

Utjecaj kozmološkog širenja na lokalnu fiziku

Matej Vugrinec*

Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Bijenička 32, Zagreb

(Dated: 22. siječnja 2022.)

Cilj ovog rada je proučiti utjecaj kozmološkog širenja na lokalnu fiziku. S tom svrhom uvodi se FLRW metrika koja opisuje naš svemir. Kroz neke primjere ispitan je utjecaj kozmološkog širenja na: Newtonove jednadžbe, kvantni harmonički oscilator, gravitacijski čvrsto vezane sustave i na "lensing". Na kraju se promatraju razni scenariji budućnosti svemira pod utjecajem kozmološkog širenja.

I. UVOD

Einsteinove jednadžbe glase:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1)$$

te one povezuju geometriju sustava s raspodjelom materije unutar njega. Originalno u njima se nije nalazila kozmološka konstanta Λ , ali Einstein je pretpostavljao da je svemir statičan i zbog toga ju je dodao u jednadžbe. No, 20-ih i 30-ih godina prošlog stoljeća astronom Edwin Hubble je promatrajući crveni pomak galaksija zaključio da se svemir širi¹, tj. da se okolne galaksije udaljuju od Zemlje proporcionalno njihovim udaljenostima - što se i naziva Hubbleov zakon. Dugo vremena se činilo da je kozmološka konstanta nepotrebna, ali došlo je do otkrića koje je vratilo potrebu za kozmološkom konstantom. Dva su tima^{7,8} zaključila da širenje svemira ubrzava. To se u Einsteinovim jednadžbama opisuje pozitivnom kozmološkom konstantom. Uz to što se svemir širi, on je homogen i izotropan, a metrika koja opisuje takav svemir je Robertson-Walkerova metrika¹, još poznata kao i FLRW metrika koja, uz $c=1$, glasi:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega \right]. \quad (2)$$

Metrika daje informaciju o geometriji prostora, a ds odgovara udaljenosti koju promatrač mjeri u takvom prostoru. Zbog toga moguće je uočiti dvije stvari specifične za FLRW metriku. Kao prvo, parametar k ostavlja mogućnost zakrivljenosti prostora, gdje $k = 0$ daje ravan prostor, dok je za $k > 0$ ili $k < 0$ ta zakrivljenost redom pozitivna ili negativna. Kao drugo, zbog faktora $a(t)$ prema (2) dopušteno je širenje ili smanjivanje svemira, ovisno o njegovoj vrijednosti. U našem svemiru, za trenutnu vrijednost faktora $a(t)$ uzima se 1 prema konvenciji. Budući da se svemir širi ta je vrijednost u prošlosti bila manja dok će u budućnosti biti veća. Direktna posljedica širenja svemira je da se valna duljina svjetlosti emitirana s dalekog objekta širi proporcionalno faktoru $a(t)$. Zbog toga je valna duljina koju udaljeni

promatrač vidi veća nego ona koja je emitirana. Radi jednostavnosti uvodi se crveni pomak² z :

$$1 + z \equiv \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{a_2}{a_1}, \quad (3)$$

gdje je λ_1 valna duljina emitirane svjetlosti, a λ_2 valna duljina promatrane svjetlosti, dok su a_1 i a_2 redom faktori $a(t)$ u trenutku emitiranja svjetlosti i u trenutku u kojem promatrač vidi svjetlost. Uzme li se da za sadašnji trenutak vrijedi $a_2 = 1$ slijedi, uz $a \equiv a_1$

$$1 + z = \frac{1}{a}. \quad (4)$$

Gornja relacija pokazuje se korisnom u raznim sustavima u kojima se istražuje utjecaj kozmološkog širenja na lokalnu fiziku. Važno je još naglasiti da FLRW metrika opisuje svemir na globalnoj, uprosječnoj skali² tj. ako se uzme dio prostora na Zemlji, FLRW metrika neće dobro opisivati taj dio prostora. Kako god bilo, pri zamišljanju kozmološkog širenja dobar je model zamisliti balon koji se napuhava.⁹ U toj se slici vidi da svaka točka na balonu lokalno miruje, ali se udaljava od drugih točaka jer se prostor između povećava.⁹

II. NEWTONOVE JEDNADŽBE U ŠIREĆEM SVEMIRU

Za početak, da bi se dobio intuitivan uvid u utjecaj kozmološkog širenja na lokalnu fiziku, zamislimo klasičan nerelativistički sustav. Na primjer, to bi mogle biti dvije čestice između kojih djeluje Newtonovska gravitacija ili pak dvije nabijene čestice između kojih djeluje privlačna Coulombova sila. Ovdje će se raditi analiza klasičnog atoma¹⁰. Dakle, negativno nabijeni elektron zanemarive mase kreće se oko jezgre puno veće mase, pri čemu se promatra samo coulombska interakcija. Takav sustav postavi se u ravan, homogen svemir čija je ekspanzija opisana faktorom $a(t)$. Za opis se koriste dva koordinatna sustava: r, θ, ϕ i R, θ, ϕ , među kojima je jedina razlika ta da R označava fizikalnu udaljenost između elektrona i jezgre, dok r označava sugibajuću udaljenost među njima. Ti su sustavi međusobno povezani sljedećom relacijom:

$$R = a(t)r. \quad (5)$$

* mvugrine.phy@pmf.hr

Kozmološko širenje se za ovaj sustav može zamisliti kao širenje koje ide radijalno prema van iz svakog proizvoljno odabranog ishodišta pa su koordinate ϕ i θ iste u oba sustava. Sada je cilj povezati kozmološko širenje s jednadžbama gibanja. Ako se promatra samo kozmološko širenje, iz (5) za točku koja ima konstantni r diferenciranjem i uvrštavanjem $r = R/a$ se dobiva sljedeća relacija:

$$\ddot{R} = \frac{\ddot{a}}{a}R. \quad (6)$$

Zbog oblika gornje relacije, čini se da se član $\frac{\ddot{a}}{a}R$ može tretirati kao radijalna sila po jedinici mase. Uz činjenicu da je elektron samo pod utjecajem radijalne Coulombove sile, angularni moment je konstantan i za elektron koji se kreće oko jezgre u ravnini $\theta = \frac{\pi}{2}$ on po jedinici mase iznosi $L = R^2\dot{\phi}$. Sada se kombinacijom svega navedenog, uz činjenicu da je elektron pod utjecajem Coulombove sile koja je po jedinici mase jednaka $F = -\frac{C}{R^2}$, može napisati jednadžba gibanja elektrona:

$$\ddot{R} = -\frac{C}{R^2} + \frac{L^2}{R^3} + \frac{\ddot{a}}{a}R \equiv -\frac{\partial V}{\partial R}. \quad (7)$$

Prema tome može se definirati efektivni potencijal po jedinici mase:

$$V(R, t) = -\frac{\ddot{a}}{2a}R^2 - \frac{C}{R} + \frac{L^2}{2R^2}. \quad (8)$$

Za faktor ekspanzije oblika $a(t) = a_0 e^{t/T_{exp}}$, koji odgovara de Sitterovoj metriki, efektivni potencijal ne ovisi o vremenu:

$$V(R) = -\frac{R^2}{2T_{exp}^2} - \frac{C}{R} + \frac{L^2}{2R^2}. \quad (9)$$

Ako se definira karakteristična konstanta za vremensku skalu atoma kao $T_{atom} = \frac{L^2}{C}$ može se napraviti analiza u ovisnosti o omjeru T_{atom}/T_{exp} . Ovdje je sažet rezultat takve analize.¹⁰ Što je veći omjer T_{atom}/T_{exp} to je veći utjecaj kozmološkog širenja pa tako u slučaju kada vrijedi $T_{atom}/T_{exp} = 0$ nema širenja i elektron je zarobljen u potencijalnoj jami. Za različite vrijednosti energije elektrona postoje različite kritične vrijednosti omjera T_{atom}/T_{exp} , tj. ako je vrijednost tog omjera manja od neke kritične vrijednosti elektron će ostati zarobljen u potencijalnoj jami, no ako je ta vrijednost veća elektron će se pomaknuti prema većem radijusu i kozmološko širenje će ga ubrzati radijalno prema van. To znači da elektron ili je ili nije zarobljen u potencijalnoj jami, a da ne postoji djelomično širenje. Takav način može se objasniti i iz jednadžbe (7) jer porastom radijusa R smanjuju se Coulombov i centrifugalni član i pri tome brže centrifugalni član, dok kozmološki član nadvlada ostale i elektron ne može biti zarobljen u potencijalnoj jami. U istom članku¹⁰ pronađena je kritična vrijednost za elektron koji se prvotno nalazi na dnu potencijalne jame u slučaju bez kozmološkog dijela efektivnog potencijala. Dno potencijalne

