Novi formalizam za statistička svojstva kozmičke strukture velikih skala

Eugen Šostik*
Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Bijenička 32, Zagreb
(Dated: 14. siječnja 2024.)

Uvodi se i demonstrira novi formalizam za analizu statističkih svojstava kozmičke strukture na velikim skalama. Uobičajeni, "stari" formalizam, koji se redovito koristi u literaturi, ima dva bitna elementa - funkciju izvodnicu i račun smetnje. To dvoje se potom kombinira kako bi se odredile relevantne korelacijske funkcije, koje opisuju statistička svojstva kozmičke strukture. Međutim, dva spomenuta elementa se tretiraju odvojeno, a u novom formalizmu se račun smetnje primjenjuje direktno na funkciju izvodnicu.

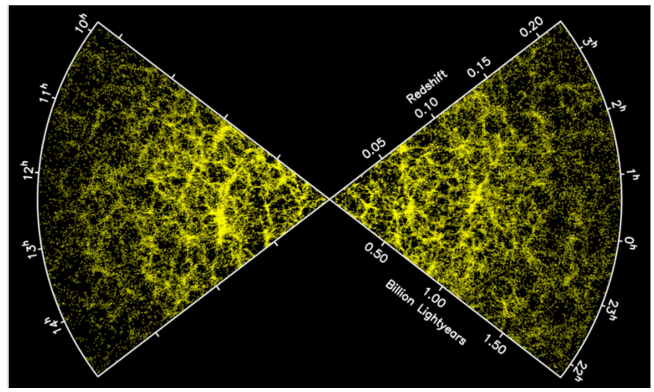
I. UVOD

Prikladan opis našeg Svemira sadržan je u kozmološkoj teoriji Velikog praska. To je potvrđeno znanstvenim otkrićima iz dvadesetog stoljeća na temelju kojih se može zaključiti širenje Svemira, obilnost lakih atoma u Svemiru i manji udio teških te otkrićem mikrovalnog zračenja koje ispunjava Svemir. No, mnoga pitanja i opažanja su ostala neodgovorena i nerazjašnjena. Primjerice, što su tamna tvar i tamna energija? Međutim, treba naglasiti da ta još neobjašnjena opažanja nisu u kontradikciji s teorijom Velikog praska pa ih se shvaća kao indikatore za proširenje teorije. Trenutno popularni načini proširenja se baziraju na ravnom ΛCDM modelu i mehanizmu inflacije. Ovim radom se prezentira novi formalizam za analizu statističkih svojstava kozmičke strukture velikih skala, upravo u okviru tih modela.

Iz promatranja kozmičkog mikrovalnog zračenja se zaključuje da je nakon Velikog praska uslijedila epoha tijekom koje je kozmička tvar bila gotovo homogena i izotropna, tzv. "glatki" Svemir, uz postojanje relativno malih nehomogenosti u gustoći i temperaturi tvari [Dodelson, Ref. 1, str. 10]. Aktualna hipoteza je da ti poremećaji potječu od kvantnih fluktuacija prostora induciranih tijekom inflacije Svemira. S druge strane, u sadašnjosti, Svemir sadrži galaksije zbog kojih ga se očito ne može više nazvati glatkim. Dakle, čini se da su male nehomogenosti evoluirale u jasna odstupanja od glatkog Svemira, koja se u kozmologiji nazivaju "struktura".

Pri izučavanju kozmičke strukture obično se radi podjela na male i velike prostorne skale. Malim skalama u kozmologiji se smatraju udaljenosti do mutne granice na otprilike 10 Mpc [Dodelson, Ref. 1, str. 11], na koju bi se moglo poredati oko sto najvećih galaksija. Na tim skalama je odstupanje od homogene gustoće kozmičke tvari preveliko da bi se nelinearne jednadžbe evolucije mogle analizirati računom smetnje. U ovom radu je fokus na velikim skalama na kojima odstupanje od homogenosti još uvijek nije preveliko. Na Sl. 1 se može vidjeti kako kozmička struktura na velikoj skali tipično izgleda. Primjećuje se formiranje lokaliziranih nakupina, ali globalno odstupanje od homogene gustoće se ne čini veliko.

* esostik.phy pmf.hr, eugen.sostik student.pmf.hr



Slika 1: *2dF* popis galaksija i njihovih crvenih pomaka (eng. *redshift*), prezentiran kao raspodjela galaksija u dijelu određene ravnine oko Mliječne staze koja se nalazi u centru slike. Dakle, svaka žuta točka na slici predstavlja jednu galaksiju. Razmak od krajnjeg lijevog do desnog dijela slike u stvarnosti predstavlja udaljenost od oko četiri milijarde svjetlosnih godina, odnosno otprilike 1226 Mpc. Stoga, radi se prikazu kozmičke strukture velikih skala. Može se primijetiti kako tvar u Svemiru formira lokalizirane nakupine, no nazire se mogućnost nekadašnje homogenosti gustoće. Popis je napravio *Australian Astronomical Observatory*, a slika je preuzeta s internetske stranice https://www.roe.ac.uk od *The Royal Observatory, Edinburgh.*

A. Matematički objekti i notacija

Ovaj rad sadrži nezgrapne matematičke izraze pa se stoga uvode tri konvencije za matematičku notaciju kako bi izrazi bili pregledniji.

Koristi se Einsteinova sumacijska konvencija, no bez zahtjeva da jedan indeks mora biti gore, a drugi dolje.

Podrazumijeva se i integracija umnoška funkcija po njihovom ponovljenom argumentu, a integrira se po cijelom $\mathbb{R}^3$. Npr., tako za neke funkcije $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vrijedi

$$\int_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3} f(\tau,\mathbf{x})g(\tau,\mathbf{x},\mathbf{y}) \equiv f(\tau,\mathbf{x})g(\tau,\mathbf{x},\mathbf{y}). \qquad (1)$$

Po τ se ne integrira jer nije iz $\mathbb{R}^3$.

Ako je područje integracije $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, onda se to ne piše eksplicitno, već se samo navodi slijepa oznaka za element iz $\mathbb{R}^n$. Npr., za gornju funkciju f piše se

$$\int_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3} f(\tau,\mathbf{x}) \equiv \int_{\mathbf{x}} f(\tau,\mathbf{x}). \tag{2}$$

Ako je prethodno spomenuta konvencija u nekom dijelu teksta zbunjujuća poseže se za ovom ili se u tekstu ostavlja odgovarajući komentar.

Fourierovim transformatom neke funkcije f, koja je u tzv. običnom prostoru, naziva se funkcija $\tilde{f}$ dana izrazom

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \tag{3}$$

a inverznim Fourierovim transformatom neke funkcije g, koja je u tzv. Fourier-transformiranom prostoru, se zove funkcija $\tilde{g}$ dana izrazom

$$\tilde{g}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbf{k}} g(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}. \tag{4}$$

Diracovu delta distribuciju se označava δ_D i za nju vrijedi

$$\delta_D(\mathbf{k}-\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbf{x}} e^{\pm i\mathbf{x}(\mathbf{k}-\mathbf{q})}. \tag{5}$$

Za skup svih realnih kvadratnih $n\times n$ matrica, $n \in \mathbb{N}$, koristi se oznaka $M_{nn}(\mathbb{R})$. Neka je $A : S\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \to M_{nn}(\mathbb{R})$, $S \subseteq \mathbb{R}$, polje kvadratnih matrica čiji su koeficijenti vrijednosti funkcija $A_{\mu\nu} : S\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\mu,\nu \in \{1,...,n\}$, dakle vrijedi $A(\tau,\mathbf{x},\mathbf{y}) = [A_{\mu\nu}(\tau,\mathbf{x},\mathbf{y})]$. S A^I se označava **funkcionalni inverz polja matrica** A, kojemu su koeficijenti određeni funkcijama $A^I_{\mu\nu} : S\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju

$$\begin{aligned} A^I_{\mu\alpha}(\tau,\mathbf{x},\mathbf{y})A_{\alpha\nu}(\tau,\mathbf{y},\mathbf{z}) &= A_{\nu\alpha}(\tau,\mathbf{z},\mathbf{y})A^I_{\alpha\mu}(\tau,\mathbf{y},\mathbf{x}) \\ &= \delta_{\mu\nu}\delta_D(\mathbf{x}-\mathbf{z}), \end{aligned} \tag{6}$$

i

$$A^I_{\mu\nu}(\tau,\mathbf{x},\mathbf{y}) = A^I_{\nu\mu}(\tau,\mathbf{y},\mathbf{x}), \tag{7}$$

gdje je $\delta_{\mu\nu}$ Kroneckerov simbol. Ova definicija je generalizacija one od Jeonga.[2] Pitanje postojanja ovakvog inverza je legitimno. Ono se neće ovdje razmatrati nego se pretpostavlja da funkcionalni inverz postoji, ali ipak se napominje da ako vrijedi (7) onda slijedi

$$A_{\mu\nu}(\tau,\mathbf{x},\mathbf{y}) = A_{\nu\mu}(\tau,\mathbf{y},\mathbf{x}), \tag{8}$$

što je lako vidjeti iz relacije (6), i to je svakako jedan od uvjeta postojanja funkcionalnog inverza polja A.

