

RAČUNI NA NIVOU DVIJE PETLJE ZA KVANTNU ELEKTRODINAMIKU

Marta Fatović*

Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Bijenička 32, Zagreb

(Dated: 20. siječnja 2019.)

Sažetak

U seminaru je proučavana kvantna elektrodinamika na nivou dvije petlje u okvirima renormalizacijske perturbacijske teorije. Uvedena je klizna skala te je za beta funkciju dobiveno da ovisi samo o konstanti g_μ . Uvođenjem minimalne suptrakcije (uz konvenciju $D = 4 - 2\epsilon$) su se grupirali svi članovi uz faktor ϵ^{-1} koji su se kasnije odstranili (renormalizacija). Renormalizirala su se polja QED-a i dobivena je veza između golog i renormaliziranog naboja. Računima dijagrama na nivoima jedne i dvije petlje, dobivene su vrijednosti δZ_1 , δZ_2 i δZ_3 . Uveden je i izračunat je magnetski moment elektrona. Na kraju je još i izračunata beta funkcija na nivou dvije petlje.

I. UVOD

I.1. Renormalizacijska grupa

I.1.1. Motivacija uvođenja renormalizacije

Metoda renormalizacijske grupe je uvedena kako bi se riješio problem ograničenosti perturbacijske teorije za visoke energije. Naime, pri računima amplituda nekog procesa se javljaju divergencije koje se zatim moraju tretirati posebnim metodama. Postoje infracrvene (IR- infra red) i ultraljubičaste (UV- ultra violet) divergencije. Prve se javljaju kao posljedica emisije niskoenergetskih fotona koji se ne mogu opaziti detektorima, međutim usporedba eksperimenta s teorijskim izrazom se ipak može napraviti ako se sve amplitude koje opisuju emisiju niskoenergetskog fotona dodaju osnovnoj drvastoj amplitudi [1]. U ovom seminaru su proučavane UV divergencije koje nastaju pri velikim prijenosima impulsa. Taj problem je riješen na način da su se divergencije uključile u redefiniciju fizikalnih veličina. Mijenjanjem skale energije na kojoj se proces promatra, mijenjaju se parametri teorije, a veza skale i parametara je opisana renormalizacijskom grupom. Dakle, renormalizacija je reparametrizacija teorije koja fizikalne veličine čini konačnima red po red u perturbacijskoj teoriji [2].

I.1.2. Singulariteti renormalizirane konstante vezanja i klizna skala

Svaki model je opisan svojim lagranžijanom iz kojeg se dobivaju Feynmanova pravila. Ono što je od interesa je kako se konstante vezanja (ono što se nalazi u svakom vrhu dijagrama, npr. za QED je to naboj) ponašaju na različitim skalama energije. Takva veza konstante vezanja i energije ima eksperimentalnu provjeru, ali i daje rezultate za energije koje eksperimentalno nisu postignute. Problem koji je motivirao uvođenje renormaliza-

cijske grupe je pojava divergentnih članova pri računima amplituda dijagrama. Na primjeru QED je to član:

$$\Pi_{\mu\nu}(q) \supseteq \left(\alpha \ln \frac{q^2}{m_e^2} \right)^n, \quad (1)$$

koji za veliki q divergira. Tad se koristi takva perturbacijska teorija u kojoj su konstante vezanja zapravo funkcije klizne skale mase μ . μ ne ovisi o masama čestica i potpuno je proizvoljna. Ako se definira renormalizirana konstanta vezanja na skali μ : g_μ , parametri teorije se mogu prikazati kao funkcije od μ i g_μ [3]. Na primjer funkcije koje su infracrveno konačne (označene su s Γ) imaju ponašanje:

$$\Gamma(E, x, g_\mu, m, \mu) = E^D \Gamma\left(1, x, g_\mu, \frac{m}{E}, \frac{\mu}{E}\right). \quad (2)$$

Dakle, Γ je funkcija ukupne energije u sustavu centra mase E , bezdimenzionalnih veličina kao što su to prostorni kutevi x , konstante g_μ , mase i klizne skale μ . Obzirom da je μ proizvoljno, bira se $\mu = E$ i primjenom toga se dobije:

$$\Gamma(E, x, g_\mu, m, \mu) = E^D \Gamma\left(1, x, g_E, \frac{m}{E}, 1\right), \quad (3)$$

gdje sad g_E nije funkcija mase i nema divergencija zbog malih masa. Dakle, u bilo kojem konačnom redu perturbacijske teorije, Γ ima asimptotsko ponašanje, za $E \gg m$ vejadi:

$$\Gamma(E, x, g_\mu, m, \mu) \longrightarrow E^D \Gamma(1, x, g_E, 0, 1). \quad (4)$$