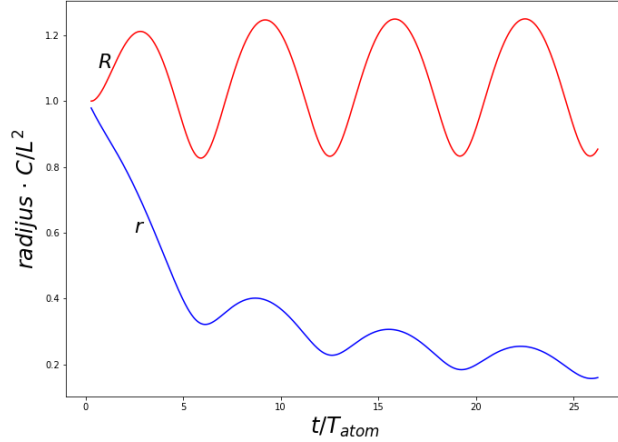
jame u tom je slučaju za $R = \frac{L^2}{C}$, a elektron u tom slučaju ima energiju po jedinici mase $E/m = \frac{L^2}{2R^2}$. Ako se ekspanzija ne uključi elektron se giba po kružnoj putanji oko jezgre. Ako se pak ona naknadno uključi postoji kritična vrijednost omjera T_{atom}/T_{exp} i ona iznosi 0.25. Eksperimentalna vrijednost¹⁰ za T_{exp} je otprilike $4 \cdot 10^{17}$ s, dok je tipičan T_{atom} jednak 10^{-16} s, što nije ni blizu vrijednosti omjera od 0.25. Općenito, ona vrijednost tog omjera za koju se minimum potencijala bez kozmološkog člana i lokalni maksimum potencijala koji uključuje kozmološki član za taj omjer T_{atom}/T_{exp} podudaraju je kritična vrijednost. Nerelativistički opis klasičnog atoma se dobro slaže s relativističkim, a ako se radi o relativističkom atomu koji nije vezan, što se on više širi to relativistički efekti postaju manje bitni, tj. atom postaje sve manje i manje relativistički.¹⁰ Ovom jednostavnom analizom vidi se da klasični atomi nisu ni blizu toga da bi na njihovu fiziku djelovalo kozmološko širenje. Ipak, u slučaju ako se za faktor ekspanzije uzme $a(t) \propto t^{2/3}$ dobiva se upravo efekt djelomičnog širenja¹¹. Taj efekt je reda¹¹ 10^{-67} , no zanimljivo je da se u tom slučaju događa baš ono što se u slučaju de Sitterovog prostorvremena ne može dogoditi. Postoji i intuitivan način razmišljanja o takvom ponašanju¹² iako on nije nužno direktno primjenjiv na slučaj klasičnog atoma. Zamisli li se neka sfera konstantnog radijusa, pod utjecajem kozmološkog širenja postoji tok materije kroz tu sferu. Zbog toga se masa unutar te sfere, a time i gravitacijsko privlačenje smanjuje što dovodi do toga da orbite postaju sve veće. Završna analiza ovog poglavlja napravljena je po uzoru na citiran članak¹⁰ za faktor skale oblika $a(t) \propto t^{2/3}$. U tom članku autor radi analizu za faktor skale oblika

$$a(t) = 1 + \left(\frac{t}{T_{exp}}\right)^2 \tanh\left(\frac{t}{T_{exp}}\right). \quad (10)$$

Takav faktor skale za $t \gg T_{exp}$ je otprilike proporcionalan s t^2 , ali da/dt i d^2a/dt^2 iščezavaju u $t = 0$ pa se uključivanje širenja može započeti s $dr/dt = 0$ i $dR/dt = 0$. Uz to, dio efektivnog potencijala odgovoran za kozmološko širenje iščezava u $t = 0$ pa ako se uzme početni uvjet $R = L^2/C$, u trenutku $t = 0$ nema akceleracije. Uzimajući sve to u obzir, napravljena je analiza za faktor skale oblika

$$a(t) = 1 + \left(\frac{t}{T_{exp}}\right)^{2/3} \tanh\left(\frac{t}{T_{exp}}\right), \quad (11)$$

uz početne uvjete $R = L^2/C$, $dR/dt = 0$. Ispitani su razni omjeri T_{atom}/T_{exp} s ciljem pronalazanja kritične vrijednosti za koju takav elektron postaje nevezan. Nije bilo moguće pronaći takvu kritičnu vrijednost. To vodi na potvrđivanje zaključka dobivenog u članku¹¹ koji se bavi analizom sustava u prostorvremenu gdje vrijedi za faktor skale $a(t) \propto t^{2/3}$. Dakle, nema neke kritične vrijednosti za koju elektron postaje nevezan, već postoji mogućnost djelomičnog širenja. Za omjer $T_{atom}/T_{exp} = 0.343$ dobiven je sljedeći graf (Slika 1). Na tom se grafu vidi da fizikalni radijus, nakon prvotnog povećanja, počne



Slika 1. Graf ovisnosti normaliziranog sugibajućeg i fizikalnog radijusa o normaliziranom vremenu - fizikalni radijus R oscilira, sugibajući radijus r se smanjuje uz oscilacije

oscilirati između dvije vrijednosti. Sugibajući radijus će brzo krene smanjivati uz oscilacije.

III. HARMONIČKI OSCILATOR U ŠIREĆEM SVEMIRU

Gore napravljena analiza dala je odgovor na ponašanje klasičnih sustava. Postavlja se pitanje hoće li se i kvantni sustavi ponašati isto kao klasični pod utjecajem kozmološkog širenja. Sada je zato cilj napraviti tu analizu za kvantne sustave i vidjeti kako se oni ponašaju pod utjecajem kozmološkog širenja. Najjednostavniji primjer u tom je slučaju harmonički oscilator. Potencijal izotropnog harmoničkog oscilatora, za česticu mase m je $V(\mathbf{R}) = \frac{m\omega_0^2 R^2}{2}$. U slučaju kozmološkog širenja u potencijal treba uključiti i član koji dolazi od širenja, a on je prema relaciji (8) jednak $-m\frac{\ddot{a}}{2a}R^2$ te je stoga ukupni lagranžijan:

$$L = \frac{m}{2}\dot{R}^2 - \frac{m}{2}\omega^2(t)R^2, \quad (12)$$

gdje je korištena pokrata

$$\omega^2(t) = \omega_0^2 - \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}. \quad (13)$$

Bez smanjenja općenitosti radi se analiza u jednoj dimenziji. U tom je slučaju Schrödingerova jednadžba sljedeća

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{m\omega(t)^2}{2} x^2 \Psi. \quad (14)$$

Kompletan ortonormirani set funkcija koje su rješenje za vremenski ovisan kvantni harmonički oscilator je poz-

nat i dan s¹⁴:

$$\psi_n(x, t) = \left(\frac{1}{2^n n!} \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \right)^{1/2} \times \exp \left[-i \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{im}{2\hbar} \left(i\dot{\gamma} + \frac{\dot{s}}{s} \right) x^2 \right] H_n(\beta x). \quad (15)$$

H_n je n -ti Hermiteov polinom, dok je $s(t)$ rješenje sljedeće diferencijalne jednadžbe¹⁴:

$$\ddot{s} - s^{-3} + \omega^2(t)s = 0. \quad (16)$$

Kada se nađe $s(t)$ preko njega se mogu naći γ i β ¹³:

$$\dot{\gamma}s^2 = 1, \quad \beta(t) = \left(\frac{m\dot{\gamma}(t)}{\hbar} \right)^{1/2}. \quad (17)$$

