2)$$

gdje su $A(r)$, $B(r)$ i $D(r)$ svugdje pozitivne funkcije.

Sad možemo napisati pripadni lagranžijan $\mathcal{L}(x, \dot{x})$:

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = \quad (3)$$

$$= \frac{1}{2} \left(-A(r)\dot{t}^2 + B(r)\dot{r}^2 + D(r)\dot{\phi}^2 \right), \quad (4)$$

pri čemu smo se ograničili na $\theta = \pi/2$ jer, zbog simetrije, uvijek možemo tako odabrati koordinatni sustav i gibanje ostaje planarno. Dalje zapisujemo Euler-Langrangeove jednadžbe:

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0. \quad (5)$$

Odmah uočavamo da vrijedi:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad (6)$$

te iz t i ϕ komponenti E-L jednadžbi jednostavno dobivamo konstante gibanja:

$$E \equiv A(r)\dot{t} \quad (7)$$

$$L \equiv D(r)\dot{\phi}. \quad (8)$$

Običaj je kod razmatranja gibanja masivne čestice konstante gibanja E i L predstaviti u obliku koji možemo interpretirati kao energiju i angularni moment čestice, respektivno, *po jedinici mase*. Primjer za Schwarzschildovo prostorvrijeme standardno se obrađuje u uvodima u opću teoriju relativnosti, gdje se uzima u obzir da je $\lambda = \tau/\mu$, a τ vlastito vrijeme i μ odgovarajuća masa. S obzirom da će geodezici s kojima ćemo mi raditi biti svjetlosnog tipa, korisno je istaknuti da, iako u limesu $\mu \rightarrow 0$ veličine dane po jedinici mase individualno divergiraju, njihov omjer ostaje konačan:

$$b \equiv \frac{L}{\sqrt{E^2 - \mu^2}} \rightarrow \frac{L}{E} \quad (9)$$

ili, alternativno:

$$b \equiv \frac{L/\mu}{E/\mu} = \frac{L}{E}. \quad (10)$$

Omjer b predstavlja novu konstantu gibanja, udarni parametar upadnog fotona – u direktnoj analogiji s klasičnom mehanikom – i bit će od velike važnosti za daljnju raspravu. [1, 2]

Sad se vraćamo na metriku danu relacijom 2 i tražimo geodezike svjetlosnog tipa, $ds^2 = 0$:

$$-A(r)\dot{t}^2 + B(r)\dot{r}^2 + D(r)\dot{\phi}^2 = 0 \quad (11)$$

Dobivenu jednadžbu možemo preoblikovati tako da dobijemo jednadžbu orbite $(dr/d\phi)^2 = \dot{r}^2/\dot{\phi}^2$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 &= \frac{1}{B(r)} \left(A(r) \frac{\dot{t}^2}{\dot{\phi}^2} - D(r) \right) = \\ &= \frac{D(r)}{B(r)} \left(\frac{A(r)}{D(r)} \frac{\dot{t}^2}{\dot{\phi}^2} - 1 \right) = \\ &= \frac{D(r)}{B(r)} \left(\frac{D(r)}{A(r)} \frac{E^2}{L^2} - 1 \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Vidimo da jednadžba orbite ovisi samo o jednom parametru – upravo udarnom parametru fotona. Međutim, iako fiksiranje udarnog parametra odgovara izboru orbite, njezina će konkretna svojstva biti određena svojstvima prostorvremena. Korisno je, stoga, prepoznati oblik gornje jednadžbe kao gibanje u 1D efektivnom potencijalu $(dr/d\phi)^2 + V_{\text{eff}}(r) = 0$ i postaviti uvjet kružne orbite fotona:

$$V_{\text{eff}}(r) = 0, \quad \frac{dV_{\text{eff}}(r)}{dr} = 0. \quad (13)$$

Alternativno možemo promotriti slučaj u kojem trajektorija doseže minimalni radijus R te zatim odlazi u beskonačnost (slika 2). Tada iz zahtjeva da je $r = R$ točka obrata i jednadžbe 12 dobivamo vezu udarnog parametra b i minimalne radijalne koordinate R :

$$\frac{1}{b^2} = \frac{E^2}{L^2} = \frac{A(R)}{D(R)}. \quad (14)$$

Sad možemo uvesti funkciju $h^{-2}(r)$ kao:

$$h^{-2}(r) = \frac{D(r)}{A(r)}, \quad (15)$$

pa možemo jednadžbu gibanja 12 napisati nešto sugestivnije:

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{D(r)}{B(r)} \left(\frac{h^{-2}(r)}{h^{-2}(R)} - 1 \right), \quad (16)$$

pri čemu smo prepoznali jednostavnu vezu s udarnim parametrom, $b^2 = h^{-2}(R)$.