Ono što preostaje je izračunati g_E . Račun se provodi u koracima:

a) g_μ se može izračunati preko početne vrijednosti konstante veze g_R uz uvjet da je omjer skale klizanja i mase blizu jedinice: $\mu/m \cong 1$,

b) $g_{\mu'}$ se može izračunati preko g_μ uz uvjet da je omjer skale klizanja : $\mu'/\mu \cong 1, \dots$ Ovaj postupak se ponavlja sve do g_E . Umjesto ovakvog postupka s diskretnim koracima, račun se može obaviti kontinuirano. Dimenzionalna analiza govori da je odnos između g_μ i $g_{\mu'}$ dan s:

$$g_{\mu'} = G(g_\mu, \mu'/\mu, m/\mu). \quad (5)$$

* marta.fzd@yahoo.com

Gornji izraz za kliznu konstantu vezanja u idućem koraku treba derivirati po μ' , a zatim nametnuti uvjet $\mu' = \mu$. Tim se postupkom dobije:

$$\mu \frac{d}{d\mu} g_\mu = \beta \left(g_\mu, \frac{m}{\mu} \right), \quad (6)$$

gdje je

$$\beta \left(g_\mu, \frac{m}{\mu} \right) \equiv \left[\frac{\partial}{\partial \frac{\mu'}{\mu}} G \left(g_\mu, \frac{\mu'}{\mu}, m/\mu \right) \right]_{\frac{\mu'}{\mu}=1}. \quad (7)$$

Vidi se da za $m = 0$ nema singulariteta pa je limes $m \rightarrow 0$ moguć te jednadžba poprima oblik:

$$\mu \frac{d}{d\mu} g_\mu = \beta(g_\mu, 0) \equiv \beta(g_\mu). \quad (8)$$

[3]. Jednadžba (8) dobivena u ovom limesu je karakteristična jednadžba Callan-Symanzikovih jednadžbi za Greenove funkcije koje ovise o konstanti veze g_μ . Beta funkcija ovisi samo o g_μ . U teorijama s više polja i konstanti vezanja, za svako vezanje postoji $\beta(g)$ [4]. Jednadžba (8) se integrira i dobije se:

$$\ln \frac{E}{\mu} = \int_{g_\mu}^{g^E} \frac{dg}{\beta(g)}. \quad (9)$$

I.2. Dimenzionalna regularizacija

Regularizacija je postupak pretvaranja beskonačnog integrala u konačni. Postoje razni načini na koji se to može napraviti, ali obzirom da dimenzionalna regularizacija u kvantnoj teoriji polja čuva baždarnu invarijantnost i daje alternativnu definiciju za kliznu skalu, korištena je upravo ona [3]. Pri računima Feynmanovih dijagrama mjera integracije po impulsu, $\frac{d}{d\Omega}$ je D-dimenzionala (1 vremenska i $D - 1$ prostornih integracija). Nakon što se račun provede, konačan izraz mora biti dobro definiran u limesu $D \rightarrow 4$ [4]. Obzirom da je interval integracije paran $(-\infty, \infty)$, ako je parna potencija i u nazivniku, preživljavaju samo oni integrali koji imaju parnu potenciju impulsa po kojem se integrira u brojniku. Vrijede relacije [2]:

$$\int d^4 l l_\mu l_\nu = \int d^4 l \frac{1}{D} l^2 g_{\mu\nu}, \quad (10)$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D l_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^n} &= \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(n - \frac{D}{2})}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{n - \frac{D}{2}}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D l_E}{(2\pi)^D} \frac{l_E^2}{(l_E^2 + \Delta)^n} &= \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{D}{2} \frac{\Gamma(n - 1 - \frac{D}{2})}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{n - 1 - \frac{D}{2}}. \end{aligned} \quad (13)$$