Razmotrimo danu situaciju za de Sitterovu metriku. Dakle, vrijedi $a(t) = a_0 e^{t/T_{exp}}$ što uz pomoć relacije (13) vodi do frekvencije $\omega^2 = \omega_0^2 - T_{exp}^{-2}$. To znači da se u ovom slučaju pod utjecajem kozmološkog širenja frekvencija harmoničkog oscilatora promijenila, ali je ostala vremenski neovisna. Uvrsti li se takva frekvencija u (16) može se provjeriti da $s = \omega^{-1/2}$ rješava tu jednadžbu. Kako bi se odredila veličina harmoničkog oscilatora treba izračunati očekivanu vrijednost operatora X^2 :

$$\langle X^2 \rangle_n = \langle \psi_n | x^2 | \psi_n \rangle. \quad (18)$$

Moguće je uočiti da je gustoća vjerojatnosti $|\psi_n(x, t)|^2$ istog oblika kao i za vremenski neovisan harmonički oscilator. Iz rješenja jednadžbe (16) i relacija (17) vrijedi $\beta^2 = \frac{\omega}{\hbar}$ pa se za $\langle X^2 \rangle_n(t)$ dobiva³

$$\langle X^2 \rangle_n(t) = \frac{n + 1/2}{\beta^2(t)} = \frac{(n + 1/2)\hbar}{m} \omega. \quad (19)$$

Zaključak dobiven ovom analizom ugrubo se podudara sa zaključkom dobivenim analizom klasičnog atoma u de Sitter prostorvremenu. Dakle, nema djelomičnog povećanja harmoničkog oscilatora, već se pod utjecajem kozmološkog širenja promijeni njegova frekvencija što je vidljivo iz $\omega^2 = \omega_0^2 - T_{exp}^{-2}$. Ako vrijedi $\omega_0^2 \leq T_{exp}^{-2}$ tada ovdje provedena analiza nije valjana jer u tom slučaju frekvencija oscilatora postaje $\omega^2 \leq 0$.

IV. UTJECAJ ŠIREĆEG SVEMIRA NA GRAVITACIJSKI ČVRSTO VEZANE SUSTAVE

Dosadašnji dio daje uvid u to kako kozmološko širenje utječe na jednostavne sustave koji nisu gravitacijski vezani. Sljedeći je korak zapitati se kakav je utjecaj kozmološkog širenja na sustave koji su gravitacijski vezani. Još prije napravljena analiza¹⁵ bavi se utjecajem kozmološkog širenja na skupove galaksija. Ako se uzme da je prosječna gustoća mase skupova galaksija ρ_c , te da se takvi skupovi galaksija nalaze u svemiru ispunjenim plinom bezmasenih čestica gustoće energije ρ dobivaju

se dva zaključka. U slučaju da vrijedi $\rho > \rho_c$ skupovi galaksija se šire zajedno sa svemirom. Ako pak vrijedi $\rho_c \gg \rho$ to je širenje smanjeno za omjer ρ/ρ_c . Iako ti zaključci mogu dati neki generalan uvid u situaciju za potpunost se treba proučiti utjecaj kozmološkog širenja na zvijezdu ili crnu rupu. Prije toga predstavlja se metrika koja je uvedena upravo radi proučavanja utjecaja kozmološkog širenja na lokalne sustave, a to je McVittie metrika¹⁶.

IV.1. McVittie metrika

McVittie¹⁶ polazi od 6 pretpostavki od kojih su 3 sljedeće.

1. Materija u svemiru raspoređena je sfernosimetrično oko ishodišta gdje se nalazi masivna čestica.
2. Ne postoji ukupni tok materije od ishodišta ili prema ishodištu koji se razlikuje od 0.
3. Tlak u cijelom svemiru je izotropan, što i proizlazi iz pretpostavke 2. jer bi u suprotnom postojao preferirani smjer brzine čestica.

Uz te pretpostavke McVittie rješavanjem Einsteinovih jednadžbi dobiva:

$$ds^2 = - \frac{\left(1 - \frac{m(t)}{2\bar{r}}\right)^2}{\left(1 + \frac{m(t)}{2\bar{r}}\right)^2} dt^2 + a^2(t) \left(1 + \frac{m(t)}{2\bar{r}}\right)^4 (d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2), \quad (20)$$

gdje vrijedi $r \equiv \bar{r} \left(1 + \frac{m}{2\bar{r}}\right)^2$. McVittie je 2. pretpostavku zadovoljio nametnuvši sljedeći uvjet:

$$\frac{\dot{m}}{m} = -\frac{\dot{a}}{a} \quad (21)$$

iz kojeg slijedi:

$$m(t) = \frac{m_H}{a(t)}. \quad (22)$$

U relaciji (22) m_H označava Hawkingovu kvazi-lokalnu masu, veličinu koja ovdje služi tome da se zabrani tok materije prema centralnom objektu. Za striktniju definiciju pogledati reference^{4,17}. Važno je naglasiti da je m_H fizikalno bitna masa¹⁸, povezana s veličinom centralnog objekta dok je $m(t)$ koeficijent metrike u određenom koordinatnom sustavu. McVittie metrika se obično interpretira kao metrika koja predstavlja točkastu masu u $\bar{r} = 0$ stavljenu u FLRW svemir, no oko te mase se u $\bar{r} = m/2$ nalazi singularitet s čijom interpretacijom postoje problemi.¹⁸ Jasno je da u slučaju $a = 1$ McVittie metrika postaje jednaka Schwarzschildovoj metrici. U slučaju $m = 0$ McVittie metrika postaje FLRW metrika s $k = 0$.

IV.2. Utjecaj kozmološkog širenja na zvijezdu

Pri razmatranju utjecaja kozmološkog širenja na zvijezdu prati se već napravljena²⁰ i proširena¹⁸ analiza. Nolanovo rješenje opisuje relativističku zvijezdu uniformne gustoće u FLRW pozadini. Metrika je¹⁸:

$$ds^2 = - \left[\frac{1 - \frac{m}{\bar{r}_0} + \frac{m\bar{r}^2}{\bar{r}_0^3} \left(1 - \frac{m}{4\bar{r}_0}\right)}{\left(1 + \frac{m}{2\bar{r}_0}\right) \left(1 + \frac{m\bar{r}^2}{2\bar{r}_0^3}\right)} \right]^2 dt^2 + a^2(t) \frac{\left(1 + \frac{m}{2\bar{r}_0}\right)^6}{\left(1 + \frac{m\bar{r}^2}{2\bar{r}_0^3}\right)^2} (d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2). \quad (23)$$

Nametnuta je relacija (21), zbog čega zapravo vrijedi vremenska ovisnost $m(t)$. Radijus takve zvijezde je \bar{r}_0 , tj. za unutarnji dio vrijedi $0 \leq \bar{r} \leq \bar{r}_0$. Metrika (23) je regularna u ishodištu. Za dio $\bar{r} \geq \bar{r}_0$ vrijedi McVittie metrika¹⁸. Ako se uzme da je $\Sigma_0(t) = \{(t, \bar{r}, \theta, \phi) : \bar{r} = \bar{r}_0\}$, onda ona odgovara površini zvijezde. Metrika na toj plohi zbog uvjeta spajanja odgovara McVittie metrici pa je linijski element:

$$ds^2|_{\Sigma_0} = - \frac{\left(1 - \frac{m(t)}{2\bar{r}_0}\right)^2}{\left(1 + \frac{m(t)}{2\bar{r}_0}\right)^2} dt^2 + a^2(t) \left(1 + \frac{m(t)}{2\bar{r}_0}\right)^4 \bar{r}_0^2 d\Omega^2. \quad (24)$$

Površina plohe Σ_0 je¹⁸:

$$A_{\Sigma_0} = \int \int_{\Sigma_0} d\theta d\phi \sqrt{g_{\Sigma_0}}, \quad (25)$$