Funkcija $h^{-2}(r)$ odgovara svojevrsnom novom efektivnom potencijalu. Pritom smo uzeli oblik koji se za slučaj Schwarzschildova prostorvremena poklapa s rezultatom iz [2] (umjesto [1]) jer tada $h(r) = 1/\sqrt{h^{-2}(r)}$ divergira u ishodištu, ali ne i na horizontu, što će nam biti povoljnije za kasnije rasprave. Lako vidimo da sad radijus kružne orbite r_{ph} , odnosno radijus fotonskog prstena, odgovara uvjetu $dr/d\phi|_{r_{\text{ph}}} = 0$ i $d^2r/d\phi^2|_{r_{\text{ph}}} = 0$, ili:

$$\frac{d}{dr} (h^{-2}(r)) = 0. \quad (17)$$

Sada smo spremni odrediti kutni polumjer sjene crne rupe. Pritom pretpostavljamo da je opažač također statički, odnosno da se giba po t -liniji u relevantnom prostorvremenu. Slučaj opažača s relativnim gibanjem zahtijeva nešto detaljniji tretman koji je obrađen za aksijalno simetrično prostorvrijeme u [8]. Za naše potrebe ključno je da efekt na tangenti prostor predstavljen ondje nama nije relevantan jer čuva sfernu simetriju, što su naglasili i autori u [1].

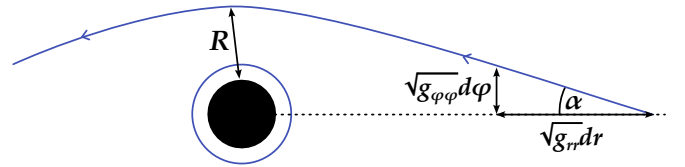
Kut pod kojim (statički) opažač na radijalnoj koordinati $r = r_O$ vidi da svjetlosna zraka koju odašilje skreće kao što smo zadali (slika 2) zadovoljava izraz:

$$\text{ctg}^2 \alpha = \frac{B(r)}{D(r)} \left(\frac{dr}{d\phi} \right)_{r=r_O}^2 = \quad (18)$$

$$\stackrel{(16)}{=} \frac{h^{-2}(r_O)}{h^{-2}(R)} - 1, \quad (19)$$

odnosno, koristeći trigonometrijski identitet $1 + \text{ctg}^2 \alpha = 1/\sin^2 \alpha$:

$$\sin^2 \alpha = \frac{h^{-2}(R)}{h^{-2}(r_O)}. \quad (20)$$



Slika 2. Primjer izračuna za svjetlosnu zraku emitiranu od opažača pod kutom α . Prikazani su horizont događaja i fotonska sfera crne rupe (plava kružnica). Prilagođeno iz [1, 4].

Sjena odgovara kutu $\alpha = \alpha_{\text{sh}}$ za koji se trajektorija asimptotski približava kružnim fotonskim orbitama, odnosno $R \rightarrow r_{\text{ph}}$:

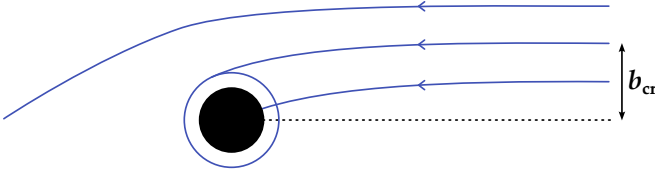
$$\sin^2 \alpha_{\text{sh}} = \frac{h^{-2}(r_{\text{ph}})}{h^{-2}(r_O)}. \quad (21)$$

S obzirom na sfernu simetriju, sjena crne rupe zadane linijskim elementom 2 jest disk kutnog polumjera α_{sh} .

Primijetimo da sad možemo uvesti kritičnu vrijednost udarnog parametra:

$$b_{\text{cr}}^2 = h^{-2}(r_{\text{ph}}) \quad (22)$$

kao upravo onu vrijednost koja će odgovarati sjeni. Sjetimo li se da je udarni parametar omogućavao izbor konkretne orbite u jednadžbi 12, možemo shvatiti kritični udarni parametar kao izbor prvog svjetlosnog geodezika koji završava u fotonskoj sferi. Intuitivna (geometrijska) interpretacija vidljiva je na slici 3.