Još uvijek ne postoji stroga matematička teorija tzv. funkcionalnih integrala, ali u praksi se pojavljuju, više ili manje stroge, zasebne definicije nekih takvih matematičkih objekata. U narednim sekcijama je jedan od centralnih koncepata omjer Gausijanskih funkcionalnih integrala. Neka je $[] = \{x | x : I\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^n, I \subseteq \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$ skup svih realnih vektorskih polja s domenom na $I\times\mathbb{R}^3$, a $f : [\,] \to \mathbb{C}$ kompleksna funkcija na $[\,]$. U nedostatku opće definicije, **ideju** integrala funkcije f po nekom podskupu $W \subseteq [\,]$ naziva se **funkcionalni integral f po W** i u ovom radu označava s

$$\int_{W\subseteq[w]} f(w). \tag{9}$$

Specijalno, ako $W = [\,]$ onda se piše

$$\int_{[w]} f(w). \tag{10}$$

Nadalje, uzima se polje realnih kvadratnih matrica $A : I\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \to M_{nn}(\mathbb{R})$. **Gausijanski funkcionalni integral od f po** $[\,]$ se naziva funkcionalni integral

$$\int_{[w]} f(w)\mathbb{G}\{w|A_{\mu\nu}\} \tag{11}$$

s **Gausijanskom integralnom jezgrom**

$$\begin{aligned} &\mathbb{G}\{w|A_{\mu\nu}\} \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2}w_\mu(\tau,\mathbf{x})A_{\mu\nu}(\tau,\mathbf{x},\mathbf{y})w_\nu(\tau,\mathbf{y})\right], \end{aligned} \tag{12}$$

koja se naziva "Gausijanska" jer je svojevrsno poopćenje Gausijana "$\exp(-x^2/2a)$." Praktički, zasad je utvrđena notacija za nešto što suvremeno matematički ne postoji. Nije teško zamisliti da bi ovakvi integrali divergirali, u kojem god smislu. Ali s njima se ovdje niti neće operirati u ovakvom obliku. Jedino se koristi sljedeći koncept za koji postoji prijedlog definicije. Neka je $g : [\,] \to \mathbb{C}$ kompleksna funkcija na skupu $[]$. Definira se **omjer Gausijanskih funkcionalnih integrala**

$$\int_{[w]} f(w)\mathbb{G}\{w|A_{\mu\nu}\} \tag{13}$$

i

$$\int_{[w]} g(w)\mathbb{G}\{w|A_{\mu\nu}\} \tag{14}$$

kao limes

$$\frac{\int_{[w]} f(w)\mathbb{G}\{w|A_{\mu\nu}\}}{\int_{[w]} g(w)\mathbb{G}\{w|A_{\alpha\beta}\}} \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{\int_{w(\tau,\mathbf{x}_1)}\cdots\int_{w(\tau,\mathbf{x}_n)} f_n(w)\exp[-\frac{1}{2}\lambda_n^2\sum_{j,l=1}^n w_\mu(\tau,\mathbf{x}_j)A_{\mu\nu}(\tau,\mathbf{x}_j,\mathbf{x}_l)w_\nu(\tau,\mathbf{x}_l)]}{\int_{w(\tau,\mathbf{x}_1)}\cdots\int_{w(\tau,\mathbf{x}_n)} g_n(w)\exp[-\frac{1}{2}\lambda_n^2\sum_{j,l=1}^n w_\alpha(\tau,\mathbf{x}_j)A_{\alpha\beta}(\tau,\mathbf{x}_j,\mathbf{x}_l)w_\beta(\tau,\mathbf{x}_l)]}, \tag{15}$$

gdje je λ_n normirajući faktor uz kojeg sume u danom limesu teže u integrale po realnom prostoru, a po potrebi, ovisno o pravilu preslikavanja, f_n i g_n su funkcije koje teže u f i g, respektivno. Funkcionalni integral u nazivniku se naziva **norma** i označava

$$\int_{[w]} g\,(w)\,\mathbb{G}\{w|A_{\mu\nu}\} \equiv \mathcal{N}\{g(w)|w|A_{\mu\nu}\}. \qquad (16)$$

Omjer Gausijanskih funkcionalnih integrala će se radi kratkoće oslovljavati uglavnom s **funkcionalni omjer**. I ovdje se nameće pitanje postojanja limesa, a k tome problem predstavlja i definicija mjere u odnosu na koju se integrali u njemu računaju. U ovom radu se neće razmatrati takva pitanja i pretpostavlja se da omjer postoji. Valja primijetiti kako vrijedi identitet

$$\frac{\int_{[w]} f(w)\mathbb{G}\{w|A_{\mu\nu}\}}{\mathcal{N}\{f(w)|w|A_{\alpha\beta}\}} = 1,\ \forall f, A. \qquad (17)$$

Posebna pažnja se pridaje funkcionalnim omjerima u kojima se funkcionalno integrira kompleksna preslikavanja oblika $\exp\left[iJ_\mu(\mathbf{x})w_\mu(\tau,\mathbf{x})\right]\mathbb{G}\{w|A_{\nu\eta}\}$, za neko vektorsko polje $J:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^n$, $n\in\mathbb{N}$, koje se može razlikovati u brojniku i nazivniku omjera(!). Naime, u takvim slučajevima se definira **eliminirajuća supstitucija** kao zamjena integracijske varijable (w u w')

$$w_\mu(\tau,\mathbf{x}) = w'_\mu(\tau,\mathbf{x}) + iA^I_{\mu\nu}(\tau,\mathbf{x},\mathbf{y})J_\nu(\mathbf{y}) \qquad (18)$$

u Gausijanskim funkcionalnim integralima u omjeru. Njome se eliminira funkcionalni omjer i svodi se na kompleksne eksponencijalne funkcije s poljima J i A^I. Važno svojstvo eliminirajuće supstitucije jest da ne mijenja mjeru u odnosu na koju se izvodi funkcionalni integral jer član $iA^I_{\mu\nu}(\tau,\mathbf{x},\mathbf{y})J_\nu(\mathbf{y})$ ne sadrži polje po čijim se konfiguracijama integrira. Npr., u funkcionalu definiranom kao

$$\Gamma(J) = \frac{\int_{[w]}\exp\left[iJ_\mu(\mathbf{x})w_\mu(\tau,\mathbf{x})\right]\mathbb{G}\{w|A_{\nu\eta}\}}{\mathcal{N}\{1|w|A_{\alpha\beta}\}} \qquad (19)$$

eliminirajuća supstitucija se može primijeniti u funkcionalnom integralu u brojniku dok je ista u nazivniku trivijalna jer tamo je $J=0$. Nakon uvrštavanja je potrebno urediti izraz uz višestruku uporabu definicijskih relacija (6), (7) i (8) za funkcionalni inverz, pri čemu se nova integracijska varijabla (w') slobodno može označiti slijepom oznakom (w) stare varijable te slijedi

$$\Gamma(J) = \mathbb{G}\{J|A^I_{\mu\nu}\}\frac{\int_{[w]}\mathbb{G}\{w|A_{\eta\sigma}\}}{\mathcal{N}\{1|w|A_{\alpha\beta}\}} \qquad (20)$$

pa je zbog identiteta (17) funkcionalni omjer eliminiran iz Γ.

Za razumijevanje izloženog bitan je i koncept **slučajnog polja**, a u izračunima se često pojavljuju korelacijske funkcije slučajnih polja, koje se ovdje nazivaju korelatorima. Neka su $X_1,...,\ X_n$, $n\in\mathbb{N}$, skalarna slučajna polja, s domenom $I\times\mathbb{R}^3$, $I\subseteq\mathbb{R}$, i zajedničkom gustoćom vjerojatnosti konfiguracija $\mathbb{P}_X$. Za $m\in\mathbb{N}$, **m−korelator od** $X_{\mu_1},...,X_{\mu_m}$, u točkama $(\tau,\mathbf{x}_1),...,(\tau,\mathbf{x}_m)$, je višestruki funkcionalni integral oblika

$$\begin{aligned}&\int_{[X_{\mu_1}]}...\int_{[X_{\mu_m}]}X_{\mu_1}(\tau,\mathbf{x}_1)...X_{\mu_m}(\tau,\mathbf{x}_m)\mathbb{P}_X\\&\equiv\left\langle X_{\mu_1}(\tau,\mathbf{x}_1)...X_{\mu_m}(\tau,\mathbf{x}_m)\right\rangle.\end{aligned} \qquad (21)$$

Za vjerojatnosno nezavisna dana polja vrijedi $\mathbb{P}_X=\mathbb{P}_{X_1}...\mathbb{P}_{X_n}$, gdje su $\mathbb{P}_{X_1},...,\mathbb{P}_{X_n}$ pojedinačne gustoće vjerojatnosti konfiguracija za slučajna polja $X_1,...,X_n$, respektivno. Ako su polja organizirana kao komponente vektorskog slučajnog polja X, onda se višestruki integral za m-korelator od $X_{\mu_1},...,X_{\mu_m}$ kraće piše kao

$$\begin{aligned}&\int_{[X_{\mu_1}]}...\int_{[X_{\mu_m}]}X_{\mu_1}(\tau,\mathbf{x}_1)...X_{\mu_m}(\tau,\mathbf{x}_m)\mathbb{P}_X\\&\equiv\int_{[X]}X_{\mu_1}(\tau,\mathbf{x}_1)...X_{\mu_m}(\tau,\mathbf{x}_m)\mathbb{P}_X.\end{aligned} \qquad (22)$$

U biti, radi se o očekivanju za umnožak vrijednosti slučajnih polja u nekim točkama.

B. Polazne jednadžbe

Jednadžbe evolucije kozmičke strukture produkt su kombiniranog znanja opće teorije relativnosti i Boltzmannove kinetičke teorije iz statističke fizike. Izvod nije trivijalan pa je dostatno već gotove jednadžbe evolucije uzeti kao polaznu poziciju u ovom razmatranju. Treba napomenuti da se u kozmologiji standardno koristi sustav mjernih jedinica u kojem se brzina svjetlosti (c), reducirana Planckova ($\hbar$) i Boltzmannova (k_B) konstanta upotrebljavaju kao mjerne jedinice. Iz praktičnih razloga se te konstante onda ne pišu u formulama, niti kao jedinice, što dovodi do prividne dimenzionalne jednakosti nekih SI jedinica, npr. metra i sekunde. Ovdje se taj sustav jedinica također poštuje.

Kao oznaku za odstupanje od homogene gustoće kozmičke tvari uzima se δ. Tu veličinu se standardno oslovljava **kontrast gustoće**, a definirana je izrazom $\rho(\tau,\mathbf{x})=\overline{\rho}(\tau)(1+\delta(\tau,\mathbf{x}))$, gdje je $\rho(\tau,\mathbf{x})$ gustoća tvari na poziciji $\mathbf{x}$ u trenutku τ, $\overline{\rho}(\tau)$ srednja gustoća, što bi bila upravo gustoća u glatkom Svemiru, a τ označava konformalno vrijeme. Potonje je zapravo udaljenost koja se koristi kao mjera proteklog vremena. Naime, redovno su u upotrebi **sugibajuće koordinate** koje prate fizikalno širenje Svemira koji je njima koordinatiziran. Konformalno vrijeme je tada koordinatna udaljenost

$$\tau = \int_{t'=0}^{t}\frac{1}{a(t')} \qquad (23)$$

koju svjetlost slobodno prijeđe od početnog trenutka $t=0$, gdje je a faktor skale kojim se opisuje širenje Svemira. Upotreba se pokazuje praktičnom u računima.

Jednadžbe evolucije su općenito izrazito komplicirane, ali u granici velikih skala vrijede neka pojednostavljenja.