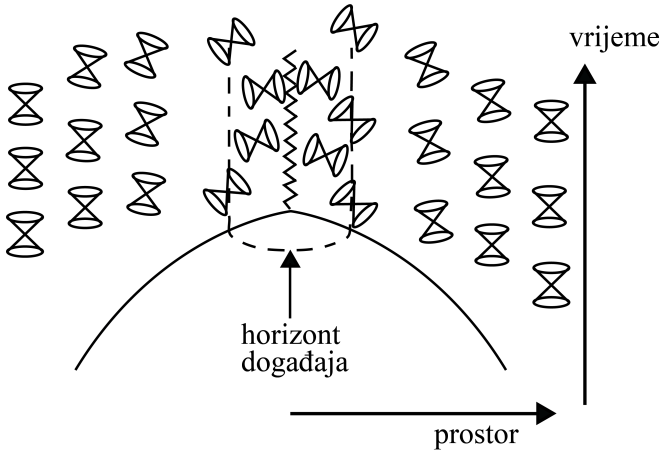
gdje je g_{Σ_0} determinanta metrike na plohi Σ_0 u trenutku t . Za površinu se dobiva

$$A_{\Sigma_0}(t) = 4\pi a^2(t) \bar{r}_0^2 \left(1 + \frac{m(t)}{2\bar{r}_0}\right)^4 = 4\pi a^2(t) r_0^2. \quad (26)$$

To je vrlo zanimljiv rezultat koji govori da površina zvijezde ovisi o faktoru $a(t)$. Dakle, u ovom se slučaju gravitacijski čvrsto vezani objekt povećava pod utjecajem kozmološkog širenja.

IV.3. Utjecaj kozmološkog širenja na crne rupe

Činjenica da se površina zvijezde prema prethodno napravljenoj analizi povećava pod utjecajem kozmološkog širenja svemira vodi nas da se zapitamo događa li se isto s crnom rupom. Točnije, povećava li površina horizonta događaja crne rupe pod utjecajem kozmološkog širenja? Horizont događaja za nekog promatrača²¹ je ploha u prostorvremenu koja dijeli sve događaje u dvije skupine. Jednu od tih dviju skupina čine događaji koje je taj promatrač mogao, može ili će moći uočiti, dok drugu skupinu čine događaji koje taj promatrač nikad



Slika 2. Prikaz svjetlosnih stožaca u blizini crne rupe

neće moći uočiti. Na slici (Slika 2) nalazi se slikovit prikaz svjetlosnih stožaca u blizini crne rupe i unutar horizonta događaja. Na toj se slici vidi da zakrivljenost prostor-vremena zakrivljuje svjetlosne stošce. Isto tako, vidi se da unutar horizonta događaja svjetlosni stošci postaju toliko zakrivljeni da se iz tog dijela ne može izaći bez da se kreće brzinom većom od brzine svjetlosti.

IV.3.1. Schwarzschild-de Sitter crna rupe

Općenito, Schwarzschildovo rješenje je jedinstveno rješenje Einsteinovih jednadžbi za sferosimetričan masivan objekt. Ako se u Einsteinove jednadžbe doda i kozmološka konstanta, ukupno rješenje je Schwarzschild-de Sitter metrika. Za de Sitter prostorvrijeme vrijedi $a(t) = a_0 e^{t/T_{exp}}$ ($\frac{1}{T_{exp}} = H_0$). Uz¹⁸ $\frac{1}{T_{exp}} = \sqrt{\Lambda/3}$ za Schwarzschild- de Sitter metrikom vrijedi

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{R} - \frac{\Lambda R^2}{3} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{R} - \frac{\Lambda R^2}{3} \right)^{-1} dR^2 + R^2 d\Omega^2. \quad (27)$$

Tako napisana metrika je u statičkim koordinatama, tj. vrijedi $R = a(t)r$. Koristi li se sada $R = a(t)\bar{r} \left(1 + \frac{m}{2\bar{r}} \right)^2$ i relacija (22), McVittie metrika (20) može se napisati na sljedeći način²²

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m_H}{R} - H^2 R^2 \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m_H}{R} - H^2 R^2 \right)^{-1} dR^2 - \frac{2HRdt dR}{\sqrt{1 - \frac{2m_H}{R}}} + R^2 d\Omega^2. \quad (28)$$

Nedijagonalnog dijela moguće se riješiti ako se definira nova vremenska koordinata

$$dT = \frac{1}{F}(dt + \beta dR), \quad (29)$$

gdje je $F(t, R)$ faktor dobiven integracijom, a $\beta(t, R)$ zadan sljedećom relacijom

$$\beta(t, R) = \frac{HR}{\sqrt{1 - \frac{2m_H}{R} (1 - \frac{2m_H}{R} - H^2 R^2)}}. \quad (30)$$

Uz takav $\beta(t, R)$ se McVittie metrika može zapisati na sljedeći način

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m_H}{R} - H^2 R^2 \right) F^2 dT^2 + \left(1 - \frac{2m_H}{R} - H^2 R^2 \right)^{-1} dR^2 + R^2 d\Omega^2. \quad (31)$$

Uvrštavanjem Hubbleovog faktora za de Sitter prostor-vrijeme u gornju metrikom, vidi se da se reproducira Schwarzschild-de Sitter metrika. Isto tako usporedbom s (27) jasno je da je Hawkingova kvazi-lokalna masa m_H jednaka masi centralnog objekta. McVittie metrika (20) u $\bar{r} = m/2$ ima singularitet¹⁸, koji se reducira na Schwarzschildov horizont ako vrijedi $a \equiv 1$. Taj singularitet nestaje u slučaju $\dot{H} = 0$, što vrijedi za Schwarzschild-de Sitter prostorvrijeme, te se onda i ploha $\bar{r} = m/2$ može interpretirati kao vlastiti horizont događaja crne rupe¹⁸. Uzme li se sada $\Sigma_1(t) = \{(t, \bar{r}, \theta, \phi) : \bar{r} = m/2\}$, može se izračunati površina plohe Σ_1 :

$$A_{\Sigma_1} = \int \int_{\Sigma_1} d\theta d\phi \sqrt{g_{\Sigma_1}}. \quad (32)$$

Pomoću (28) se dobiva¹⁸:

$$A = 16\pi a^2 m^2. \quad (33)$$

Budući da se radi o McVittie prostorvremenu vrijedi relacija (22) čime se dobiva:

$$A = 16\pi m_H^2. \quad (34)$$

Zbog toga što vrijedi $\dot{m}_H = 0$, iz (30) se vidi da se površina Schwarzschild-de Sitter crne rupe ne povećava pod utjecajem kozmološkog širenja. Dakle, u de Sitter prostorvremenu¹⁸, se jako vezani sustavi odupiru kozmološkom širenju. Postavlja se pitanje vrijedi li taj zaključak za bilo koje prostorvrijeme.

IV.3.2. Crna rupe u ravnom FLRW svemiru s $a(t) \propto t^{2/3}$

Ovdje će se samo navesti zaključak¹⁸ za Sultana-Dyer rješenje²³ koje opisuje crnu rupu stavljenu u FLRW svemir s $a(t) \propto t^{2/3}$. Linijski element koji opisuje takvu crnu rupu je jednak slučaju u McVittie prostorvremenu uz to što je sada $m(t) = m_0$ tj. konstanta. Zbog toga postoji tok materije i ne vrijedi relacija (21), već se Hawkingova masa povećava: $m_H = m_0 a(t)$. Zbog toga se i sama crna rupe povećava. To znači da je ovom analizom dobiven gravitacijski čvrsto vezan objekt koji se povećava pod utjecajem kozmološkog širenja.

V. SKRETANJE ZRAKA SVJETLOSTI GRAVITACIJSKIM LEĆAMA U ŠIREĆEM SVEMIRU

"Lensing" je gravitacijski efekt mase u svemiru, kod kojeg se zrake svjetlosti zakrivljuju na temelju geometrije prostora koja se mijenja pod utjecajem mase. Zbog toga se pomoću zakrivljenih zraka svjetlosti može nešto zaključiti o tome kako je raspoređena masa u svemiru. Iako je već Einstein razmišljao o "lensingu", 1979. stigla je eksperimentalna potvrda fenomena kada su Walsh, Carswell i Weymann¹⁹ uočili dvije slike istog kvazara. Ovdje će se analizirati "lensing" u McVittie prostorvremenu te na taj način vidjeti moguć utjecaj kozmološkog širenja svemira na taj fenomen. Uz to navest će se i rezultat dobiven za Schwarzschild-de Sitter prostorvrijeme i u tom slučaju objasniti utjecaj kozmološkog širenja.