Slika 3. Trajektorije fotona u vakuumu određene udarnim parametrima, s istaknutim kritičnim udarnim parametrom. Prikazani su horizont događaja i fotonska sfera crne rupe. Prilagođeno iz [1, 4].

1. Schwarzschildova crna rupa

Za Schwarzschildovo prostorvrijeme imamo:

$$A(r) = \frac{1}{B(r)} = 1 - \frac{2M}{r}, \quad D(r) = r^2 \quad (23)$$

pa funkcija $h^{-2}(r)$ postaje:

$$h^{-2}(r) = \frac{r^2}{1 - 2M/r}. \quad (24)$$

Iz uvjeta 17 dobivamo radijus fotonske sfere r_{ph} :

$$\begin{aligned} \frac{2r_{\text{ph}} - 6M}{(1 - 2M/r)^2} &\stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow r_{\text{ph}} &= 3M, \quad b_{\text{cr}} = 3\sqrt{3}M, \end{aligned} \quad (25)$$

pa tako i izraz za kutni polumjer sjene Schwarzschildove crne rupe:

$$\sin^2 \alpha_{\text{sh}} \stackrel{(21)}{=} \frac{27M^2(1 - 2M/r_O)}{r_O^2}, \quad (26)$$

koji točno odgovara Syngevoj formuli (izraz 1).

Astrofizički važan slučaj, kad je opažatelj jako daleko od crne rupe, lako je promatrati shvatimo li ga tako da faktor m postane zanemariv u odnosu na r_O , što znači da drugi član u gornjem izrazu možemo zanemariti:

$$\sin \alpha_{\text{sh}} \approx \alpha_{\text{sh}} \approx \frac{3\sqrt{3}M}{r_O}. \quad (27)$$

2. Slučaj vrlo udaljenog opažatelja

Primamljivo je, primijetimo li da jednadžba 27 nagoviješta da bi moglo vrijediti $\alpha_{\text{sh}} = b_{\text{cr}}/r_O$, razmotriti limes udaljenog opažatelja i u općenitijem slučaju.

Uzmimo prvo da je prostorvrijeme opisano metrikom iz izraza 2 također asimptotski ravno, odnosno da vrijedi:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A(r), B(r), D(r)/r^2 = 1. \quad (28)$$

Kutni polumjer sjene tada možemo aproksimirati koristeći te limese i aproksimaciju malog kuta:

$$\sin \alpha_{\text{sh}} \approx \alpha_{\text{sh}} \quad (29)$$

$$= \frac{b_{\text{cr}} \sqrt{A(r_O)}}{\sqrt{D(r_O)}} \rightarrow \frac{b_{\text{cr}}}{r_O}. \quad (30)$$

Dobili smo upravo očekivani izraz. Kritični udarni parametar time dobiva dodatni značaj, koji je u skladu s njegovom klasičnom interpretacijom. Međutim, pritom je bila ključna pretpostavka asimptotske ravnosti – ukoliko prostorvrijeme nije asimptotski ravno, ne možemo jednostavno izvrijedniti limes dalekog opažatelja. To samo znači da, ako želimo usporediti sjene dviju statičkih sferno simetričnih crnih rupa čija prostorvremena nisu oba asimptotski ravna, moramo koristiti pune izraze za kutni polumjer sjene, a ne samo usporediti b_{cr} .

B. Sjena Kerrove crne rupe

S obzirom da su fotonski prstenovi granični slučaj koji definira rub sjene crne rupe (odnosno, geodezici koji asimptotski teže u njih), jasno je da je glavno pitanje kojim se ova analiza može proširiti na slučaj rotirajuće – konkretno Kerrove – crne rupe upravo pitanje promjene fotonskih prstenova dodatkom rotacije. Kao što se može očekivati, izvod je zamjetno kompliciraniji nego u sferno simetričnom slučaju; detalji su izloženi u [1] i [9], a ovdje ćemo pružiti kratak pregled njihovih rezultata.