Kozmička tvar se sastoji od dvije komponente, barionske i tamne. Razlika je u tome što barionska tvar elektromagnetski interagira i stoga u njoj postoji tlak. No, taj tlak znatno doprinosi evoluciji tek na malim skalama i zato ga se ovdje zanemaruje. Time nestaje i razlika između dvije komponente te se obje opisuju ΛCDM jednadžbama za bestlačnu tamnu tvar.

Zanemaruju se sve interakcije osim gravitacije, koja se tretira kao slaba, odnosno Newtonska.

Vrtložnost tvari je zanemariva: $\nabla \times \mathbf{v}(\tau, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$, gdje je $\mathbf{v}$ tangentno vektorsko polje brzine tvari.

Iz svega navedenog može se pokazati [Dodelson, Ref. 1] da vrijede sljedeće jednadžbe evolucije za kozmičku strukturu velikih skala:

$$\partial_\tau \delta(\tau, \mathbf{x}) + \nabla \cdot [\mathbf{v}(1+\delta)](\tau, \mathbf{x}) = 0, \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \partial_\tau \mathbf{v}(\tau, \mathbf{x}) + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}(\tau, \mathbf{x}) + \mathcal{H}(\tau)\mathbf{v}(\tau, \mathbf{x}) \\ = -\nabla\Phi(\tau, \mathbf{x}), \end{aligned} \tag{25}$$

$$\nabla^2 \Phi(\tau, \mathbf{x}) = 4\pi G a^2(\tau) \overline{\rho}(\tau) \delta(\tau, \mathbf{x}), \tag{26}$$

gdje je Φ gravitacijski potencijal, G gravitacijska konstanta, a $\mathcal{H}(\tau) = d_\tau a(\tau)/a(\tau)$ konformalni Hubbleov koeficijent. Zanimljiva zamjetka jest da ove jednadžbe odgovaraju onima za samogravitirajući, bezvrtložni, klasični fluid. Ovaj sustav se svodi na dvije jednadžbe uvrštavanjem izraza (25) u (26) uz korištenje definicije Laplasijana $\nabla^2\Phi = \nabla \cdot \nabla\Phi$, a uvodi se i pokrata $4\pi G a^2 \overline{\rho} \equiv Đ$. Dakle, $\nabla \cdot [-\partial_\tau \mathbf{v} - (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} - \mathcal{H}\mathbf{v}](\tau, \mathbf{x}) = Đ(\tau)\delta(\tau, \mathbf{x})$. Drugi član u jednadžbi (24) se može raspisati na način $\nabla \cdot [\mathbf{v}(1+\delta)] = \nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\delta \mathbf{v})$ pa sustav zasad izgleda ovako:

$$\begin{cases} \partial_\tau \delta(\tau, \mathbf{x}) + \nabla \cdot \mathbf{v}(\tau, \mathbf{x}) + \nabla \cdot (\delta \mathbf{v})(\tau, \mathbf{x}) = 0 \\ \nabla \cdot [\partial_\tau \mathbf{v} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + \mathcal{H}\mathbf{v}](\tau, \mathbf{x}) + Đ(\tau)\delta(\tau, \mathbf{x}) \\ \qquad = 0. \end{cases} \tag{27}$$

Unatoč svim simplifikacijama ovo je i dalje prilično složen matematički problem. No, može se nastaviti dalje ako se iskoristi Helmholtzova dekompozicija kojom on podučava kako se vektorsko polje može odrediti iz poznavanja divergencije i rotacije polja. Situaciju posebno olakšava bezvrtložnost polja $\mathbf{v}$ jer to znači da ga se može zamijeniti u jednadžbama samo s njegovom divergencijom, koja je skalarno polje. Postupak je sljedeći. Neka je domena od $\mathbf{v}$ skup $I \times \mathbb{R}^3$, $I \subseteq \mathbb{R}$. Razlog zašto se zahtjeva cijeli $\mathbb{R}^3$ za domenu prostornog dijela je to što se u nastavku intenzivno koristi Fourier-transformirani prostor. Nadalje, neka je $\mathbf{v}$ element barem $C^2(\mathbb{R}^3)$, klase $o(r^{-(1+\kappa)})$, $\kappa > 0$ i njegova divergencija klase $o(r^{-(2+\lambda)})$, $\lambda > 0$. Tada se $\mathbf{v}$ na domeni $I \times \mathbb{R}^3$ može dekomponirati kao

$$\mathbf{v}(\tau, \mathbf{x}) = \theta(\tau, \mathbf{y})\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \tag{28}$$

gdje je $\theta \equiv \nabla \cdot \mathbf{v}$, a

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3}. \tag{29}$$

Uvrštavanjem izraza (28) u sustav (27) eliminira se tangentno vektorsko polje $\mathbf{v}$, koje se uvijek može naknadno odrediti iz (28) jednom kad je poznato polje θ. To je značajan napredak, međutim, niti to još nije konačan oblik sustava. Kako je najavljeno, želi se raditi u Fourier-transformiranom prostoru, zbog praktičnosti. Primjerice, čak i s rješenjem sustava (27) u rukama nije odmah jasno kako ga empirijski testirati. Kozmolozi su pronašli pogodne opservable za usporedbu teorije i empirijskih podataka - tzv. polispektri, a oni su definirani u Fourier-transformiranom prostoru. Stoga, kako je najavljeno, zadnji korak je zapis sustava (27) i jednadžbe (28) u Fourier-transformiranom prostoru.

Primjenom transformacije (3) na jednadžbe evolucije jedini članovi koji imaju netrivijalan, ali sličan transformat su $\nabla \cdot (\delta \mathbf{v})$ i $\nabla \cdot (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$, pa se ovdje demonstrira transformacija ovog prvog. Dakle, vrijedi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{x}} \nabla \cdot (\delta \mathbf{v})(\tau, \mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} &= \int_{\mathbf{x}} \nabla \cdot (\delta \mathbf{v} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}})(\tau, \mathbf{x}) + \int_{\mathbf{x}} \delta(\tau, \mathbf{x})\mathbf{v}(\tau, \mathbf{x})\nabla(e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}})(\tau, \mathbf{x}) \\ &= \oint_{\mathbf{x} \in S_\infty} \delta(\tau, \mathbf{x})\mathbf{v}(\tau, \mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) + i\mathbf{k} \int_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\tau, \mathbf{x})\delta(\tau, \mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \end{aligned} \tag{30}$$

gdje je $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ jedinični vektor, u svakoj točki $(\mathbf{x})$ sfere u beskonačnosti (S_∞) okomit na njezinu površinu, a po kojoj integral iščezava jer se zahtjeva da kozmička tvar nije beskonačna, što je fizikalno razumno s obzirom na širenje Svemira. U preostalom, δ i $\mathbf{v}$ se zapišu s pomoću njihovih Fourierovih transformata. Nakon uređivanja ostaje

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbf{x}} \nabla \cdot (\delta \mathbf{v})(\tau, \mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \\ &= i\mathbf{k}\delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{q} - \mathbf{u}) \frac{\tilde{\mathbf{v}}(\tau, \mathbf{q})}{(2\pi)^3} \tilde{\delta}(\tau, \mathbf{u}), \end{aligned} \tag{31}$$

pri čemu se integrira po ponovljenim argumentima. Sada treba iskoristiti relaciju (28) kojoj je prvo zgodno supstituirati varijablu integracije sa $\mathbf{z} \equiv \mathbf{y} - \mathbf{x}$ pa vrijedi

$$\mathbf{v}(\tau, \mathbf{x}) = \int_{\mathbf{z}} \theta(\tau, \mathbf{z} + \mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{z} + \mathbf{x}). \tag{32}$$

Fourierov transformat se piše

$$\tilde{\mathbf{v}}(\tau, \mathbf{q}) = \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{z}} \theta(\tau, \mathbf{z} + \mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{z} + \mathbf{x}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}}. \tag{33}$$

Nadalje, θ se izrazi preko $\tilde{\theta}$ i dobiveno se lako dovede u oblik

$$-\frac{1}{4\pi} \tilde{\theta}(\tau, \mathbf{q}) \int_{\mathbf{z}} \frac{\mathbf{z}}{z^3} e^{i\mathbf{q}\mathbf{z}}. \tag{34}$$

Za preostali integral se može pokazati, uvođenjem sfernih koordinata i pažljivim određivanjem limesa koji se pojave, da je jednak $-4\pi i \mathbf{q}/q^2$ te za $\tilde{\mathbf{v}}$ onda slijedi

$$\tilde{\mathbf{v}}(\tau, \mathbf{q}) = -i \frac{\mathbf{q}}{q^2} \tilde{\theta}(\tau, \mathbf{q}). \tag{35}$$

Konačno, zaključuje se

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbf{x}} \nabla \cdot (\delta \mathbf{v})(\tau, \mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \\ &= \int_{\mathbf{q}} \int_{\mathbf{u}} \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{q} - \mathbf{u}) \frac{\mathbf{q}\mathbf{k}}{q^2} \frac{\tilde{\theta}(\tau, \mathbf{q})}{(2\pi)^3} \tilde{\delta}(\tau, \mathbf{u}) \end{aligned} \tag{36}$$

i ako se slično postupi s članom $\nabla \cdot (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ dobiva se traženi oblik sustava jednadžbi evolucije:

$$\begin{cases} \partial_\tau \tilde{\delta}(\tau, \mathbf{k}) + \tilde{\theta}(\tau, \mathbf{k}) \\ \qquad + E(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{u}) \tilde{\delta}(\tau, \mathbf{q}) \tilde{\theta}(\tau, \mathbf{u}) = 0 \\ \mathcal{D} \tilde{\delta}(\tau, \mathbf{k}) + \partial_\tau \tilde{\theta}(\tau, \mathbf{k}) + \mathcal{H}(\tau) \tilde{\theta}(\tau, \mathbf{k}) \\ \qquad + F(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{u}) \tilde{\theta}(\tau, \mathbf{q}) \tilde{\theta}(\tau, \mathbf{u}) = 0, \end{cases} \tag{37}$$

gdje su

$$\begin{aligned} E(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{u}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \delta_D(\mathbf{q} + \mathbf{u} - \mathbf{k}) \frac{\mathbf{k}\mathbf{u}}{u^2}, \\ F(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{u}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \delta_D(\mathbf{q} + \mathbf{u} - \mathbf{k}) \frac{k^2 \mathbf{q}\mathbf{u}}{2q^2 u^2}. \end{aligned} \tag{38}$$

Ovaj oblik jednadžbi je povoljan za njihovo rješavanje računom smetnje, ali i za uvođenje novog formalizma, kojim će se unaprijediti izračuni spomenutih polispektara.