I.3. Minimalna suptrakcija

Minimalna suptrakcija odstranjuje divergentne članove u amplitudama procesa tako da u takozvane kontračlanove stavi divergentne članove amplituda pomnožene s -1 . Korištena je konvencija $D = 4 - 2\epsilon$ preuzeta iz članka [5]. Kao što je već rečeno, amplitude imaju polove za $D = 4$. Taj problem se rješava na način da se ti polovi ponište s polovima koje gole (bare) konstante vezanja također moraju imati [3]. Te gole konstante vezanja općenito imaju neku dimenziju $\Delta_\ell(D)$ koja ovisi o dimenziji prostorvremena D. Od koristi je proučavati bezdimenzionalnu veličinu $g_B^\ell(D) \mu^{-\Delta_\ell(D)}$, gdje je μ klizna skala dimenzije mase. Nova bezdimenzionalna veličina je reskalirana konstanta vezanja koja se može prikazati kao suma članova proporcionalnih potencijama ν od divergentnih faktora $\frac{1}{D-4}$ s koeficijentima b_ν fiksnim kraćenjem singulariteta za limes $D \rightarrow 4$ i ostatka koji ostaje konačan za isti limes:

$$g_B^l(D) \mu^{-\Delta_l(D)} = g^l(\mu, D) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (D-4)^{-\nu} b_\nu^l(g(\mu, D)). \quad (14)$$

Gola konstanta može imati bilo kakvu ovisnost o D sve dok se singulariteti za $D = 4$ u fizikalnoj amplitudi dokiđaju. Ta proizvoljnost se narušava zahtjevom da $g^l(\mu, d)$ bude analitička, ne samo u $D = 4$, već za svaki D . Da bi se izračunale renormalizacijske grupne jednadžbe, na jednadžbu (14) se djeluje operatorom $\mu \frac{d}{d\mu}$ što vodi na:

$$\begin{aligned} -\Delta^l(D) \left[g^l + \sum_{\nu=1}^{\infty} (D-4)^{-\nu} b_\nu^l(g) \right] &= \\ = \beta^l(g, D) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_m b_{\nu m}^l(g) \beta^m(g, D) (D-4)^{-\nu}. \end{aligned} \quad (15)$$

U dobivenom izrazu, $\beta^l(g, D)$ ne ovisi o μ jer su sve veličine osim μ učinjene bezdimenzionalnima. Vrijede izrazi :

$$b_{\nu m}^l(g) \equiv \frac{\partial}{\partial g^m} b_\nu^l(g), \quad (16)$$

$$\mu \frac{d}{d\mu} g^l(\mu, D) = \beta^l(g(\mu, D), D). \quad (17)$$

Obzirom da su dimenzionalnosti uvijek linearne funkcije od D, mogu se zapisati kao:

$$\Delta_l(D) = \Delta_l + \rho_l(D-4). \quad (18)$$

Ako se sad ponovno napiše i razmotri lijeva strana jednadžbe (15), dobije se:

$$\begin{aligned} -\rho_l g^l(D-4) - [\Delta_l g^l + b_1^l(g) \rho^l] - \\ - \sum_{\nu=1}^{\infty} (D-4)^{-\nu} [\rho_l b_{\nu+1}^l(g) + \Delta_l b_\nu^l(g)]. \end{aligned} \quad (19)$$

Najviša potencija dimenzije D u analitičkom dijelu ovdje je jedan, što znači da isto mora biti istinito i s desne strane jednadžbe. Zbog toga $\beta(g, D)$ mora biti linearna u D :

$$\beta^l(g, D) = \beta^l(g) + (D - 4)\alpha^l(g). \quad (20)$$

Sad se mogu samo iščitati relacije:

$$\alpha^l(g) = -\rho_l g^l, \quad (21)$$

$$\beta^l(g) = -\Delta_l g^l - b_1^l(g)\rho_l + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_m b_{1m}^l(g)\rho_m g^m. \quad (22)$$

Jednakost (22) je od izuzetne važnosti jer pokazuje da beta funkcija ovisi samo o koeficijentima uz pol prvog reda u ϵ , čak i u višim redovima računa smetnje [3]. To je korišteno pri kasnijim računima renormalizacijskih grupnih jednadžbi za QED gdje je promatrana beta funkcija na nivou dvije petlje.