U Kerrovu prostorvremenu umjesto "fotonskog prstena" govorimo o "fotonskim regijama" ili "ljuskama". Za ekvatorijalne svjetlosne zrake Kerrova crna rupa ima dvije fotonske sfere, jednu korotirajuću i jednu kontrorotirajuću. U neekvatorijalnom slučaju javljaju se fotonske regije ispunjene sferičnim svjetlosnim geodezicima, u smislu da općenito ne leže u ravnini, već opisuju sferu konstantne radijalne koordinate. Određivanje fotonskih regija netrivialan je zadatak jer zahtijeva integraciju jed-

nadžbe geodezika u Kerrovoj metrici:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma(r, \theta)} \right) dt^2 - \frac{4aM \sin^2 \theta}{\Sigma(r, \theta)} dt d\phi + \frac{\Sigma(r, \theta)}{\Delta(r)} dr^2 + \Sigma(r, \theta) d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2 Mr \sin^2 \theta}{\Sigma(r, \theta)} \right) \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (31)$$

$$\Sigma(r, \theta) = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (32)$$

$$\Delta(r) = r^2 + a^2 - 2Mr, \quad (33)$$

ovdje danoj linijskim elementom u Boyer-Lindquist koordinatama, gdje konstanta a karakterizira angularni moment prostorvremena i M je ADM masa. Međutim, postupak se može provesti sasvim analitički i principom ne odstupajući od koraka koje smo uveli ranije – potrebno je odrediti relevantne konstante gibanja i riješiti jednadžbu za sferične geodezike svjetlosnog tipa.

Pronalaskom fotonskih regija konstrukcija sjene ne odstupajući mnogo od postupka koji smo ranije uveli. Postavljamo opažača na fiksnu poziciju u relevantnim koordinatama, za gornju metriku (r_O, θ_O) , i promatramo svjetlosne geodezike koji kreću od njega "u prošlost". Tako se dobivaju izrazi koji određuju granične krivulje sjene Kerrove crne rupe:

$$\sin \psi(r_p) = \frac{L_E(r_p) - a^2 \sin \theta_O}{\sqrt{K_E(r_p)} \sin \theta_O} \quad (34)$$

$$\sin \theta(r_p) = \frac{\sqrt{\Delta(r_O)} \sqrt{K_E(r_p)}}{r_O^2 - aL_E(r_p) + a^2} \quad (35)$$

gdje je r_p parametar svjetlosne krivulje, ψ azimutalni kut (standardno definiran za Kerrovo prostorvrijeme [9]), a $K_E = K/E^2$ i $L_E = L/E$ konstante gibanja svjetlosne zrake na r_p :

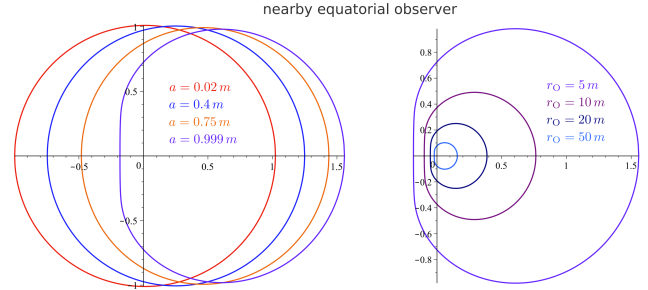
$$K_E(r_p) = \frac{4r_p^2 \Delta(r_p)}{(r_p - m)^2} \quad (36)$$

$$aL_E(r_p) = \frac{-r_p^2(r_p - 3m) - r_p a^2 - a^2 m}{r_p - m}. \quad (37)$$

Parametar r_p potrebno je pustiti da prebriše sve moguće vrijednosti, tako da se $\sin \psi(r_p)$ kreće od -1 do 1 . Tako dobivamo krivulju $(\psi(r_p), \theta(r_p))$, parametriziranu s r_p , koja opisuje rub sjene. Event Horizon Telescope predstavio je rezultat u izrazito dobrom slaganju s predviđanjima o sjeni Kerrove crne rupe, barem na dostupnoj rezoluciji [1, 3].

Jedino svojstvo sjene sferno simetrične crne rupe koje smo diskutirali jest njezin kutni polumjer, odnosno veličina. Za Kerrovu crnu rupu imamo mnogo raznolikiju familiju sjena. Oblik sjene Kerrove crne rupe više

nije općenito disk, već ovisi o položaju opažača i parametrima crne rupe, konkretno ADM masi M i angularnom momentu a , odnosno njihovu omjeru. Primjeri nekoliko sjena u ovisnosti o tim parametrima mogu se vidjeti projicirani na ravninu na slici 4, ovdje preuzetoj iz [1].