Polispektri opisuju statistička svojstva kozmičke strukture koja se mogu opažati i mjeriti te tako služe kao direktan način provjere teoretičarskih razmatranja. No, dosad spomenute jednadžbe evolucije strukture su determinističke. Odgovor na nedoumicu je da ova statistička svojstva imaju porijeklo u kvantnim fenomenima, koji se u makroskopske determinističke jednadžbe evolucije mogu uračunati preko početnih uvjeta jer njihov utjecaj na strukturu u tada gotovo glatkom Svemiru nije bio zanemariv. Polispektri su definirani kao Fourierovi transformati korelacijskih funkcija za relevantna svojstva kozmičke strukture u danim točkama prostora i trenucima, svojstva poput kontrasta gustoće (δ). No, da bi se računale korelacijske funkcije veličina koje opisuju neko svojstvo, te veličine je potrebno matematički uvesti kao slučajne varijable, odnosno, u ovom kontekstu kao slučajna polja. Drugim riječima, potrebno im je pridružiti distribuciju vjerojatnosti za konfiguracije koje ta polja mogu poprimiti. Dakle, to se odnosi i na kontrast gustoće i na divergenciju brzine (θ). To ne mijenja ništa u prethodnim jednadžbama, već je samo potrebno odrediti pripadne distribucije, a uobičajeni formalizam za to se diskutira u sljedećoj sekciji. Za kraj ove se još definira jedan od polispektara koji se koristi u ovom radu.

Može se pokazati da korelatori, definirani izrazom (21), ovise samo o međusobnoj udaljenosti prostornih točaka u kojima se određuju. Zato postoji Fourierov transformat 2-korelatora od X_1 i X_2, nekih općenitih fizikalnih veličina:

$$\int_{\mathbf{x}-\mathbf{y}} \langle X_\mu(\tau, \mathbf{x}) X_\nu(\tau, \mathbf{y}) \rangle \, e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \equiv P_{X_\mu X_\nu}(\tau, k), \tag{39}$$

$\mu, \nu \in \{1, 2\}$, koji se zove **spektar snage od** X_μ i X_ν te također ovisi samo o udaljenosti, ali u Fourier-transformiranom prostoru. Specijalno, $P_{X_\mu X_\mu} \equiv P_{X_\mu}$ se naziva spektrom snage od X_μ. Spektar snage je upravo "monospektar" među polispektrima, no taj naziv se nije zadržao u kozmološkoj literaturi. Još se napominje važna relacija koja se jednostavno pokaže. Naime, vrijedi

$$\langle \tilde{X}_\mu(\tau, \mathbf{k}) \tilde{X}_\nu(\tau, \mathbf{q}) \rangle = (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{q}) P_{X_\mu X_\nu}(\tau, k). \tag{40}$$

II. PREGLED UOBIČAJENOG FORMALIZMA ZA STATISTIČKA SVOJSTVA KOZMIČKE STRUKTURE VELIKIH SKALA

Ova sekcija služi kao pregledni podsjetnik na formalizam za izračun korelatora i polispektara koji je već poznat u kozmologiji. Prati se izlaganje u disertaciji od Jeonga[2] s nekim primjesama argumenata i komentara od Dodelsona.[1]

Cilj je odrediti fizikalna statistička svojstva relevantnih fizikalnih veličina. Ona su potpuno sadržana u gustoći vjerojatnosti, npr. $\mathbb{P}_\delta$ koja je određena nekim zakonima koje kontrast gustoće (δ) poštuje. Mehanizmom inflacije su otkrivena statistička svojstva kontrasta gustoće. Spomenuto je kako su kvantne fluktuacije prostora tijekom inflacije inducirale kontrast gustoće. Osim toga, iz tih teoretskih razmatranja proizlazi da je gustoća vjerojatnosti fluktuacija bila **gotovo** Gausijanska. Ako je tomu tako, čini se razumnim pretpostaviti da je kontrast gustoće barem u početku svoje evolucije direktno naslijedio statistička svojstva tih fluktuacija. Nadalje se odabire formalizam u kojem se zanemaruje odstupanje od Gausijanskog oblika gustoće vjerojatnosti. Postoje i tretmani gotovo Gausijanskih početnih uvjeta, no ovdje se ne razmatraju. Gausijanska aproksimacija se dosad pokazala zadovoljavajućom. Time se iskristalizirala strategija za određivanje statističkih svojstava veličina koje opisuju kozmičku strukturu velikih skala. Ideja je nametnuti Gausijansku gustoću vjerojatnosti konfiguracija kontrastu gustoće u nekom početnom trenutku, a sve ostale fizikalne veličine izraziti preko kontrasta gustoće jer je onda jasno na koji način nasljeđuju statistička svojstva.

Neka je δ_0 oznaka za kontrast gustoće u početnom trenutku $\tau = 0$. Prema prethodnoj diskusiji upravo δ_0 treba pridružiti Gausijansku gustoću vjerojatnosti konfiguracija:

$$\mathbb{P}_{\delta_0} = \frac{1}{\mathcal{N}\{1|\delta_0|U\}}\mathbb{G}\{\delta_0|U\}, \tag{41}$$

gdje je skalarno polje $U : I \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zasad nepoznato i ima ulogu 1×1 polja kvadratnih matrica zahtijevanog u definiciji funkcionalnog omjera, a $\mathbb{G}\{.|.\}$ je generalizirana verzija Gausijana centriranog na nuli. To znači da će očekivana vrijednost $\langle\delta_0(\mathbf{x})\rangle$, tj. 1-korelator, za proizvoljnu točku $\mathbf{x}$, biti nula, što je u skladu sa zahtjevom da je prije evolucije strukture Svemir gotovo gladak. Ovakav $\mathbb{P}_{\delta_0}$ ima poželjna svojstva poput onog da vjerojatnost poprimanja neke konfiguracije δ_0 iz skupa [] svih mogućih je točno jedan:

$$\int_{[\delta_0]} \mathbb{P}_{\delta_0} = \int_{[\delta_0]} \frac{1}{\mathcal{N}\{1|\delta_0|U\}}\mathbb{G}\{\delta_0|U\} = 1, \tag{42}$$

što slijedi iz identiteta (17). Sljedeći korak je saznati nešto o polju U. Uvodi se **funkcija izvodnica za korelatore od** δ_0, označena sa Z, kao funkcional

$$Z(J) = \frac{1}{\mathcal{N}\{1|\delta_0|U\}} \int_{[\delta_0]} \exp[iJ(\mathbf{x})\delta_0(\mathbf{x})]\mathbb{G}\{\delta_0|U\}. \tag{43}$$

Moguće je uvjeriti se kako vrijedi

$$\langle\delta_0(\mathbf{x}_1)...\delta_0(\mathbf{x}_m)\rangle = \frac{1}{i^m}\Delta^m_{J(\mathbf{x}_1)...J(\mathbf{x}_m)}Z(0), \tag{44}$$

gdje je Δ oznaka za **funkcionalnu derivaciju**, koja se uobičajeno označava s δ, no to slovo je već višestruko zauzeto u ovom radu. Nakon primjene eliminirajuće supstitucije u funkcionalnom integralu u brojniku, Z se može zapisati

$$Z(J) = \mathbb{G}\{J|U^I\}, \tag{45}$$

gdje je U^I funkcionalni inverz (1×1 polja matrica) U. Ako se taj izraz dva puta funkcionalno derivira kao u formuli (44), dobiva se

$$\begin{aligned}\langle\delta_0(\mathbf{x})\delta_0(\mathbf{y})\rangle &= U^I(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= U^I(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{0}) = U^I(\mathbf{y} - \mathbf{x}, \mathbf{0}),\end{aligned} \tag{46}$$

čime je određena funkcija U^I. Zadnje dvije jednakosti su posljedica činjenice da 2-korelator ovisi samo o razmaku točaka u kojima je izvrijednjen.

Zbog toga se gustoća vjerojatnosti (41) može zapisati u Fourier-transformiranom prostoru, što se preferira:

$$\mathbb{P}_{\tilde{\delta}_0} = \frac{1}{\mathcal{N}\{1|\tilde{\delta}_0|V\}}\mathbb{G}\{\tilde{\delta}_0|V\}, \tag{47}$$

gdje je $V(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \tilde{U}(k)\delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{q})/(2\pi)^3$. Funkcija izvodnica za korelatore od $\tilde{\delta}_0$ je označena sa ζ. Istim postupkom kao i ranije se može zaključiti

$$\zeta(J) = \mathbb{G}\{J|V^I\}. \tag{48}$$

Koristeći definicijsku relaciju (6) za funkcionalni inverz i izraz za V pokazuje se:

$$V^I(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \frac{(2\pi)^3\delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{q})}{\tilde{U}(k)}. \tag{49}$$

Nadalje, može se deducirati pandan izrazu (46):

$$\begin{aligned}\langle\tilde{\delta}_0(\mathbf{k})\tilde{\delta}_0(\mathbf{q})\rangle &= V^I(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \\ &= \frac{(2\pi)^3\delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{q})}{\tilde{U}(k)}\end{aligned} \tag{50}$$

pa usporedbom s izrazom (40) slijedi fizikalna interpretacija $\tilde{U}$:

$$\tilde{U}(k) = \frac{1}{P_{\delta_0}(k)}. \tag{51}$$

Naime, radi se o multiplikativnom inverzu spektra snage od δ_0. Sada više nema potrebe za gustoćom vjerojatnosti $\mathbb{P}_{\tilde{\delta}_0}$ koja sadrži odbojan funkcionalni integral. Sudeći prema izrazu (44), koji vrijedi i u Fourier-transformiranom prostoru, svi korelatori od $\tilde{\delta}_0$ se mogu izračunati funkcionalnim deriviranjem funkcije izvodnice

$$\zeta(J) = \exp[\frac{-(2\pi)^3}{2}\int_{\mathbf{k}} J(\mathbf{k})P_{\delta_0}(k)J(-\mathbf{k})]. \tag{52}$$

Treba zamijetiti da je spektar snage od δ_0 slobodan parametar kojeg se ne može odrediti iz funkcije izvodnice, odnosno, preko njega će biti izraženi svi korelatori i polispektri. Kao što se cijeli ovaj formalizam odmotao zbog informacije o gotovo Gausijanskoj gustoći vjerojatnosti inflacijskih kvantnih fluktuacija prostora, tako je i P_{δ_0} potrebno odrediti s pomoću inflacijskih modela [Jeong, Ref. 2, str. 17].