II. PRIMJENA NA QED I REZULTATI RAČUNA

II.1. Renormalizirana perturbacijska teorija

U dijagramima s petljama, već u najnižem redu računa smetnje se javljaju divergencije. Naime, integracije po impulsu petlje nisu ograničene odozgo što znači da amplituda ima UV divergenciju. Renormalizirana perturbacijska teorija je takva reformulacija polazne teorije da su u njoj polja i parametri konačni. Lagranžijan QED-a glasi:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\partial - m_B)\psi - e_B\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu, \quad (23)$$

gdje su m_B i e_B nerenormalizirana masa i naboj. Oni su neopservabilni parametri teorije. Cilj je razdvojiti lagranžijan na dva dijela: fizikalni dio i dio koji sadrži divergencije. To se može napraviti tako da se prvo renormaliziraju fotonski i fermionski propagator.

Uzme li se potpuni fotonski propagator i prikaže li ga se kao beskonačnu sumu jednočestičnih ireducibilnih dijagrama (1PI: dijagrami koji se prekidanjem jedne linije ne mogu razdijeliti na dva odvojena dijagrama) kao na slici 1. te prikazom takve sume kao geometrijskog reda uz pretpostavku da se propagator javlja između sačuvanih struja, dobija se sljedeći izraz za propagator:

$$P_\gamma = \frac{-iZ_3g_{\mu\nu}}{q^2}, \quad (24)$$

gdje je $Z_3 = \frac{1}{1-\Pi(0)}$ [1].

Istim postupkom se potpuni fermionski propagator prikazuje kao beskonačna suma 1PI dijagrama kao na slici 2.



Slika 1: Prikaz ukupnog fotonskog propagatora kao beskonačne sume 1PI dijagrama. Preuzeto iz [1].

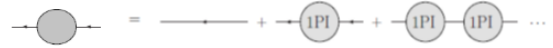
te prikazom takve sume kao geometrijskog reda, dobija se izraz za propagator:

$$P_f = \frac{i}{p - m_B - \Sigma(\not{p})}. \quad (25)$$

Potpuni fermionski propagator ima jednostavan pol pomaknut za $\Sigma(\not{p})$. Uvede li se definicija renormalizacije $Z_2^{-1} = 1 - \left. \frac{d\Sigma}{dp} \right|_{\not{p}=m}$, P_f se može zapisati kao:

$$P_f = \frac{iZ_2}{\not{p} - m} + \dots \quad (26)$$

gdje je m fizikalna masa [2].



Slika 2: Prikaz ukupnog fermionskog propagatora kao beskonačne sume 1PI dijagrama. Preuzeto iz [1].

Iz (24) i (26) slijedi da se polja mogu izraziti preko renormaliziranih polja:

$$\psi = Z_2^{1/2}\psi_r, \quad (27)$$

$$A^\mu = Z_3^{1/2}A_r^\mu. \quad (28)$$

Zamjenama (27) i (28) u jednadžbi (23) dobija se novi lagranžijan:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}Z_3(F_r^{\mu\nu})^2 + Z_2\bar{\psi}_r(i\partial - m_B)\psi_r - e_B Z_2 Z_3^{1/2}\bar{\psi}_r\gamma_\mu\psi_r A_r^\mu. \quad (29)$$

Fizikalni naboj definira se kao:

$$e = Z_1^{-1}Z_2Z_3^{1/2}e_B, \quad (30)$$

gdje je Z_1 renormalizacijski faktor koji poništava divergencije vrha opisane sa Z_1^{-1} koje se javljaju u višim redovima računa smetnje (vidi sliku 6). Sad se početni lagranžijan može razdvojiti u dva dijela- na opservabilni dio i na dio koji sadrži divergentne konstante:

$$\delta Z_1 = Z_1 - 1 \quad (31)$$

$$\delta Z_2 = Z_2 - 1 \quad (32)$$

$$\delta Z_3 = Z_3 - 1 \quad (33)$$

$$\delta_m = Z_2 m_B - m \quad (34)$$

Svaki kontračlan je određen svojim renormalizacijskim uvjetom [4]:

$$\Sigma(\not{p} = m) = 0 \quad (35)$$

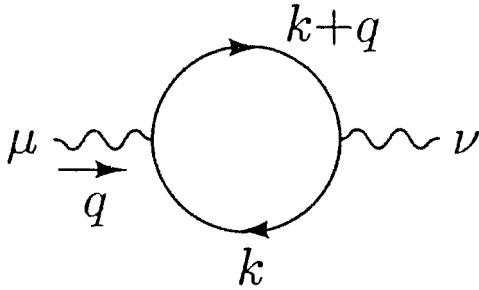
$$\frac{d}{d\not{p}}\Sigma(\not{p})|_{p=m} = 0 \quad (36)$$

$$\Pi(q^2 = 0) = 0 \quad (37)$$

$$-ie\Gamma^\mu(p' - p = 0) = -ie\gamma^\mu \quad (38)$$

II.2. Radijativne korekcije za QED na nivou jedne petlje

II.2.1. Dijagram vakuumske polarizacije



Slika 3: Dijagram vakuumske polarizacije. Preuzeto iz [4].