Slika 4. Rubne krivulje sjene Kerrove crne rupe za različite angularne momente a s opažačem na $r_O = 5M$ (lijevo) te različite radijalne položaje opažača i fiksirani angularni moment $a = 0.999M$ (desno). Opažač je smješten u ekvatorijalnoj ravnini u svim slučajevima. Preuzeto iz [1].

Dodatkom angularnog momenta, sjena postaje deformirana (spljoštena s jedne strane) duž horizontalne osi, ali je simetrična na refleksiju oko te iste osi. Drugim riječima, dio krivulje koji odgovara $\pi/2 < \psi(r_p) \leq 3\pi/2$ jest zrcalna slika dijela $-\pi/2 < \psi(r_p) \leq \pi/2$. To se očituje iz paramterizacije krivulje, ali nije evidentno iz same metrike te stoga predstavlja zanimljiv rezultat. Deformacija nije vidljiva za polarnog opažača, što je i očekivano, a maksimalna je za ekvatorijalnog, uz fiksni angularni moment a .

III. JEDINSTVENOST SJENE

U kontekstu dosadašnje rasprave, pogotovo s obzirom da se poziva na opažački značaj, prirodno nameće pitanje jedinstvenosti rezultata koje smo dobili. To je pitanje ključno, izrazito u opažačkom kontekstu, gdje je interpretacija rezultata u okviru određenih modela moguća jedino uz poznavanje njihovih međusobnih razlika, odnosno razlikovnih karakteristika. U ovoj cjelini slijedi pregled glavnih ideja opisanih u [5] i, manjim dijelom, [10], kojim ćemo pokušati obuhvatiti pitanje jedinstvenosti.

Razmotrimo ponovno slučaj statičkog sferno simetričnog prostorvremena, uza specijalniji, sugestivniji izbor funkcija $A(r)$ i $B(r)$:

$$A(r) = V(r)\tilde{A}(r), \quad B(r) = \frac{1}{V(r)\tilde{B}(r)}, \quad (38)$$

gdje je $V(r) = 1 - 2m/r$ standardna Schwarzschildova funkcija, ali m nije nužno ADM masa M , već je izabrana tako da fiksira horizont događaja na $r = 2m$. Uvodimo i nekoliko specijalnih zahtjeva:

- $D(r) = r^2$.
- Prostorvrijeme je asimptotski ravno, odnosno vrijedi uvjet 28, ali za funkcije $\tilde{A}(r)$ i $\tilde{B}(r)$.
- Funkcije $\tilde{A}(r)$ i $\tilde{B}(r)$ svugdje su pozitivne izvan horizonta i barem su C^1 .

Efektivni potencijal $h(r)$ (s naglaskom da smo uzeli recipročni korijen u odnosu na raniji račun) sada poprima oblik:

$$h(r) = \frac{\sqrt{\tilde{A}(r)V(r)}}{r}. \quad (39)$$

iz čega odmah vidimo da je kritični udarni parametar oblika:

$$b_{\text{cr}} = \frac{r_{\text{ph}}}{\sqrt{\tilde{A}(r_{\text{ph}})V(r_{\text{ph}})}}. \quad (40)$$

Primijetimo da je $h(r) \geq 0$ izvan horizonta zbog svojstava funkcija $\tilde{A}(r)$ i $V(r)$.

Ranije smo zaključili da je kut α koji vidi opažač dan relacijom 20 za općeniti R i r_O . Primijetimo da se ta relacija može također napisati tako da se istakne značaj udarnog parametra b :

$$\sin \alpha = b h(r_O), \quad (41)$$

odnosno:

$$\sin \alpha_{\text{sh}} = b_{\text{cr}} h(r_O), \quad (42)$$

pri čemu smo ponovno uzeli recipročni korijen efektivnog potencijala. Možemo tvrditi da je sjena degenerirana ako se kut opažanja α_{sh} za općenitu metriku, danu relacijom 2 uza spomenute specijalizacije, točno poklapa sa Schwarzschildovim slučajem. Uvjet degeneracije glasi:

$$\sin \alpha_{\text{sh}} \stackrel{!}{=} \sin \alpha_{\text{sh}}^{(\text{Schw})} \quad (43)$$

pa jednostavnim uvrštavanjem možemo dobiti uvjet na kritični udarni parametar u općenitom prostorvremenu:

$$b_{\text{cr}} \frac{\sqrt{\tilde{A}(r_O)V(r_O)}}{r_O} = b_{\text{cr}}^{(\text{Schw})} \frac{\sqrt{1 \cdot V(r_O)}}{r_O} \quad (44)$$

$$b_{\text{cr}} \stackrel{(25)}{=} \frac{3\sqrt{3}M}{\sqrt{\tilde{A}(r_O)}}. \quad (45)$$