Preostaje odrediti korelatore od neke proizvoljne veličine X. Može se, za početak, zamisliti da je to kontrast gustoće ($\tilde{\delta}$), za koji je dobro poznat rezultat u okviru računa smetnje:

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}(\tau, \mathbf{k}) = &\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbf{k}_1}...\int_{\mathbf{k}_n}\frac{D_+^n(\tau)}{(2\pi)^{3(n-1)}}\delta_D(\mathbf{k} - \sum_{j=1}^{n}\mathbf{k}_j) \\ &\times F_n(\mathbf{k}_1, ..., \mathbf{k}_n)\tilde{\delta}_0(\mathbf{k}_1)...\tilde{\delta}_0(\mathbf{k}_n),\end{aligned} \tag{53}$$

gdje je D_+ tzv. faktor rasta, a F_n integralna jezgra u n-tom redu računa smetnje, čiji je oblik ovdje nebitan, a sve skupa je razvijeno u sumu potencija malog kontrasta u početnom trenutku ($\tilde{\delta}_0$), koji je sigurno mali budući da mu je očekivana vrijednost u svakoj točki nula. Jednako tako se može razviti i X:

$$\begin{aligned} X(\tau, \mathbf{k}) = &\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbf{k}_1} ... \int_{\mathbf{k}_n} \frac{D_+^n(\tau)\delta_D(\mathbf{k} - \sum_{j=1}^{n} \mathbf{k}_j)}{(2\pi)^{3(n-1)}} \\ &\times I_n(\mathbf{k}_1, ..., \mathbf{k}_n)\tilde{\delta}_0(\mathbf{k}_1)...\tilde{\delta}_0(\mathbf{k}_n) \\ = &\sum_{n=1}^{\infty} X^{(n)}(\tau, \mathbf{k}), \end{aligned} \tag{54}$$

gdje I_n ima jednaku ulogu kao i F_n prethodnom izrazu. Relacijom (54) su određena statistička svojstva proizvoljne fizikalne veličine X koja se može tretirati računom smetnje. Bilo koji korelator ili očekivana vrijednost od X se svodi na one poznate od $\tilde{\delta}_0$. Tako se npr. može vidjeti da više potencije od $\tilde{\delta}_0$ generiraju odstupanje od početne Gausijanske gustoće vjerojatnosti jer očekivanje $\langle X(\tau, \mathbf{k})\rangle$ ne iščezava. Nadalje je od interesa 2-korelator od X u najnižem redu računa smetnje:

$$\langle X(\tau, \mathbf{k})X(\tau, \mathbf{q})\rangle = \langle X^{(1)}(\tau, \mathbf{k})X^{(1)}(\tau, \mathbf{q})\rangle + ... \tag{55}$$

Uvrštavanjem $X^{(1)}$ iz (54) u (55), lako se dobiva

$$\begin{aligned} \langle X(\tau, \mathbf{k})X(\tau, \mathbf{q})\rangle \approx &(2\pi)^3\delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \\ &\times I_1(\mathbf{k})P_L(\tau, k)I_1(\mathbf{q}), \end{aligned} \tag{56}$$

pri čemu nema integracije unatoč ponovljenim argumentima. Ovo je traženi rezultat u kojem je $P_L(\tau, k) = D_+^2(\tau)P_{\delta_0}(k)$ uobičajena veličina koja se zove linearni spektar snage. U sljedećoj sekciji je pokazano da se novim formalizmom može zaključiti ekvivalentan izraz u najnižem redu računa smetnje.

III. NOVI FORMALIZAM

Za početak se uvodi novi zapis jednadžbi evolucije (37). Ideja je zamijeniti kontrast i divergenciju brzine s dvokomponentnim objektom. U tu svrhu, definira se nova veličina - **srednji dublet strukture** - koji kao vektorska funkcija $\Phi : I \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $I \subseteq \mathbb{R}$, zadovoljava jednadžbu

$$L_{\mu\nu}\Phi_\nu(\tau, \mathbf{k}) + \gamma_{\mu\nu\eta}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{u})\Phi_\nu(\tau, \mathbf{q})\Phi_\eta(\tau, \mathbf{u}) = 0, \tag{57}$$

gdje je L diferencijalno preslikavanje unutar skupa funkcija u kojem je i Φ, linearno s obzirom na zbrajanje funkcija po točkama i množenje realnim brojem te se definiraju komponente $L_{\mu\nu}$ kao koeficijenti koji zadovoljavaju $L(\phi)(\tau, \mathbf{k}) = (L_{1\mu}\phi_\mu(\tau, \mathbf{k}),\ L_{2\mu}\phi_\mu(\tau, \mathbf{k}))$, a poslagani u matricu izgledaju ovako:

$$[L_{\mu\nu}(\tau)] = \begin{pmatrix} \partial_\tau & 1 \\ \mathcal{D}(\tau) & \partial_\tau + \mathscr{H}(\tau) \end{pmatrix}; \tag{58}$$

Funkcija γ preslikava tri elementa iz Fourier-transformiranog prostora u **troindeksnu matricu** kojoj su svi koeficijenti nula osim $\gamma_{112}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{u}) = E(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{u})$ i $\gamma_{222}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{u}) = F(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{u})$. Raspisivanjem jednadžbe (57) u matričnom obliku i usporedbom sa sustavom (37) razaznaje se interpretacija komponenti srednjeg dubleta strukture:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \partial_\tau\Phi_1(\tau, \mathbf{k}) + \Phi_2(\tau, \mathbf{k}) \\ \mathcal{D}\Phi_1(\tau, \mathbf{k}) + \partial_\tau\Phi_2(\tau, \mathbf{k}) + \mathscr{H}(\tau)\Phi_2(\tau, \mathbf{k}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -E(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{u})\Phi_1(\tau, \mathbf{q})\Phi_2(\tau, \mathbf{u}) \\ -F(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{u})\Phi_2(\tau, \mathbf{q})\Phi_2(\tau, \mathbf{u}) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{59}$$

dakle, prva komponenta $\Phi_1(\tau, \mathbf{k})$ predstavlja kontrast gustoće, a druga $\Phi_2(\tau, \mathbf{k})$ divergenciju brzine, no ovime je jasno i da su jednadžba (57) i sustav (37) ekvivalentni opisi evolucije kozmičke strukture na velikoj skali.

Jednadžba evolucije (57) je deterministička. Starim formalizmom, statistička svojstva se, grubo govoreći, uvode u dva koraka. (1.) Slučajnim poljima se proglašavaju funkcije koje to inače nisu, (2.) a početnoj konfiguraciji kontrasta gustoće se nameće direktno nasljeđivanje (gotovo) Gausijanske gustoće vjerojatnosti inflacijskih kvantnih fluktuacija prostora. Novim formalizmom se uvođenju statistike pristupa drugačije. **Tvrdi se da je deterministička jednadžba evolucije** (57) **zapravo usrednjenje temeljnije jednadžbe sa slučajnim poljima**

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}\phi_\nu(\tau, \mathbf{k}) + \gamma_{\mu\nu\eta}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{u})\phi_\nu(\tau, \mathbf{q})\phi_\eta(\tau, \mathbf{u}) \\ = \epsilon_\mu(\tau, \mathbf{k}) \end{aligned} \tag{60}$$

i to upravo **u odnosu na gustoću vjerojatnosti konfiguracija nove veličine** ϵ, koja je opisana kao vektorsko slučajno polje. Toj novoj veličini se u ovom radu pridjeljuje naziv **ϵ-fenomen**. Veličina ϕ, koja je rješenje jednadžbe (60) uz odgovarajuće početne i rubne uvijete, se naziva **dublet strukture**. ϵ-fenomen je prigodno opskurnog prizvuka budući da je njegova fizikalna interpretacija zasad nepoznata. On u izrazu (60) ima ulogu izvora za dublet strukture, pa time i za kontrast gustoće, i zbog toga se čini razumnim kako možda opisuje neko svojstvo prostorvremena poput inflacijskih kvantnih fluktuacija prostora, ali mogao bi opisivati i neki drugi fenomen. Ovdje se izabire ići u smjeru tumačenja fluktuacijama prostora, a to na kraju ovog rada rezultira slaganjem sa starim formalizmom, što svakako ide u prilog tom odabiru. Stoga, za ϵ-fenomen u običnom prostoru ($\tilde{\epsilon}$) se zahtjeva Gausijanska gustoća vjerojatnosti konfiguracija

$$\mathbb{P}_{\tilde{\epsilon}} = \frac{1}{\mathcal{N}\{1|\tilde{\epsilon}|N^I_{\alpha\beta}\}}\mathbb{G}\{\tilde{\epsilon}|N^I_{\mu\nu}\}, \tag{61}$$

gdje je N^I zasad nepoznato polje realnih kvadratnih 2×2 matrica. Valja uočiti još jednu znatnu razliku u odnosu na stari formalizam. U njemu kontrast gustoće ima Gausijansku gustoću vjerojatnosti samo u početnom trenutku. S druge strane, u novom formalizmu ϵ-fenomen ima Gausijansku gustoću vjerojatnosti uvijek(!), dakle njegova očekivana vrijednost u svakoj točki je u bilo kojem trenutku nula. To se može zamisliti kao stalno prisutan prostorni "šum" koji generira kozmičku strukturu.