V.1. "Lensing" u McVittie prostorvremenu

Ovdje se analiza radi za McVittie metriku. Isto tako zamišlja se da se radi o točkastom masenom objektu čija je masa konstantna i iznosi m . Uz pokratu

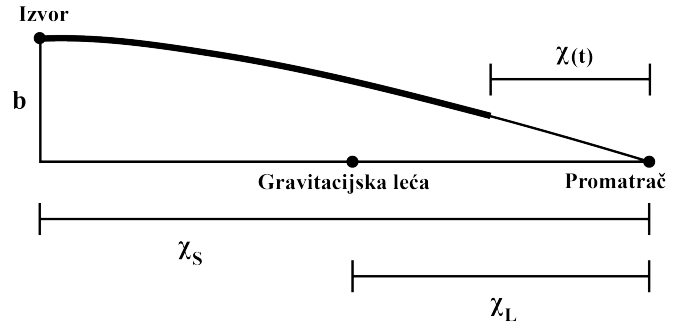
$$\mu \equiv \frac{m}{2a(t)r}, \quad (35)$$

linijski element može se zapisati kao:

$$ds^2 = - \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} \right)^2 dt^2 + (1+\mu)^4 a(t)^2 (dr^2 + r^2 d\Omega^2). \quad (36)$$

Situacija koja se promatra je sljedeća: iz izvora dolazi zraka svjetlosti kojoj maseni objekt koji se nalazi u ishodištu zakrivljuje putanju pri čemu promatrač opaža zakrivljenu zraku svjetlosti. Sve varijable udaljenosti koje se koriste u analizi su sugibajuće što znači da se njihove duljine ne mijenjaju pod utjecajem kozmološkog širenja, već da ih je potrebno zamisliti kao da se šire zajedno sa svemirom. One su redom: χ_S - udaljenost između promatrača i izvora svjetlosti, χ_L - udaljenost između gravitacijske leće i promatrača i $\chi(t)$ - udaljenost između promatrača i projekcije fotona na ravninu u kojoj se nalaze izvor, gravitacijska leća i promatrač. Udaljenost od izvora do pravca koji prolazi kroz točke u kojima se nalazi maseni objekt i promatrač označena je s b . Budući da je cilj utvrditi utjecaj širenja svemira na ovakvu situaciju, promatra se slučaj u kojem vrijedi $\mu \ll 1$. Isto tako, promatraju se mali transverzalni pomaci u ravnini u kojoj se nalazi maseni objekt $l^i \ll \chi$. Zbog toga što je McVittie metrika sfernosimetrična, jednadžbe geodezika svjetlosnog tipa za oba transverzalna smjera $i = 1, 2$ su iste pa su u daljnjoj analizi izbačeni indeksi. Jednadžbe geodezika za foton su raspisane u Dodatku i preko njih je dobivena sljedeća relacija

$$\frac{d^2 l}{d\chi^2} = 4\partial_l \mu. \quad (37)$$



Slika 3. Skica "lensinga" u McVittie prostorvremenu

Korištenjem (35), uz činjenicu da vrijedi $r = \sqrt{(\chi - \chi_L)^2 + l^2}$ i prethodne relacije dobiva se:

$$\frac{d^2 l}{d\chi^2} = - \frac{2ml}{a(\chi)[(\chi - \chi_L)^2 + l^2]^{3/2}}. \quad (38)$$

Prošla se relacija može zapisati kao

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\alpha \frac{y}{a(x)[(x-1)^2 + y^2]^{3/2}} \quad (39)$$

uz sljedeće pokrate

$$x \equiv \frac{\chi}{\chi_L}, \quad \alpha \equiv \frac{2m}{\chi_L}, \quad y \equiv \frac{l}{\chi_L}. \quad (40)$$

Rješenje se traži perturbativno, promatrajući male α pa se y razvija po malom α :

$$y = y^{(0)} + \alpha y^{(1)} + \alpha^2 y^{(2)} + \dots \quad (41)$$

Uvjeti zadovoljenja trajektorije su:

$$y(x_S) = y_S, \quad y(0) = 0, \quad (42)$$

što znači da zraka svjetlosti kreće s $b \equiv y_S \chi_L$ i mora doći do promatrača kako bi ju detektirao. U nultom redu rješenje poprima sljedeći oblik

$$y^{(0)} = C_1 x + C_2. \quad (43)$$

To rješenje predstavlja ravnu liniju, tj. u tom slučaju nema efekta zakrivljenja trajektorije fotona pod utjecajem gravitacije. Zbog toga u ovom slučaju zapravo uvijek vrijedi $y^{(0)} = y_S$ i foton ne dolazi do promatrača. Uvrštavanjem (41) u (39) se može naći rješenje prvog reda

$$\frac{d^2 y^{(1)}}{dx^2} = - \frac{y_S}{a(x)[(x-1)^2 + y^2]^{3/2}}. \quad (44)$$

Da bi se zadovoljila trajektorija odabiru se sljedeći uvjeti

$$y^{(1)}(x_S) = 0, \quad y^{(1)}(0) = - \frac{y_S}{\alpha}. \quad (45)$$

Zamislimo sada sugibajuću udaljenost između izvora i promatrača. U nekom intervalu dt svjetlost prijeđe sugibajuću udaljenost od $dx = dt/a$. Zbog toga za svjetlost koja krene u trenutku t_0 vrijedi

$$\chi(t) = \int_{t_0}^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (46)$$

Gornja relacija uz definiciju crvenog pomaka (4) postaje

$$\chi(t) = \int_{a(t)}^1 \frac{da'}{a'^2 H(a')} = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (47)$$

Ograniči li se razmatranje na konstantan Hubbleov faktor $H = H_0$, korištenjem prethodne relacije se za sugibajuću udaljenost dobiva

$$\chi = \int_0^z \frac{dz}{H_0} = \frac{1}{H_0} \left(\frac{1}{a} - 1 \right). \quad (48)$$

U stvarnosti takvo razmatranje crvenog pomaka nije u potpunosti točno jer bi se trebao uzeti u obzir i gravitacijski crveni pomak koji dolazi od masenog objekta. Ovdje se to ne uzima u obzir jer bi to dovelo do doprinosa drugog reda u α . Ako se sada uvrsti relacija dobivena za sugibajuću udaljenost u (44) dobiva se

$$\frac{d^2 y^{(1)}}{dx^2} = - \frac{y_S(1 + H_0 \chi_L x)}{[(x-1)^2 + y_S^2]^{3/2}}. \quad (49)$$