S obzirom da je fizikalno opravdano pretpostaviti da je radijalna koordinata opažača r_O izvan horizonta događaja, nemamo problema s izlučivanjem i kraćenjem Schwarzschildove funkcije $V(r_O)$ u jednakosti 44.

A. Degeneracija sjene klase I

U formi uvjeta 45 odmah se očituje jedna klasa prostorvremena koja, ako opisuju crnu rupu, daju konkretno istu sjenu kao Schwarzschildova crna rupa. Za ta prostorvremena vrijedi jednostavan zahtjev:

$$\tilde{A}(r) = 1, \quad (46)$$

koji je pritom i dovoljan, ako razmatramo degeneraciju za bilo kojeg opažača.

Očigledno zanimljivo svojstvo tog zahtjeva jest da nikako ne ograničava izbor funkcije $\tilde{B}(r)$. To znači da degeneraciju sjene klase I možemo naći kod čitave familije prostorvremena koja nisu potpuno izometrična Schwarzschildovu, ali imaju izometrične hiperplohe konstantne radijalne koordinate – pa tako i $r = \text{konst}$. geodezike – zbog čega i dobivamo degeneraciju. Za taj je zaključak ključno da je koordinata r arealna radijalna koordinata, odnosno takva da čuva površinu sfere $4\pi r^2$, a ne radijalnu udaljenost.

U ovoj klasi degeneracije također vrijedi $m = M$, što se može slijediti iz $\tilde{A}' = 0$ odredimo li radijus fotske sfere r_{ph} iz relacije 17, kao i ranije.

1. Simpson-Visserova (SV) crna rupa

Simpson-Visserovo prostorvrijeme jest *ad hoc* statička, sferno simetrična geometrija opisana linijskim elementom:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{\sqrt{\rho^2 + b^2}} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{\sqrt{\rho^2 + b^2}} \right)^{-1} d\rho^2 + (\rho^2 + b^2)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (47)$$

Poopćuje Schwarzschildovu metriku dodatkom parametra b . U slučaju $0 < b < 2M$ opisuje regularnu crnu rupu, u smislu izostanka centralnog singulariteta. [11]

Međutim, ovim izborom koordinata ρ nije arealni radijus. Možemo izabrati novu radijalnu koordinatu $r^2 \equiv \rho^2 + b^2$ i dobiti oblik linijskog elementa:

$$ds^2 = - V(r) dt^2 + \frac{1}{V(r) \tilde{B}_{\text{SV}}(r)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (48)$$

$$\tilde{B}_{\text{SV}}(r) = 1 - \frac{b^2}{r^2} \quad (49)$$

iz kojeg je očito da se radi o prostorvremenu s degeneracijom sjene klase I za fiksnog promatrača jer vrijedi $\tilde{A}(r) = 1$. [5]

B. Degeneracija sjene klase II

Ako $\tilde{A}(r) \neq 1$, ključno je primijetiti da ne možemo samo odbaciti mogućnost degeneracije jer funkcija $h(r)$ može voditi na više fotonskih sfera. Pitanje jedinstvenosti u tom je slučaju nepotpuno; prvo je potrebno odrediti koja od višestrukih fotonskih sfera definira rub sjene.

Primijetimo neka svojstva funkcije $h(r)$:

- Na fotonskoj sferi, funkcija $h(r_{\text{ph}})$ poprima tim veću vrijednost što je odgovarajući udarni parametar *manji*. To dogovara većoj potencijalnoj barijeri. Konkretno, duž geodezika mora biti zadovoljeno $1/b \geq h(r)$ (detalji su izloženi u [5, 10]).
- Radijalno gibanje jedino može imati točku obrata kad $1/b = h(r)$.
- Funkcija $h(r)$ iščezava na horizontu jer smo fiksirali horizont u nultočki Schwarzschildove funkcije $V(r)$.