Po uzoru na izraze (46) i (47) iz okvira starog formalizma, zna se da je moguće transformirati $\mathbb{P}_{\tilde{\epsilon}}$ u $\mathbb{P}_\epsilon$ pa se može detaljnije promotriti što je potrebno za dobiti iz statističke jednadžbe (60) determinističku jednadžbu (57). Jednakost (60) se množi s $\mathbb{P}_\epsilon$ i zatim funkcionalno integrira po [ ]:

$$L_{\mu\nu}\int_{[\epsilon]}\phi_\nu[\epsilon(\tau,\mathbf{k})]\mathbb{P}_\epsilon+\int_{[\epsilon]}\gamma_{\mu\nu\eta}(\mathbf{k},\mathbf{q},\mathbf{u})\phi_\nu[\epsilon(\tau,\mathbf{q})]\phi_\eta[\epsilon(\tau,\mathbf{u})]\mathbb{P}_\epsilon=\langle\epsilon_\mu(\tau,\mathbf{k})\rangle\,, \tag{62}$$

gdje se koristi očito svojstvo da je dublet strukture funkcija ϵ-fenomena, vidljivo iz same jednadžbe (60). Očekivanje ϵ-fenomena je nula: $\langle\epsilon_\mu(\tau,\mathbf{k})\rangle=0$, zbog Gausijanske gustoće vjerojatnosti. Sada je jasna veza između dubleta strukture i srednjeg dubleta strukture (Φ) iz jednadžbe evolucije (57):

$$\Phi(\tau,\mathbf{k})=\int_{[\epsilon]}\phi[\epsilon(\tau,\mathbf{k})]\mathbb{P}_\epsilon. \tag{63}$$

Očekivane vrijednosti komponenti dubleta strukture, u odnosu na gustoću vjerojatnosti ϵ-fenomena, su kontrast gustoće i divergencija brzine. Ako se uvede oznaka

$$\int_{[\epsilon]}\cdot\ \mathbb{P}_\epsilon\equiv\langle\cdot\rangle_\epsilon\,, \tag{64}$$

onda se lijepo može zapisati relacija koja također mora vrijediti, uspoređujući (57) i (62):

$$\begin{aligned}&\gamma_{\mu\nu\eta}(\mathbf{k},\mathbf{q},\mathbf{u})\left\langle\phi_\nu[\epsilon(\tau,\mathbf{q})]\phi_\eta[\epsilon(\tau,\mathbf{u})]\right\rangle_\epsilon\\&=\gamma_{\mu\nu\eta}(\mathbf{k},\mathbf{q},\mathbf{u})\left\langle\phi_\nu[\epsilon(\tau,\mathbf{q})]\right\rangle_\epsilon\left\langle\phi_\eta[\epsilon(\tau,\mathbf{u})]\right\rangle_\epsilon\,,\end{aligned} \tag{65}$$

odnosno, prilikom integracije po $\mathbf{q}$ i $\mathbf{u}$ korelacijski dio od $\gamma_{\mu\nu\eta}(\mathbf{k},\mathbf{q},\mathbf{u})\left\langle\phi_\nu[\epsilon(\tau,\mathbf{q})]\phi_\eta[\epsilon(\tau,\mathbf{u})]\right\rangle_\epsilon$ mora iščezavat. Time je replicirana deterministička formula (57). U nastavku ovog rada se više ne istražuju relacije (63) i (65) niti njihove posljedice. Cilj je pokazati ekvivalentnost rezultata u najnižem redu računa smetnje proizvedenih starim i novim formalizmom.

A. Izvod $N_{\mu\nu}$ i $\mathbb{P}_\epsilon$

Izvod $N_{\mu\nu}$ je sličan onome za U^I iz starog formalizma. Uvodi se funkcija izvodnica Ξ za korelatore ϵ-fenomena u običnom prostoru:

$$\Xi(J)=\frac{\int_{[\tilde{\epsilon}]}\exp[iJ_\mu(\mathbf{x})\tilde{\epsilon}_\mu(\tau,\mathbf{x})]\mathbb{G}\{\tilde{\epsilon}|N^I_{\nu\eta}\}}{\mathcal{N}\{1|\tilde{\epsilon}|N^I_{\alpha\beta}\}}, \tag{66}$$

s tim da je u ovom slučaju argument (J) od Ξ također dvokomponentni vektor. Funkcionalnim deriviranjem funkcije izvodnice se dobivaju korelatori od $\tilde{\epsilon}$:

$$\begin{aligned}&\langle\tilde{\epsilon}_{\mu_1}(\tau,\mathbf{x}_1)...\tilde{\epsilon}_{\mu_m}(\tau,\mathbf{x}_m)\rangle\\&=\frac{1}{i^m}\Delta^m_{J_{\mu_1}(\mathbf{x}_1)...J_{\mu_m}(\mathbf{x}_m)}\Xi(0).\end{aligned} \tag{67}$$

Upotrebom eliminirajuće supstitucije u funkcionalnom integralu u brojniku izvodnice izraz se svodi na

$$\Xi(J)=\mathbb{G}\{J|N_{\mu\nu}\}. \tag{68}$$

Izračunom 2-korelatora od $\tilde{\epsilon}_\mu$ i $\tilde{\epsilon}_\nu$, funkcionalnim deriviranjem funkcionala (68) prema formuli (67), određen je $N_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}\langle\tilde{\epsilon}_\mu(\tau,\mathbf{x})\tilde{\epsilon}_\nu(\tau,\mathbf{y})\rangle&=N_{\mu\nu}(\tau,\mathbf{x},\mathbf{y})\\&=N_{\mu\nu}(\tau,\mathbf{x}-\mathbf{y},\mathbf{0})\\&=N_{\mu\nu}(\tau,\mathbf{y}-\mathbf{x},\mathbf{0}).\end{aligned} \tag{69}$$

Zbog posljednjih jednakosti je moguće odrediti $N_{\mu\nu}$ u Fourier-transformiranom prostoru pa time i $\mathbb{P}_\epsilon$. Svaku funkciju u $\mathbb{P}_{\tilde{\epsilon}}$ se zapiše s pomoću relacije (4), a nakon uređivanja izraza proizlazi

$$\mathbb{P}_\epsilon=\frac{1}{\mathcal{N}\{1|\epsilon|K^I_{\alpha\beta}\}}\mathbb{G}\{\epsilon|K^I_{\mu\nu}\}, \tag{70}$$

gdje je

$$K^I_{\mu\nu}(\tau,\mathbf{k},\mathbf{q})=\frac{1}{(2\pi)^3}\delta_D(\mathbf{k}+\mathbf{q})\widetilde{N^I_{\mu\nu}}(\tau,k). \tag{71}$$

Za odrediti vezu $K^I_{\mu\nu}$ s 2-korelatorima ϵ-fenomena u Fourier-transformiranom prostoru opet se može izračunati odgovarajuća funkcija izvodnica, no to bi bilo već treće ponavljanje tog postupka u ovom radu, stoga, povlačeći paralelu s izrazima (46), (50) i (69) zaključuje se

$$\langle\epsilon_\mu(\tau,\mathbf{k})\epsilon_\nu(\tau,\mathbf{q})\rangle=K_{\mu\nu}(\tau,\mathbf{k},\mathbf{q}). \tag{72}$$

Ako se za $K_{\mu\nu}$, po uzoru na $K^I_{\mu\nu}$, pretpostavi oblik

$$K_{\mu\nu}(\tau,\mathbf{k},\mathbf{q})=(2\pi)^3\delta_D(\mathbf{k}+\mathbf{q})Y_{\mu\nu}(\tau,k), \tag{73}$$

onda, upotrebom definicijske relacije (6) za funkcionalni inverz, proizlazi da je matrica $[Y_{\mu\nu}(\tau,k)]$ matrični inverz od $[\widetilde{N^I_{\mu\nu}}(\tau,k)]$, za svaki $\tau\in I$, $I\subseteq\mathbb{R}$, i $\mathbf{k}$ iz Fourier-transformiranog prostora. Usporedbom formula (72) i (73) s relacijom (40) dobiva se veza

$$Y_{\mu\nu}(\tau,k)=P_{\tilde{\epsilon}_\mu\tilde{\epsilon}_\nu}(\tau,k). \tag{74}$$

Time se gustoća vjerojatnosti $\mathbb{P}_\epsilon$ može zapisati na način

$$\mathbb{P}_\epsilon=\frac{\exp[-\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbf{k}}\epsilon_\mu(\tau,\mathbf{k})\widetilde{N^I_{\mu\nu}}(\tau,k)\epsilon_\nu(\tau,-\mathbf{k})]}{\mathcal{N}\{1|\epsilon|\widetilde{N^I_{\alpha\beta}}\}}, \tag{75}$$

gdje je $[\widetilde{N^{I}_{\mu\nu}}(\tau,k)]$ matrični inverz matrice spektara snage komponenti ϵ-fenomena $[P_{\tilde{\epsilon}_\mu\tilde{\epsilon}_\nu}(\tau,k)]$, s kojima je gustoća vjerojatnosti potpuno određena. U ovom novom formalizmu su spektri snage $P_{\tilde{\epsilon}_\mu\tilde{\epsilon}_\nu}$ slobodni parametri. Zbog toga je ekvivalent izraza (56), koji je krajnji cilj ove sekcije, izražen preko tih spektara snage, a ne spektra snage početnog kontrasta gustoće (P_{δ_0}).

B. Gustoća vjerojatnosti konfiguracija dubleta strukture i funkcija izvodnica za korelatore

Ova podsekcija predstavlja još jedno ključno račvanje starog i novog formalizma. U potonjem je zasad najveća novina koncept ϵ-fenomena. Moglo bi se nastaviti na način sličan starom formalizmu - razvijati fizikalne veličine u okviru računa smetnje u sumu potencija ϵ-fenomena, koji je mali slobodni parametar. No, izabire se drugačija ruta. Ideja je razvijati u sumu potencija nelinearnog člana $\gamma_{\mu\nu\eta}(\mathbf{k},\mathbf{q},\mathbf{u})\phi_\nu(\tau,\mathbf{q})\phi_\eta(\tau,\mathbf{u})$ iz jednadžbe evolucije (60), koji tijekom vremena postaje značajnijeg doprinosa.

Prvo valja primijetiti kako se može konstruirati gustoća vjerojatnosti konfiguracija dubleta strukture. Već je utvrđeno kako jednadžba evolucije (60) sugerira funkcijsku vezu ϵ-fenomena i dubleta strukture. Zato se za gustoću vjerojatnosti predlaže sljedeća formula:

$$\mathbb{P}_\phi = \frac{1}{\mathcal{N}\{1|\epsilon(\phi)|K^I_{\alpha\beta}\}}\mathbb{G}\{\epsilon(\phi)|K^I_{\mu\nu}\}, \tag{76}$$

a $\epsilon(\phi)$ je poznat, upravo sama jednadžba evolucije (60):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\phi = \frac{1}{\mathcal{N}\{1|\epsilon(\phi)|K^I_{\alpha\beta}\}}\exp\{-\frac{1}{2}[L_{\mu\eta}\phi_\eta(\tau,\mathbf{k}) + \gamma_{\mu\eta\sigma}(\mathbf{k},\mathbf{u},\mathbf{b})\phi_\eta(\tau,\mathbf{u})\phi_\sigma(\tau,\mathbf{b})]\\ \times K^I_{\mu\nu}(\tau,\mathbf{k},\mathbf{q})[L_{\nu\omega}\phi_\omega(\tau,\mathbf{q}) + \gamma_{\nu\omega\xi}(\mathbf{q},\mathbf{w},\mathbf{a})\phi_\omega(\tau,\mathbf{w})\phi_\xi(\tau,\mathbf{a})]\}.\end{aligned} \tag{77}$$