Amplituda dijagrama sa slike 3. glasi:

$$\begin{aligned} i\Pi_2^{\mu\nu}(q) &= \\ &= -e^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \text{tr} \left[\gamma^\mu \frac{(\not{k} + m)}{k^2 - m^2} \gamma^\nu \frac{(\not{k} + \not{q} + m)}{(k+q)^2 - m^2} \right]. \end{aligned} \quad (39)$$

S ciljem pojednostavljenja računa, korišteno je pravilo Feynmanove parametrizacije [2]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1 \dots A_n} &= (n-1)! \cdot \\ &\cdot \int_0^1 \dots \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \frac{\delta(x_1 + \dots + x_n - 1)}{(x_1 A_1 + \dots + x_n A_n)^n}. \end{aligned} \quad (40)$$

Nakon primjene Feynmanove parametrizacije, u kojoj se uvela supstitucija $l = k - qx$, dobija se jednostavniji izraz za nazivnik:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(k^2 - m^2)((k+q)^2 - m^2)} \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{(k^2 + 2xk \cdot q + xq^2 - m^2)^2} \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{(\ell^2 + x(1-x)q^2 - m^2)^2}, \end{aligned} \quad (41)$$

i za brojnik gdje se još uzimala u obzir i činjenica da članovi linearni u l ne preživljavaju:

$$\begin{aligned} \text{Brojnik} &= \\ &= 2\ell^\mu \ell^\nu - g^{\mu\nu} \ell^2 - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + \\ &+ g^{\mu\nu} (m^2 + x(1-x)q^2). \end{aligned} \quad (42)$$

Ono što je još bilo potrebno uvesti kako bi se integral izvrijedio je Wickova rotacija. Naime, zbog toga što podintegralni izraz u prostoru Minkowskog nema simetriju nulte i ostalih komponenti impulsa, integracija se provodi u euklidskom prostoru što vodi na zamjene [2]:

$$\begin{aligned} l^2 &= -l_E^2, \\ d^4 l &= id^4 l_E. \end{aligned} \quad (43)$$

Nakon Wickove rotacije izraz izgleda ovako:

$$\begin{aligned} i\Pi_2^{\mu\nu}(q) &= -4ie^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^D \ell_E}{(2\pi)^D} \cdot \\ &\cdot \frac{-(\frac{2}{D} - 1)g^{\mu\nu} \ell_E^2 - 2x(1-x)q^\mu q^\nu}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} + \\ &+ \frac{g^{\mu\nu} (m^2 + x(1-x)q^2)}{(\ell_E^2 + \Delta)^2}, \end{aligned} \quad (44)$$

gdje je $\Delta = m^2 - x(1-x)q^2$.

Zbog UV divergencija koje se javljaju, idući korak u računu je dimenzionalna regularizacija. Na gornji integral se primjene relacije (10), (11), (12) i (13) te se dobije integral :

$$\begin{aligned} i\Pi_2^{\mu\nu}(q) &= \frac{-i8e^2}{(4\pi)^{D/2}} (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \cdot \\ &\cdot \int_0^1 dx x(1-x) \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{\Delta^{2-D/2}}. \end{aligned} \quad (45)$$

Ovaj integral je riješen dalje na način da je razvijena $\Gamma(\epsilon)$ i zadržani su se samo članovi proporcionalni sa ϵ^{-1} zato što će jedino oni ulaziti u račun za RGE (renormalizacijske grupne jednačbe). Korištena je konvencija $D = 4 - 2\epsilon$ [5] te je dobiven izraz:

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) \supseteq \frac{-ie^2}{12\pi^2\epsilon} (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu), \quad (46)$$