Prva dva zaključka u [5] slijede iz oblika hamiltonijana sustava, no lako je vidjeti da ih naši raniji rezultati, poglavito jednakosti 12, 16 i 22, također impliciraju.

Uzevši to u obzir, zajedno s činjenicom da kritični geodezici odgovaraju lokalnom maksimumu $h(r)$, možemo zaključiti da će dominantna fotonska sfera biti ona za koju je potencijalna barijera najveća, odnosno ona koja ima najmanji udarni parametar b .

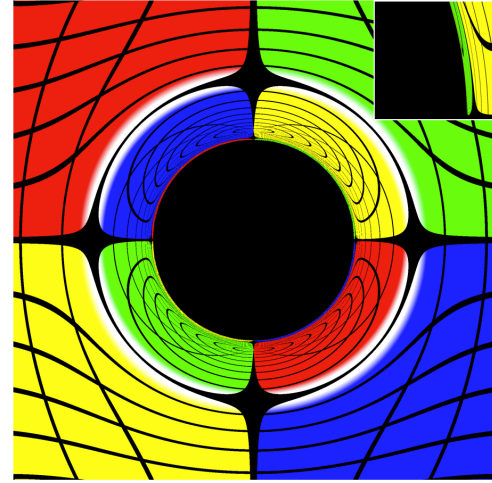
Kombinacijom uvjeta degeneracije danog izrazom 45 te uvjeta iz prve točke ovog dijela, $1/b \geq h(r)$ dobivamo nužan i dovoljan uvjet za $\tilde{A}(r)$ da bismo dobili istu sjenu kao u Schwarzschildovu slučaju:

$$\tilde{A}(r) \leq \frac{r^3}{r - 2m} \left(\frac{\tilde{A}(r_0)}{27M^2} \right), \quad (50)$$

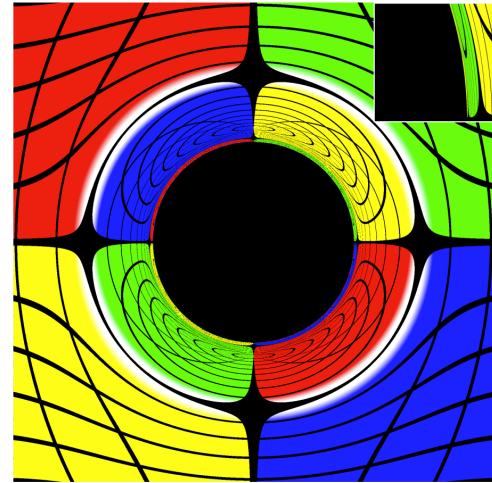
pri čemu jednakost mora vrijediti bar jednom izvan horizonta za neki $r_{\text{ph}}^{\text{dom}} < r_0$, na kojem je garantirano da vrijedi i jednakost 45. Jasno, pretpostavka je da se opažać nalazi izvan horizonta *i* izvan fotonske sfere.

Ovim smo uvjetom definirali degeneraciju sjene klase II kod sferno simetričnih prostorvremena, čiji je jedan slučaj, $\tilde{A}(r) = 1$, zapravo klasa I od ranije.

Fotonske sfere koje nisu dominantne ne ostavaruju uvjete za rub sjene crne rupe, ali mogu imati ulogu u efektu gravitacijske leće. Općenito, ništa dosad nismo tvrdili o efektu leće oko razmatranih crnih rupa i vrijedi naglasiti da degeneracija sjene *ne* povlači degeneraciju uzorka leće. Na primjeru Simpson-Visserova prostorvremena može se napraviti mapa efekta gravitacijske leće, prikazana na slici 5. Vidljivo je da mape ne korespondiraju sasvim, odnosno da Schwarzschildova i SV crna rupa imaju istu sjenu, ali ne i sasvim isti uzorak kod efekta leće na pozadini.



(a) Schwarzschild ($b = 0$)



(b) SV BH ($b = 1.99M$)

Slika 5. Sjena (crni krug) i efekt gravitacijske leće na pozadinskom rasteru za Schwarzschildovu (gore) i Simpson-Visserovu (SV; dolje) crnu rupu. Gore desno na objema slikama nalazi se uvećani isječak prvog kvadranta na rubu sa sjenom. Preuzeto i prilagođeno iz [5].