U slučaju kada su udaljenosti između izvora, leće i promatrača puno veće od veličine same gravitacijske leće, može se koristiti aproksimacija tanke leće. U tom slučaju vrijedi sljedeća relacija²⁴

$$\gamma \approx \beta + \delta \frac{D_{LS}}{D_S}, \quad (50)$$

gdje je, s obzirom na promatrača γ kut između leće i slike koju promatrač vidi, β kut između leće i izvora, a δ kut između izvora i slike, gledano od ravnine u kojoj je leća. U relaciji (50) D_{LS} označava udaljenost između leće i izvora, a D_S označava udaljenost između promatrača i izvora. Ovdje se zapravo radi o udaljenostima kutnog promjera (engl. "angular diameter distance"). Po definiciji¹, udaljenost kutnog promjera $d_A(PQ)$ točke Q gledano s točke P je omjer h/θ prave duljine h oko Q , okomite na pravac PQ i kuta kojeg ta duljina zauzima gledano s P . Zamislimo sada izvor svjetlosti duljine h koji se nalazi u $r = r_1$ i $t = t_1$, a u odnosu na ishodište ($r = 0, t = t_0$) zauzima kut θ . Prava udaljenost između dva kraja takvog objekta je⁵:

$$h = a(t_1)r_1\theta. \quad (51)$$

Koristeći gornju definiciju udaljenosti kutnog promjera i prošlu relaciju dolazi se do sljedeće relacije

$$d_A = a(t_1)r_1 = \frac{r_1}{1+z}. \quad (52)$$

Ona omogućuje da se iz (48) D_S i D_L izraze pomoću crvenih pomaka²⁴:

$$D_S = \frac{1}{H_0} \frac{z_S}{1+z_S}, \quad (53)$$

$$D_L = \frac{1}{H_0} \frac{z_L}{1+z_L}, \quad (54)$$

gdje je D_L udaljenost između leće i promatrača. U limesu $y_S \ll 1$ kut δ definiran kao

$$\delta \equiv \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} - \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_S}, \quad (55)$$

se dobiva pomoću perturbacijski dobivenog rješenja od (49)²⁴:

$$\delta = \frac{2\alpha(1 + \chi_L H_0)}{y_S} + \mathcal{O}(y_S). \quad (56)$$

Koristeći definicije α i y_S to se može zapisati kao

$$\delta = \frac{4m(1 + \chi_L H_0)}{b} + \mathcal{O}(b/\chi_L), \quad (57)$$

pomoću čega se uz (50) za jednadžbu leće dobiva

$$\gamma \approx \beta + \frac{4m(1 + z_L)}{b} \frac{D_{LS}}{D_S}. \quad (58)$$

Taj rezultat može se usporediti sa standardnom jednadžbom leće, za točkasti maseni objekt²⁴:

$$\gamma \approx \beta + \frac{4m}{r_0} \frac{D_{LS}}{D_S}, \quad (59)$$

gdje je r_0 najmanja udaljenost do koje se leći približi dolazna zraka svjetlosti. Budući da se radi o pravoj udaljenosti i o malom kutu γ vrijedi:

$$r_0 = \gamma D_L. \quad (60)$$

U gore dobivenoj jednadžbi leće b je transversalna pozicija izvora u odnosu na leću. No, isto tako b se može interpretirati kao najmanja udaljenost između dolaznog fotona i leće²⁴ zato što je $y^{(0)} = y_S$ rješenje nultog reda i bilo kakva korekcija koja bi se dodala tom rješenju je prvog reda u α , što bi rezultiralo u popravku višeg reda. Zbog toga se u najnižem redu, uz mali γ može pisati: $b = \gamma \chi_L$. Uzimanjem svega navedenog u obzir redom se dobiva:

$$\frac{b}{1+z_L} = \frac{\gamma \chi_L}{1+z_L} = \gamma D_L. \quad (61)$$

Dakle, zaključak je da u najvišem redu nema razlike između standardne jednadžbe leće i jednadžbe u McVittie prostorvremenu (za slučaj konstantnog H_0), tj. nema ni utjecaja kozmološkog širenja. Još samo valja naglasiti da u slučaju nalaženja izvora, leće i promatrača na istom pravcu gornja analiza ne vrijedi jer tada zraka svjetlosti nikada ne bi stigla do promatrača. Ovdje se samo navodi da ni u takvom slučaju, u najnižem redu, nema utjecaja kozmološkog širenja²⁴.

V.2. "Lensing" u Schwarzschild-de Sitter prostorvremenu

Metrika Schwarzschild-de Sitter prostorvremena dana je s (27). Ovdje će se navesti određeni rezultati i zaključci iz članka²⁵ u kojem se autori bave "lensingom" u Schwarzschild-de Sitter prostorvremenu. Autori dobivaju da kut zakrivljenja zrake svjetlosti ovisi o članu koji je proporcionalan s kozmološkom konstantom Λ . No, oni isto tako navode da gledano na kozmološkoj skali, promatrač ne može mirovati s obzirom na izvor. Zbog toga bi se kut zakrivljenja zrake svjetlosti koji opaža promatrač koji se kreće brzinom V povećao za faktor $\sqrt{\frac{1+V}{1-V}}$. U Schwarzschild-de Sitter prostorvremenu sama brzina ovisi o kozmološkoj konstanti. Konkretno u de Sitter prostorvremenu može se uzeti $V \approx H_0 r = \sqrt{\Lambda/3}r$ pa se za faktor koji dolazi od relativnog gibanja dobiva $\sim (1 + \sqrt{\Lambda/3}r)$. Kozmološka konstanta je mala i zbog toga je doprinos proporcionalan s njenim korijenom veći od doprinosa proporcionalnog s njom. Zbog toga se ovom analizom dolazi do zaključka da kozmološko širenje svemira ima utjecaj na "lensing", no utjecaj zbog relativnog gibanja je puno veći od samog geometrijskog utjecaja.

VI. KOZMOLOŠKO ŠIRENJE U BUDUĆNOSTI SVEMIRA

Nakon bavljenja utjecajem kozmološke ekspanzije na lokalnu fiziku ima se smisla zapitati kako će izgledati svemir pod utjecajem kozmološkog širenja u dalekoj budućnosti. Već je rečeno da širenje svemira ubrzava^{7,8} zbog čega u Einsteinovim jednadžbama postoji i kozmološka konstanta Λ . Kozmološka konstanta pripisuje se gustoći energije vakuuma²⁶. Ono čime je svemir ispunjen modelira se kao fluid koji ima neki tenzor energije i impulsa $T_{\mu\nu}$. Tenzor energije i impulsa savršenog fluida definiran je kao

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (62)$$

gdje je p tlak fluida, ρ njegova gustoća energija, a U^μ njegova četverbrzina. Za savršen fluid je tipično definirati parametar w kao

$$w \equiv \frac{p}{\rho}. \quad (63)$$

Napiše li se akcija za neko skalarno polje ϕ uz gustoću potencijalne enegije $V(\phi)$, u slučaju u kojem nema doprinosa kinetičke energije ili energije od gradijenta postiže se minimum energije za neki ϕ_0 koji minimizira potencijalnu energiju. U tom je slučaju tenzor energije i impulsa²⁶ $T_{\mu\nu} = -V(\phi_0)g_{\mu\nu}$, a konkretno za vakuum se može pisati

$$T_{\mu\nu}^{vac} = -\rho_{vac}g_{\mu\nu}. \quad (64)$$

Da bi se uz uvjet (64) zadovoljila relacija (62) vakuum se može smatrati savršenim fluidom uz jednadžbu stanja

$$p_{vac} = -\rho_{vac}. \quad (65)$$

Pogledom na Einsteinove jednadžbe (1), vidi se da je efekt tako napisanog tenzora energije i impulsa isti kao i efekt kozmološke konstante (uz $c = G = 1$), uz pomicanje $\Lambda g_{\mu\nu}$ na desnu stranu i stavljanjem

$$\rho_{vac} = \rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{8\pi}. \quad (66)$$

Rješavanjem Einsteinovih jednadžbi u kojima tenzor energije i impulsa "pojede" kozmološku konstantu za FLRW metriku i savršen fluid gustoće ρ i tlaka p koji ispunjava svemir dobivaju se Friedmannove jednadžbe koje glase²⁶

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 \equiv H^2 = \frac{8\pi}{3}\rho - \frac{k}{a^2(t)} \quad (67)$$

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3p) \quad (68)$$

u kojima je gustoća energije vakuuma ρ_Λ uključena u ρ . Iz prve od njih se vidi da za bilo koju vrijednost Hubbleovog parametra H postoji kritična vrijednost gustoće energije takva da se radi o ravnom prostorvremenu i ta vrijednost dana je s

$$\rho_{crit} \equiv \frac{3H^2}{8\pi}. \quad (69)$$

Pomoću takve kritične gustoće uobičajeno je definirati parametar gustoće kao

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_{crit}} = \left(\frac{8\pi}{3H^2}\right)\rho. \quad (70)$$