Sada se može definirati funkcija izvodnica za korelatore dubleta strukture. Reciklira se oznaka Z pa vrijedi:

$$Z(J) = \frac{\int_{[\phi]}\exp[iJ_\mu(\mathbf{k})\phi_\mu(\tau,\mathbf{k})]\mathbb{G}\{\epsilon(\phi)|K^I_{\nu\eta}\}}{\mathcal{N}\{1|\epsilon(\phi)|K^I_{\alpha\beta}\}}. \tag{78}$$

Ako se funkcija izvodnica dovede u oblik bez funkcionalnog omjera, onda se funkcionalnim deriviranjem na način

$$\begin{aligned}&\langle\phi_{\mu_1}(\tau,\mathbf{x}_1)...\phi_{\mu_m}(\tau,\mathbf{x}_m)\rangle\\ &= \frac{1}{i^m}\Delta^m_{J_{\mu_1}(\mathbf{x}_1)...J_{\mu_m}(\mathbf{x}_m)}Z(0)\end{aligned} \tag{79}$$

može generirati proizvoljan m-korelator dubleta strukture. Lako je doći u napast upotrijebiti eliminirajuću supstituciju, međutim, to u ovom slučaju nije moguće zbog kompliciranije forme gustoće vjerojatnosti $\mathbb{P}_\phi$. Eliminirajućom supstitucijom bi omjer bio uklonjiv da je oblika

$$\frac{1}{\mathcal{N}\{1|\phi|K^I_{\alpha\beta}\}}\int_{[\phi]}\exp[iJ_\mu(\mathbf{k})\phi_\mu(\tau,\mathbf{k})]\mathbb{G}\{\phi|K^I_{\nu\eta}\}, \tag{80}$$

što očito ne odgovara funkciji izvodnici u pitanju. Kako bi se zaobišao ovaj problem povoljno je iskoristiti Hubbard-Stratonovichev integral, no to se mora napraviti vrlo pažljivo. Ova izvodnica je primjer funkcionalnog omjera koji je definiran izrazom (15). Hubbard-Stratonovichevim integralom treba zamijeniti integralnu jezgru $\mathbb{G}\{\epsilon(\phi)|K^I_{\mu\nu}\}$ u definicijskom izrazu prije uzimanja limesa, uz to da ju je potrebno zapisati kao u formuli (75):

$$\begin{aligned}&\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^3}\lambda_n\sum_{j=1}^{n}\epsilon_\mu[\phi(\tau,\mathbf{k}_j)]\widetilde{N^I_{\mu\nu}}(\tau,k_j)\epsilon_\nu[\phi(\tau,-\mathbf{k}_j)]\right\}\\ &= \sqrt{\frac{\prod_{l=1}^{n}\det\{(2\pi)^3[Y_{\alpha\beta}(\tau,k_l)]\}}{(2\pi)^{2n}}}\\ &\times\int_{\chi(\tau,\mathbf{k}_1)}...\int_{\chi(\tau,\mathbf{k}_n)}\exp\left\{-\frac{(2\pi)^3}{2}\lambda_n\sum_{j=1}^{n}\chi_\mu(\tau,\mathbf{k}_j)Y_{\mu\nu}(\tau,k_j)\chi_\nu(\tau,-\mathbf{k}_j) + i\lambda_n\sum_{j=1}^{n}\chi_\mu(\tau,\mathbf{k}_j)\epsilon_\mu[\phi(\tau,\mathbf{k}_j)]\right\},\end{aligned} \tag{81}$$

pri čemu je polje Y definirano s relacijama (74) i (73). Nekoliko je bitnih zamjetki. Prvo, na jednak način treba uvesti Hubbard-Stratonovichev integral i u normi iz funkcije izvodnice (78)(!) kako bi se funkcionalni omjer mogao svesti na identitet (17) eliminirajućim supstitucijama. To ima za posljedicu dokidanje korijenskog predfaktora iz gornje formule. Drugo, upotreba Hubbard-Stratonovich integrala je moguća isključivo zbog mogućnosti zapisa integralne jezgre kao u formuli (75), koji je pak moguć zbog Diracovih delta distribucija koje se pojavljuju samo u Fourier-transformiranom prostoru. I treće, pojavilo se novo slučajno polje χ koje se (zasad) imenuje "χ**-polje**" te bi svakako moglo imati fizikalnu interpretaciju(!). Ipak u ovom radu ona nije razjašnjena, ali se nadalje svejedno, zbog dodatne općenitosti, koristi proširena funkcija izvodnica (78) kojom se mogu generirati i korelatori χ-polja. Uzevši sve navedeno u obzir, funkcija izvodnica za korelatore dubleta strukture i χ-polja je funkcionalni omjer s dvostrukim funkcionalnim integralima

$$Z(J,M)=\frac{\int_{[\phi]}\exp[iJ_\mu(\mathbf{k})\phi_\mu(\tau,\mathbf{k})]\int_{[\chi]}\exp[iM_\mu(\mathbf{k})\chi_\mu(\tau,\mathbf{k})]\exp[i\chi_\mu(\tau,\mathbf{k})L_{\mu\nu}\phi_\nu(\tau,\mathbf{k})+S(\tau)]\mathbb{G}\{\chi|K_{\eta\sigma}\}}{\int_{[\phi]}\int_{[\chi]}\exp[i\chi_\omega(\tau,\mathbf{k})L_{\omega\xi}\phi_\xi(\tau,\mathbf{k})+S(\tau)]\mathbb{G}\{\chi|K_{\alpha\beta}\}}, \tag{82}$$

gdje varijabla J služi za generiranje korelatora od dubleta strukture, dok M ima istu svrhu za χ-polje, a funkcija $S(\tau)=i\chi_\mu(\tau,\mathbf{k})\gamma_{\mu\nu\eta}(\mathbf{k},\mathbf{q},\mathbf{u})\phi_\nu(\tau,\mathbf{q})\phi_\eta(\tau,\mathbf{u})$ predstavlja nelinearni dio jednadžbe evolucije (60).

Sve ovo je rađeno kako bi se eliminiralo dva funkcionalna integrala iz funkcije izvodnice, a sada ih je četiri! Unatoč tome može se postići cilj, uz puno pisanja. U ovom dijelu diskusije novog formalizma treba primijeniti račun smetnje. Kako je rečeno, razvija se u sumu potencija nelinearnog dijela (S):

$$\exp[S(\tau)]=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}S^j(\tau). \tag{83}$$

Odmakom vremena članovi s višim potencijama postaju nezanemarivi. Najniži red računa smetnje, koji je od interesa, je onaj u kojem se aproksimira $\exp[S(\tau)]\approx 1$, odnosno

$$Z(J,M)\approx Z_0(J,M)=\frac{\int_{[\phi]}\exp[iJ_\mu(\mathbf{k})\phi_\mu(\tau,\mathbf{k})]\int_{[\chi]}\exp[iM_\mu(\mathbf{k})\chi_\mu(\tau,\mathbf{k})]\exp[i\chi_\mu(\tau,\mathbf{k})L_{\mu\nu}\phi_\nu(\tau,\mathbf{k})]\mathbb{G}\{\chi|K_{\eta\sigma}\}}{\int_{[\phi]}\int_{[\chi]}\exp[i\chi_\omega(\tau,\mathbf{k})L_{\omega\xi}\phi_\xi(\tau,\mathbf{k})]\mathbb{G}\{\chi|K_{\alpha\beta}\}} \tag{84}$$

i u nastavku se ovaj funkcionalni omjer računa. Aproksimaciju je potrebno napraviti i u normi funkcije izvodnice radi konzistentnosti(!) pa se konačno može upotrijebiti eliminirajuća supstitucija. U starom formalizmu je prvi red računa smetnje ujedno i najniži, a u novom formalizmu to odgovara nultom redu.

C. Najniži red računa smetnje

Najprije se eliminiraju funkcionalni integrali po χ. U brojniku se vrši eliminirajuća supstitucija

$$\chi_\mu(\tau,\mathbf{k})=\chi'_\mu(\tau,\mathbf{k})+iK^I_{\mu\nu}(\tau,\mathbf{k},\mathbf{q})R_\nu(\tau,\mathbf{q}) \tag{85}$$

gdje je $R_\mu(\tau,\mathbf{k})=M_\mu(\tau,\mathbf{k})+L_{\mu\nu}\phi_\nu(\tau,\mathbf{k})$ zgodna pokrata, a u nazivniku se primjenjuje

$$\chi_\mu(\tau,\mathbf{k})=\chi'_\mu(\tau,\mathbf{k})+iK^I_{\mu\nu}(\tau,\mathbf{k},\mathbf{q})L_{\nu\eta}\phi_\eta(\tau,\mathbf{q}) \tag{86}$$

U gotovo svakom dijelu računa iz ove podsekcije intenzivno se koriste relacije (6), (7) i (8) za funkcionalne inverze. Uređivanjem izraza se dobiva

$$Z_0(J,M)=\frac{\mathbb{G}\{M|K^I_{\sigma\omega}\}\int_{[\phi]}\exp[iJ_\mu(\mathbf{k})\phi_\mu(\tau,\mathbf{k})-M_\mu(\mathbf{k})K^I_{\mu\nu}(\tau,\mathbf{k},\mathbf{q})L_{\nu\eta}\phi_\eta(\tau,\mathbf{q})]\mathbb{G}\{L(\phi)|K^I_{\xi\rho}\}}{\mathcal{N}\{1|L(\phi)|K^I_{\alpha\beta}\}}. \tag{87}$$

Preostaje još eliminirati funkcionalne integrale po ϕ. Tu treba biti oprezan jer je L diferencijalno preslikavanje. Funkcionalni integrali po ϕ nemaju utjecaja na njegov diferencijalni dio (D) pa ga treba izdvojiti:

$$L(\phi)(\tau, \mathbf{k}) = D(\phi)(\tau, \mathbf{k}) + B(\phi)(\tau, \mathbf{k}),$$
$$[D_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} \partial_\tau & 0 \\ 0 & \partial_\tau \end{pmatrix}, \; [B_{\mu\nu}(\tau)] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ Đ(\tau) & \mathscr{H}(\tau) \end{pmatrix}. \tag{88}$$