C. Degeneracija kod rotirajućih crnih rupa

Ranije smo komentirali da prostorvremena s degeneracijom sjene klase I imaju hiperplohe konstantnog arealnog radijusa koje su izometrične onima u Schwarzschildovu prostorvremenu. Možemo proširiti takvo razmišljanje na asimptotski ravna, stacionarna, aksijalno simetrična prostorvremena po pitanju degeneracije s Kerrovim prostorvremenom.

Kao što smo spomenuli u cjelini II B, fotonske orbite oko Kerrove crne rupe općenito ne leže u ravnini, ali jesu sferične u smislu konstantnosti radijalne koordinate. Stoga možemo zaključiti da će, kao i u sferno simetričnom slučaju, bilo koje prostorvrijeme čije su hi-

perplohe konstantne radijalne koordinate izometrične s Kerrovima imati iste fotonske regije, pa tako i degeneriranu sjenu.

Dodatno je potrebno nametnuti već spomenuti uvjet asimptotske ravnosti, ali i separabilnosti Hamilton-Jacobi jednadžbe, koja omogućava analitičku konstrukciju sjene u Kerrovoj metrici. Nećemo se dalje upuštati u detalje izvoda ni rezultate jer zaslužuju zasebnu cjelinu, ako ne i rad. Uspjeli smo argumentirati sličnosti sa sferno simetričnim slučajem i istaknuti točke kojima je potreban dodatan matematički tretman.

IV. ZAKLJUČAK

Uveli smo koncept sjene crne rupe i razložili proces njezine konstrukcije na široko primjenjive korake:

- Odabiremo položaj opažača, izvan horizonta događaja i fotonskih orbita u relevantnim koordinatama.
- Promatramo geodezike svjetlosnog tipa. Pritom

zamišljamo zrake emitirane od opažača prema crnoj rupi, "u prošlost", i rješavamo jednadžbu geodezika očekujući njihovo skretanje pod utjecajem gravitacije crne rupe.

- Konačno, namećemo kritični uvjet, odnosno da minimalni radijus prolaska odgovara (dominantnoj) fotonskoj orbiti. Odgovarajući kutovi zraka-doglednica (do središta crne rupe) opisuju rub sjene.

Tako omogućujemo analitički izračun sjene za veliku klasu metrika. Za statičke, sferno simetrične metrike izračun možemo obaviti relativno jednostavno koristeći formulu 21. Predstavili smo i kratku generalizaciju na Kerrovu crnu rupu. Iako je crna rupa kauzalno odvojen dio prostorvremena, razumijevanje njezine sjene omogućuje jedan način eksperimentalne provjere naših saznanja o njezinoj fizikalnoj prirodi. Ustanovili smo da sjene crnih rupa mogu biti degenerirane, ali uza svijest o tome možemo uspoređivati realne crne rupe s čitavim klasama teorijskih modela. Rezultati koje smo predstavili ostavljaju otvoreno pitanje kombinacije efekta leće sa sjenom kao načina provjere teorije crnih rupa.

-
- [1] V. Perlick and O. Y. Tsupko, *Physics Reports* **947**, 1–39 (2022).
- [2] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, Sand Francisco, 1973).
- [3] E. H. T. C. et al, *The Astrophysical Journal Letters* **930** (2022), 10.3847/2041-8213/ac6674.
- [4] G. S. Bisnovaty-Kogan, O. Y. Tsupko, and V. Perlick, „Shadow of black holes at local and cosmological distances,” (2019), [arXiv:1910.10514 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1910.10514).
- [5] H. C. D. Lima Junior, L. C. B. Crispino, P. V. P. Cunha, and C. A. R. Herdeiro, *Physical Review D* **103** (2021), 10.1103/physrevd.103.084040.
- [6] J. L. Synge, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **131**, 463 (1966).
- [7] J.-P. Luminet, *Astronomy and Astrophysics* **75** (1979).
- [8] A. Grenzebach, „Aberrational effects for shadows of black holes,” in *Equations of Motion in Relativistic Gravity* (Springer International Publishing, 2015) p. 823–832.
- [9] A. Grenzebach, V. Perlick, and C. Lämmerzahl, *Physical Review D* **89** (2014), 10.1103/physrevd.89.124004.
- [10] P. V. P. Cunha, E. Berti, and C. A. R. Herdeiro, *Physical Review Letters* **119** (2017), 10.1103/physrevlett.119.251102.
- [11] A. Simpson and M. Visser, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2019**, 042–042 (2019).