Iz druge se Friedmannove jednadžbe mogu vući razni zaključci o načinu širenja svemira. Prvo, vidi se da kako bi postojalo ubrzano širenje svemira treba vrijediti $w < -1/3$. Stoga, u slučaju da vrijedi $w \geq -1/3$ svemir se i dalje širi zauvijek tj. postaje tamniji i hladniji, ali takav svemir se širi na način da i broj vidljivih galaksija raste.²⁷ Horizont događaja promatrača u takvom svemiru raste. Ako širenje ubrzava i vrijedi $-1 \leq w < -1/3$ širenje svemira nastavlja se zauvijek. U ovom je slučaju specifično to što faktor skale raste brže nego horizont događaja. Dakle broj vidljiv galaksija se smanjuje, ali same galaksije nisu pod utjecajem takvog širenja svemira.²⁷ Kada bi vrijedilo $w < -1$ dogodila bi se možda najzanimljivija situacija. U tom se slučaju fluid koji ispunjava svemira naziva²⁷ "fantomska energija". Tada bi se u konačnom vremenu dogodilo da faktor skale beskonačno naraste i svi vezani sustavi od galaksija prema atomskim jezgrama bi se raspali pod utjecajem kozmološkog širenja. To se može bolje vidjeti ako se prva Friedmannova jednadžba napiše na sljedeći način²⁷

$$H^2 = H_0^2 \left[\frac{\Omega_m}{a^3} + (1 - \Omega_m)a^{-3(1+w)} \right], \quad (71)$$

gdje je Ω_m relativna gustoća materije u svemiru. Za dovoljno veliki t , prvi se član u gornjoj jednadžbi može zanemariti. Integracijom se može dobiti vrijeme u kojem faktor skale ide u beskonačno, scenarij koji se u literaturi naziva "big rip"²⁷:

$$t_{rip} - t_0 \approx \frac{2}{3} |1 + w|^{-1} H_0^{-1} (1 - \Omega_m)^{-1/2}, \quad (72)$$

gdje je s t_0 označeno trenutno vrijeme. Jasno je da je pri ostvarenju ovakvog kraja svemira, sam svemir beskonačne veličine. Postavlja se pitanje - je li moguće zamisliti takav kraj svemira, da i sam svemir ostane konačne veličine? Kako bi se razmotrilo to pitanje potrebno je uvesti nešto što se naziva generaliziranim Chaplygin plinom - GCG. GCG je egzotičan tip pozadinskog fluida koji ispunjava svemir i koji zadovoljava sljedeću jednadžbu stanja²⁸

$$p = -\frac{A}{\rho^\alpha}, \quad (73)$$

gdje je A pozitivna konstanta, a α parametar. Za pozadinski fluid koji zadovoljava ovakvu jednadžbu stanja pokazat će se da, pod određenim uvjetima, gustoća energije ρ poprima beskonačnu vrijednost pri konačnoj veličini svemira. Za dio svemira volumena V koji je ispunjen takvim fluidom vrijedi

$$U = \rho V, \quad (74)$$

gdje je U ukupna energija. Iz prethodne se relacije može dobiti

$$dU = \rho dV + V d\rho. \quad (75)$$

U slučaju da nema prijenosa topline vrijedi⁶: $dU = -pdV$, što u kombinaciji s prethodnom relacijom i diferenciranjem po vremenu daje

$$\frac{d\rho}{dt} = -(p + \rho) \frac{1}{V} \frac{dV}{dt}. \quad (76)$$

Za neki volumen V vrijedi $V \propto a^3$ pa zbog toga vrijedi $dV/V = 3da/a$. Uvrštavajući tu ovisnost u prethodnu relaciju dobiva se

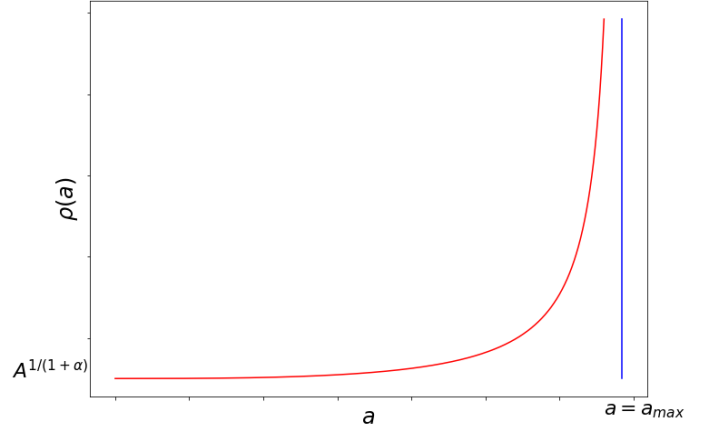
$$\dot{\rho} = -3(p + \rho) \frac{\dot{a}}{a}. \quad (77)$$

Rješavanjem te diferencijalne jednadžbe, uz jednadžbu stanja (73) dobiva se

$$\rho = \left(A + \frac{B}{a^{3(1+\alpha)}} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad (78)$$

gdje je B konstanta dobivena integracijom. U slučaju da je B negativan i da je $\alpha < -1$ iz prethodne ovisnosti moguće je dobiti faktor skale a za koji gustoća energije postaje beskonačna. Takav faktor skale dan je s

$$a_{max} = \left| \frac{B}{A} \right|^{\frac{1}{3(1+\alpha)}}, \quad (79)$$



Slika 4. Graf ovisnosti gustoće energije GCG-a o faktoru skale ($B < 0, \alpha < -1$)

a scenarij u kojem su ispunjeni svi uvjeti da se to ostvari naziva se "big freeze".²⁹ Ime je dobio po tome što se za konačnu veličinu svemira ostvari beskonačna gustoća energije. To znači da se ništa u svemiru ne bi moglo ni pomicati²⁹, dakle svemir bi na neki način bio zauvijek "zamrznut". Razmotrimo još situaciju u kojoj je svemir ispunjen GCG-om čija je gustoća opisana s (78) uz uvjete $B < 0, \alpha > -1$. Prva Friedmannova jednadžba može se zapisati kao

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} \left[A + \frac{B}{a^{3(1+\alpha)}} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} - \frac{k}{a^2}. \quad (80)$$

Iz te se jednadžbe može vidjeti da kako se faktor skale $a(t)$ povećava i ide u beskonačnost, tako Hubbleov faktor H ide u neku konstantnu vrijednost. Takvo ponašanje nalikuje na de Sitter prostorvrijeme. Uz gore izložene scenarije, u svemiru u kojem postoji neka kozmološka konstanta Λ različita od 0, postoji još jedan važan problem. Taj se problem odnosi na slučajnost našeg postojanja i vremena koje je toliko blizu vremenu u kojem kozmološka konstanta počinje dominirati.²⁷ Ako je trajanje svemira beskonačno, čini se malo vjerojatno da bi ta dva događaja bila toliko blizu jedan drugome. S druge strane, ako je trajanje svemira konačno i ako se uzme da je za naše postojanje nužan uvjet to da postoje strukture poput zvijezda, galaksija i skupova galaksija³⁰, čini se da takva slučajnost ne postoji. U tom slučaju izgleda kao da je prirodno da živimo toliko blizu vremenu u kojem Λ počinje dominirati.²⁷

VII. ZAKLJUČAK

S ciljem ispitivanja utjecaja kozmološkog širenja na lokalnu fiziku proučeni su razni sustavi. Prvi od njih je

klasičan atom, tj. proton oko kojeg se kreće elektron, a oni se nalaze u svemiru koji se širi. U slučaju da je metrika tog svemira opisana de Sitter metrikom takav atom se ne širi djelomično, već se ili širi zajedno sa svemirom ili uopće ne širi. Dakle, ako je kozmološko širenje dovoljno jako atom će se širiti zajedno sa svemirom. Ako je pak kozmološko širenje slabije od Coulombskog privlačenja atom se neće nimalo širiti. S druge strane, stavljanjem takvog atoma u svemir u kojem je faktor skale $a(t) \propto t^{2/3}$ dobiva se upravo efekt djelomičnog širenja. Analizom kvantnog harmoničkog oscilatora u de Sitter prostorvremenu dobiven je rezultat koji govori da se harmonički oscilator ne širi s vremenom, već da mu je samo promijenjena frekvencija titranja, a time i veličina. Za gravitacijski čvrsto vezane sustave dobiveni su različiti rezultati, a konkretno za Schwarzschild-de Sitter crnu rupu dobiven je rezultat koji govori da se njezin horizont događaja ne širi pod utjecajem širenja svemira. Analizom "lensinga" u McVittie metrici dobiven je rezultat koji govori da u najvišem redu nema doprinosa kozmološkog širenja tom fenomenu. Osim utjecaja kozmološkog širenja na ovdje opisane sustave, prodiskutirani su razni scenariji u budućnosti svemira koji bi se mogli ostvariti pod utjecajem kozmološkog širenja, od kojih su možda najzanimljiviji "big rip" i "big freeze".