U narednoj etapi računa će biti korisna funkcija

$$C_{\mu\nu}(\tau, \mathbf{k}, \mathbf{q}) = B^T_{\mu\alpha}(\tau) K^I_{\alpha\beta}(\tau, \mathbf{k}, \mathbf{q}) B_{\beta\nu}(\tau), \tag{89}$$

gdje $B^T_{\mu\nu}(\tau)$ označava koeficijent transponirane matrice od $[B_{\nu\mu}(\tau)]$. Potreban je i funkcionalni inverz od C. Ako se pretpostavi oblik inverza takav da vrijedi $C^I_{\mu\nu}(\tau, \mathbf{k}, \mathbf{q}) = \check{S}_{\mu\alpha} K_{\alpha\beta}(\tau, \mathbf{k}, \mathbf{q}) \check{C}_{\beta\nu}$, za neke nepoznate matrice $\check{S}$ i $\check{C}$, onda se iz definicijske relacije (6) za funkcionalni inverz deducira

$$C^I_{\mu\nu}(\tau, \mathbf{k}, \mathbf{q}) = B^{-1}_{\mu\alpha}(\tau) K_{\alpha\beta}(\tau, \mathbf{k}, \mathbf{q}) B^{-T}_{\beta\nu}(\tau), \tag{90}$$

pri čemu je $B^{-1}_{\mu\nu}(\tau)$ koeficijent matričnog inverza od $[B_{\mu\nu}(\tau)]$, a $B^{-T}_{\mu\nu}(\tau)$ koeficijent od transponirane inverzne matrice od $[B_{\mu\nu}(\tau)]$. Uvrštavanjem gornjeg rastava (88) u funkciju izvodnicu (87) slijedi

$$Z_0(J, M) = \frac{\mathbb{G}\{M|K^I_{\sigma\omega}\}\exp[-M_\mu(\mathbf{k}) K^I_{\mu\nu}(\tau, \mathbf{k}, \mathbf{q}) D_{\nu\eta} \phi_\eta(\tau, \mathbf{q})] \int_{[\phi]} \exp[i T_\mu(\tau, \mathbf{k}) \phi_\mu(\tau, \mathbf{k})] \mathbb{G}\{\phi|C_{\xi\rho}\}}{\mathcal{N}\{i Q_\kappa(\tau, \mathbf{k}) \phi_\kappa(\tau, \mathbf{k}) | \phi | C_{\alpha\beta}\}}, \tag{91}$$

gdje su $Q_\mu(\tau, \mathbf{k}) = i D_{\nu\eta} \phi_\eta(\tau, \mathbf{q}) K^I_{\nu\beta}(\tau, \mathbf{q}, \mathbf{k}) B_{\beta\mu}$ i $T_\mu(\tau, \mathbf{k}) = J_\mu(\mathbf{k}) + i M_\nu(\tau, \mathbf{q}) K^I_{\nu\eta}(\tau, \mathbf{q}, \mathbf{k}) B_{\eta\mu} + Q_\mu(\tau, \mathbf{k})$ pokrate. U funkcionalnom integralu u brojniku se vrši eliminirajuća supstitucija

$$\phi_\mu(\tau, \mathbf{k}) = \phi'_\mu(\tau, \mathbf{k}) + i C^I_{\mu\nu}(\tau, \mathbf{k}, \mathbf{q}) T_\nu(\tau, \mathbf{q}), \tag{92}$$

a u onom u nazivniku

$$\phi_\mu(\tau, \mathbf{k}) = \phi'_\mu(\tau, \mathbf{k}) + i C^I_{\mu\nu}(\tau, \mathbf{k}, \mathbf{q}) Q_\nu(\tau, \mathbf{q}), \tag{93}$$

što konačno rezultira eliminacijom i posljednjih funkcionalnih integrala iz funkcije izvodnice:

$$Z_0(J, M) = \frac{\mathbb{G}\{M|K^I_{\sigma\omega}\}\exp[-M_\mu(\mathbf{k}) K^I_{\mu\nu}(\tau, \mathbf{k}, \mathbf{q}) D_{\nu\eta} \phi_\eta(\tau, \mathbf{q})] \mathbb{G}\{T|C^I_{\xi\rho}\}}{\mathbb{G}\{Q|C^I_{\alpha\beta}\}}. \tag{94}$$

Daljnjim raspisivanjem dobivenog izraza dolazi se do finalnog oblika funkcije izvodnice za korelatore dubleta strukture i χ-polja u najnižem redu računa smetnje:

$$Z_0(J, M) = \exp\{-i J_\mu(\mathbf{k}) B^{-1}_{\mu\nu}(\tau) [D_{\nu\eta} \phi_\eta(\tau, \mathbf{k}) + M_\nu(\mathbf{k})]\} \mathbb{G}\{J|C^I_{\alpha\beta}\}. \tag{95}$$

Polje $D(\phi)$ se pojavljuje u sumnjivo sličnoj ulozi kao funkcija M. Ona je uvedena da bi se preko nje generirali korelatori novog χ-polja. No, možda ova sličnost u ulogama $D(\phi)$ i M znači da je funkcija M redundantno uvedena. Novim formalizmom je "prirodno" proizašla potencijalno nova fizikalna veličina χ-polje pa je moguće da istim formalizmom "prirodno" proizlazi način generiranja korelatora χ-polja - upravo preko polja $D(\phi)$.

Sada se može upotrijebiti formula (79) za određivanje 2-korelatora dubleta strukture. Prije toga je potrebno eksplicitno odrediti inverz matrice $[B_{\mu\nu}(\tau)]$ preko kojeg je izražena funkcija izvodnica (95):

$$[B^{-1}_{\mu\nu}(\tau)] = \frac{1}{Đ(\tau)} \begin{pmatrix} -\mathscr{H}(\tau) & 1 \\ Đ(\tau) & 0 \end{pmatrix}. \tag{96}$$

Naposljetku, 2-korelator od $\phi_\mu(\tau, \mathbf{k})$ i $\phi_\nu(\tau, \mathbf{q})$ u najnižem redu računa smetnje je dan formulom

$$\begin{aligned} \langle \phi_\mu(\tau, \mathbf{k}) \phi_\nu(\tau, \mathbf{q}) \rangle &\approx (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \\ &\quad \times B^{-1}_{\mu\alpha}(\tau) P_{\tilde{\epsilon}_\alpha \tilde{\epsilon}_\beta}(\tau, k) B^{-T}_{\beta\nu}(\tau). \end{aligned} \tag{97}$$

Uočava se sličnost s izrazom (56) iz starog formalizma. U novom formalizmu su spektri snage od komponenti ϵ-fenomena ($P_{\tilde{\epsilon}_\alpha \tilde{\epsilon}_\beta}(\tau, k)$) slobodni parametri preko kojih su statistička svojstva kozmičke strukture izražena. Ti spektri snage se možda mogu odrediti iz inflacijskih modela. Pitanje je i koliko je bitno poznavanje fizikalne interpretacije ϵ-fenomena da bi se to postiglo. Kako god, već iz izloženog se može zaključiti implicitna veza spektara snage ϵ-fenomena s linearnim spektrom snage iz starog formalizma. Ako se u formuli (56) stavi $X = \tilde{\delta}$ i upotrijebi činjenica $F_1(\mathbf{k}) = 1$ u razvoju (53) onda usporedbom s formulom (97) proizlazi

$$P_L(\tau, k) = B^{-1}_{1\mu}(\tau) P_{\tilde{\epsilon}_\mu \tilde{\epsilon}_\nu}(\tau, k) B^{-T}_{\nu 1}(\tau). \tag{98}$$

Ovime se zaključuje prva demonstracija novog formalizma za statistička svojstva kozmičke strukture velikih skala.

IV. ZAKLJUČAK

"Funkcionalni inverz", čiju definiciju spominje Jeong[2], može se poopćiti s funkcionalnim inverzom polja matrica, danim relacijama (6) i (7). Dvije jednadžbe evolucije strukture (37) mogu se zamijeniti s jednom jednadžbom evolucije (57) srednjeg dubleta strukture (Φ) ako se komponente tog dubleta protumače kao (deterministički) kontrast gustoće (δ) i divergencija brzine (θ) kozmičke strukture. Ovu novu jednadžbu je moguće shvatiti kao usrednjenje jednadžbe (60) u odnosu na gustoću vjerojatnosti ϵ-fenomena, koji je izvor nastajanja kozmičke strukture. Rješenje jednadžbe (60) je slučajno polje nazvano "dublet strukture" (ϕ). Relacija (63) specificira kako dublet strukture opisuje kozmičku strukturu. Interpretacija ϵ-fenomena ostaje neodređena uz prijedlog da opisuje inflacijske kvantne fluktuacije prostora. Zahtjev usrednjenja u odnosu na gustoću vjerojatnosti ϵ-fenomena implicira jednadžbu (65) zasad neistraženih posljedica. Zbog istog zahtjeva su spektri snage ($P_{\tilde{\epsilon}_\mu \tilde{\epsilon}_\nu}$) komponenti ϵ-fenomena slobodni parametri u novom formalizmu umjesto spektra snage početnog kontrasta gustoće (P_{δ_0}). Oni se možda mogu odrediti iz inflacijskih modela.

Nadalje se formalizam konstruirao tako da se u računu smetnje razvija u sumu potencija nelinearnog člana iz jednadžbe evolucije (60) za dublet strukture (ϕ), opet u svrhu postizanja željene mogućnosti primjene računa smetnje direktno na funkciju izvodnicu za relevantne korelatore. Takav odabir je rezultirao pojavom χ-polja koje bi moglo imati fizikalnu interpretaciju. Upotrebom funkcionalnih inverza polja matrica može se izračunati funkciju izvodnicu za korelatore dubleta strukture i χ-polja u najnižem red računa smetnje (Z_0), koja je dana izrazom (95). Čini se da je samim izračunom spontano uveden način za generiranje korelatora χ-polja s pomoću polja $D(\phi)$, jednako kao što se prije spontano pojavilo χ-polje. Konačno, iz funkcije izvodnice Z_0 uspješno je izveden 2-korelator dubleta strukture u najnižem redu računa smetnje i iz njega je zaključena implicitna veza (98) spektara snage ϵ-fenomena ($P_{\tilde{\epsilon}_\mu \tilde{\epsilon}_\nu}$) s linearnim spektrom snage (P_L) iz starog formalizma.

ZAHVALA

Na ovaj način želim izraziti zahvalnost svom mentoru, dr. sc. Zvonimiru Vlahu, na davanju ove zanimljive teme i poučavanju, s čime mi je pomogao u mom prvom istraživanju "na istraživačkoj fronti" u fizici.

[1] S. Dodelson and F. Schmidt, *Modern Cosmology* (Academic Press, 2021)

[2] D. Jeong, Cosmology with high ($z > 1$) redshift galaxy surveys, The University of Texas at Austin, 2010., Sekc. 2.1-2.3.