VIII. DODATAK

VIII.1. Jednadžba geodezika svjetlosnog tipa u McVittie metrici

McVittie metrika se u Kartezijevim koordinatama može napisati na sljedeći način

$$ds^2 = - \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} \right)^2 dt^2 + (1+\mu)^4 a(t)^2 \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (81)$$

iz čega se vidi da je metrika sfernosimetrična. Zbog te sferne simetrije postoji rotacijska simetrija oko osi na kojoj se nalaze promatrač i leća. Posljedica toga je da se problem može zadati u dvije dimenzije bez smanjenja općenitosti³¹. Ako se onda taj problem zamisli u dvije dimenzije, x-os može biti zadana pravcem na kojem se nalaze leća i promatrač. U tom će slučaju longitudinalni pomaci fotona biti pomaci u x-smjeru, a njegovi transverzalni pomaci će biti pomaci u y-smjeru. Općenito, jednadžba geodezika svjetlosnog tipa ima sljedeći oblik¹

$$\frac{d^2 x^\nu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0, \quad (82)$$

gdje je $\Gamma_{\alpha\beta}^\nu$ Christoffelov simbol, a λ afin parametar definiran na način da se relacijom $P^\mu = dx^\mu/d\lambda$ dobiva četveroimpuls fotona. Troimpuls fotona dan je s $p^2 = g_{ij} P^i P^j$.

Iz relacije

$$g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = 0, \quad (83)$$

dobiva se sljedeća relacija

$$P^0 = \frac{1+\mu}{1-\mu} p \approx (1+2\mu)p, \quad (84)$$

koja vrijedi u prvom redu. Iz jednadžbe (82) za prostorne komponente četveroimpulsa se dobiva³¹

$$\frac{dP^i}{d\lambda} = \frac{4\delta^{ij}(\partial_j \mu)p^2}{a^2} - 2HpP^i - 4P^i P^k (\partial_k \mu). \quad (85)$$

Budući da se funkcija $x(\lambda)$ može invertirati u $\lambda(x)$ jer je monotona funkcija, jednadžba (85) može se napisati³¹ za y-smjer uz to što onda vrijedi

$$\frac{dy}{d\lambda} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{d\lambda} = P^x \frac{dy}{dx}, \quad (86)$$

gdje zadnja jednakost vrijedi po definiciji četveroimpulsa. Iz toga onda slijedi

$$\begin{aligned} P^x \frac{d}{dx} \left(P^x \frac{dy}{dx} \right) &= 4(\partial_y \mu) [(P^x)^2 + (P^y)^2] - \\ &2Ha(1+2\mu) \sqrt{(P^x)^2 + (P^y)^2} P^x \frac{dy}{dx} - \\ &4 \frac{dy}{dx} P^x [P^y (\partial_y \mu) + P^x (\partial_x \mu)], \end{aligned} \quad (87)$$

U jednadžbi (87) iskoristena je vrijednost troimpulsa koja za male μ iznosi $p^2 = a^2(1+4\mu) [(P^x)^2 + (P^y)^2]$. Raspisivanjem lijeve strane jednadžbe (87) i korištenjem relacije $P^y/P^x = dy/dx$ dobiva se

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{P^x} \frac{dP^x}{dx} \frac{dy}{dx} &= 4(\partial_y \mu) \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \\ &- 2Ha(1+2\mu) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \frac{dy}{dx} \\ &- 4 \frac{dy}{dx} \left(\frac{dy}{dx} (\partial_y \mu) + (\partial_x \mu) \right). \end{aligned} \quad (88)$$

Kako bi se odredio drugi član na lijevoj strani prethodne jednadžbe, potrebno je iskoristiti jednadžbu (85) za longitudinalni smjer tj. za x-smjer:

$$\begin{aligned} \frac{1}{P^x} \frac{dP^x}{dx} &= 4(\partial_x \mu) \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \\ &- 2Ha(1+2\mu) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} - 4 \left(\frac{dy}{dx} (\partial_y \mu) + (\partial_x \mu) \right). \end{aligned} \quad (89)$$

Pa ako se sada (89) uvrsti u (88) dobiva se

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 4(\partial_y \mu) \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] - 4(\partial_x \mu) \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \frac{dy}{dx}. \quad (90)$$

U najvišem redu računa smetnje gornja jednadžba prima sljedeći oblik

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 4(\partial_y \mu). \quad (91)$$

Ta relacija se korištenjem oznaka iz V. poglavlja svodi na

$$\frac{d^2 l}{d\chi^2} = 4(\partial_t \mu) \quad (92)$$

čime je reproducirana relacija (37). Valja naglasiti da oznake x i y korištene ovdje u Dodatku služe samo za određivanje transverzalnog i longitudinalnog smjera i nisu direktno vezane uz pokrate "x" i "y" korištene u poglavlju V.

-
- ¹ S. Weinberg, *Cosmology* (2008).
² S. Dodelson, *Modern Cosmology* (2003).
³ D.J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics* (1995).
⁴ R. Schoen, *Mean Curvature in Riemannian Geometry and General Relativity* (2002).
⁵ M. Pettini, *Introduction to Cosmology*
⁶ T. Theuns, *Physical Cosmology*
⁷ A. G. Riess *et al.*, *Astron. J.* **116**, 1009 (1998) [astro-ph/9805201].
⁸ S. Perlmutter *et al.*, *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999) [astro-ph/9812133].
⁹ M. Carrera; D. Giulini, arXiv:0810.2712 [**gr-qc**]
¹⁰ R.H. Price, arXiv:gr-qc/0508052.
¹¹ W.B. Bonnor *Class. Quantum Grav.* **16**, 1313 (1999).
¹² R. Gautreau *Phys. Rev.* **29** 198 (1984).
¹³ N.A. Lemos, arXiv:1307.5818 [**gr-qc**].
¹⁴ D.C. Khandekar, *J. Math. Phys.* **16**, 384 (1975).
¹⁵ P.D. Noerdlinger; V. Petrosian, *Astrophys. J.* **168**, 1 (1971).
¹⁶ G.C. McVittie, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **93**, 325 (1933).
¹⁷ S.W. Hawking, *J. Math. Phys.* **9**, 598 (1968).
¹⁸ V. Faraoni; A. Jacques, arXiv:0707.1350 [**gr-qc**]
¹⁹ D. Walsh *et al.* *Nature* **279**, 381–384 (1979).
²⁰ B.C. Nolan, *J. Math. Phys.* **34**, 1 (1993).
²¹ W. Rindler, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* **116**, 662 - 677 (1956).
²² V. Faraoni, arXiv:1810.04667 [**gr-qc**]
²³ J. Sultana; C.C. Dyer, *Gen. Rel. Grav.* **37**, 1349 (2005).
²⁴ O.F. Piattella, arXiv:1508.04763 [**astro-ph.CO**]
²⁵ M. Ishak; W. Rindler, arXiv:1006.0014 [**astro-ph.CO**]
²⁶ S.M. Carroll, arXiv:astro-ph/0004075
²⁷ R.R. Caldwell *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 071301 (2003).
²⁸ M.C. Bento *et al.*, arXiv:gr-qc/0202064
²⁹ M. Bouhmadi-Lopez *et al.*, arXiv:gr-qc/0612135
³⁰ H.E.S. Velten, *Eur. Phys. J. C* **74**, 3160 (2014).
³¹ O.F. Piattella, arXiv:1609.00270 [**gr-qc**]