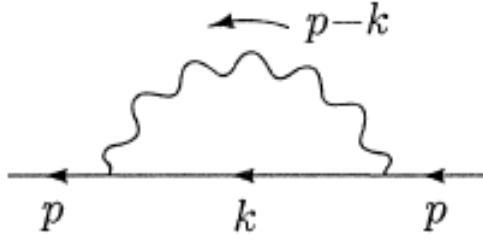
iz kojeg se može iščitati $\delta Z_3^{1L} = -\frac{e^2}{12\epsilon\pi^2}$, odnosno Z_3^{1L} :

$$Z_3^{1L} = 1 - \frac{e^2}{12\epsilon\pi^2}. \quad (47)$$

II.2.2. Dijagram vlastite energije elektrona

Amplituda dijagrama sa slike 4. glasi:

$$\begin{aligned} -i\Sigma_2(p) &= (-ie)^2 \cdot \\ &\cdot \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2} \gamma_\mu \frac{-i}{(p-k)^2 - m^2}, \end{aligned} \quad (48)$$



Slika 4: Dijagram vlastite energije elektrona. Preuzeto iz [4].

gdje je uvedena masa fotona μ kao IR regulator. Feynmanova parametrizacija provedena je kao i za dijagram vakuumske polarizacije:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(p-k)^2 - \mu^2} = \\ & = \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 - 2xk \cdot p + xp^2 - x\mu^2 - (1-x)m^2]^2}. \end{aligned} \quad (49)$$

Uvođenjem supstitucije $l = k - px$ i sređivanjem brojnika dobija se integral [4]:

$$-i\Sigma_2(p) = -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{(2-D)x \not{p} + Dm}{[l^2 - \Delta]^2}. \quad (50)$$

Potpuno analognim postupkom kao i za dijagram vakuumske polarizacije koristeći tehnike Wickove rotacije, dimenzionalne regularizacije i razvoja $\Gamma(\epsilon)$ te zadržavajući samo članove koji uz sebe imaju faktor ϵ^{-1} , dobija se izraz:

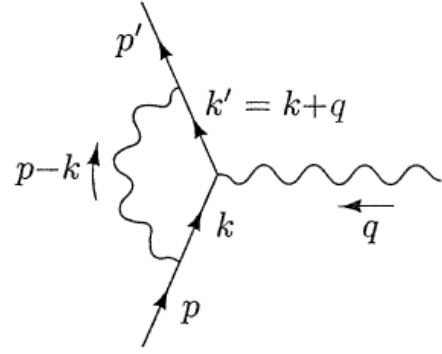
$$-i\Sigma_2 \supseteq \frac{ie^2}{(4\pi)^2 \epsilon} \not{p}, \quad (51)$$

iz kojeg se može iščitati $\delta Z_2^{1L} = -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}$, odnosno Z_2^{1L}

$$Z_2^{1L} = 1 - \frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \quad (52)$$

II.2.3. Dijagram korekcije vrha

Račun amplitude ovog dijagrama je proveden zadržavajući i divergentne i konačne članove zato što se izračunavao i Z_1^{1L} i anomalni magnetski moment. Zbog toga je račun bio nešto kompliciraniji. Amplituda



Slika 5: Dijagram korekcije vrha. Preuzeto iz [4].

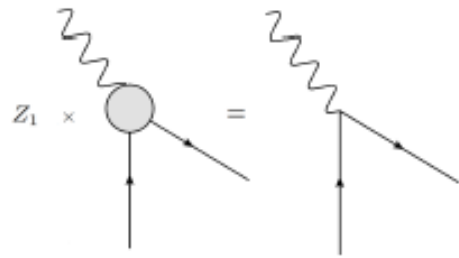
dijagrama prikazanog na slici 5 je:

$$\begin{aligned} & -ie\bar{u}(p') \delta\Gamma^\mu(p', p) u(p) = \\ & \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{-ig_{\nu\rho}}{(k-p)^2 + i\epsilon} \cdot \\ & \bar{u}(p') (-ie\gamma^\nu) \frac{i(\not{k}' + m)}{k'^2 - m^2 + i\epsilon} \cdot \\ & \cdot (-ie\gamma^\mu) \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} (-ie\gamma^\rho) u(p). \end{aligned} \quad (53)$$

Potpuno analognim postupkom, no s nešto više računa zato što sad u nazivniku postoje tri faktora koja se uređuju Feynmanovom parametrizacijom. Zadržavanjem članova samo uz ϵ^{-1} , dobija se rezultat:

$$-i\Sigma_1 \supseteq \frac{1}{\epsilon} \frac{-ie^3}{(4\pi)^2} \gamma^\mu, \quad (54)$$

te se iz njega iščitava $(Z_1^{1L})^{-1}$ (vidi sliku 6.) kao koeficijent strukture $-ie\gamma^\mu$:



Slika 6: Renormalizacija QED vrha koja vrijedi u limesu kad $q \rightarrow 0$. Preuzeto iz [2].

$$(Z_1^{1L})^{-1} = 1 + \frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}. \quad (55)$$

Dobiveni rezultat je jako važan jer se njime potvrđuje Wardov identitet [4]:

$$Z_1^{-1} Z_2 = 1. \quad (56)$$

Wardov identitet vrijedi u svakom redu računa smetnje. To će kasnije biti korišteno pri računanju RGE na nivou dvije petlje. Svi rezultati na nivou jedne petlje dobiveni ručno su također dobiveni i time provjereni programskim sustavom Wolfram Mathematica, odnosno paketima FeynArts i FeynCalc.

II.2.4. Anomalni magnetski moment

Pri računu ukupnog doprinosa vrhu na nivou jedne petlje dobiven je sljedeći izraz:

$$\begin{aligned} & -ie\bar{u}(p') \delta\Gamma^\mu(p', p) u(p) = \\ & \int dx dy dz \delta(1-x-y-z) (-e^3) \cdot \\ & \cdot \bar{u}(p') \left[\gamma^\mu \left[\frac{(2-D)^2}{D} \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2-\frac{D}{2})}{\Gamma(3)} \left(\frac{\mu^2}{\Delta} \right)^{2-\frac{D}{2}} + \right. \right. \\ & + \frac{-i}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(3-\frac{D}{2})}{\Gamma(3)} \left(\frac{\mu^2}{\Delta} \right)^{2-\frac{D}{2}} \frac{1}{\Delta} \cdot \\ & \cdot (q^2(-(D-2)(1-x)(1-y)-z(4-D)) + \\ & + m^2((D-2)z^2 + (12-2D)z + (10-3D))) + \\ & + \frac{-i}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(3-\frac{D}{2})}{\Gamma(3)} \left(\frac{\mu^2}{\Delta} \right)^{2-\frac{D}{2}} \frac{1}{\Delta} \cdot \\ & \cdot ((p'+p)^\mu m [z^2(2-D) + z(-6+2D) - (4-D)] \left. \right]. \quad (57) \end{aligned}$$

Primjenom Gordonovog identiteta

$$(p'+p)^\mu = 2m\gamma^\mu - i\sigma^{\mu\nu} q_\nu \quad (58)$$

na izraz (57) i definicije $\delta\Gamma^\mu$ preko form faktora

$$\begin{aligned} & -ie\bar{u}(p') \delta\Gamma^\mu(p', p) u(p) = \\ & = -ie\bar{u}(p') [\gamma^\mu \delta F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2)] u(p), \quad (59) \end{aligned}$$

mogu se iščitati form faktori $\delta F_1(q^2)$ i $F_2(q^2)$ na nivou jedne petlje. Form faktori $\delta F_1(q^2)$ i $F_2(q^2)$ sadrže kompletnu informaciju kako elektromagnetsko polje utječe na elektron što znači da sadrže cjelokupna električna i magnetska vezanja elektrona. U najnižem redu računa smetnje dobija se $\Gamma^\mu(q) = \gamma^\mu$ pa se iz toga može iščitati da su ukupni form faktori u najnižem, odnosno nultom redu računa smetnje, s obzirom na izraz u uglatoj zagradi, jednaki

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 0. \quad (60)$$

U seminaru je od interesa izračunati $F_2(q^2)$ zbog toga što postoji relacija koja ga povezuje s anomalnim magnetskim momentom. Do nje se dolazi analizom izraza za

statični vektorski potencijal [4],[1]

$$A^{cl}(x) = \left(0, \vec{A}^{cl}(\vec{x}) \right), \quad (61)$$

odnosno

$$\vec{A}^{cl}(\vec{q}) = (2\pi)\delta(p'^0 - p^0) \left(0, \vec{\tilde{A}}^{cl}(\vec{q}) \right). \quad (62)$$

Primjenom određenih aproksimacija nad izrazom

$$i\mathcal{M} = ie \left[\bar{u}(p') \left(\gamma^i F_1 + \frac{i\sigma^{i\nu} q_\nu}{2m} F_2 \right) u(p) \right] \vec{\tilde{A}}^{cl}(\vec{q}), \quad (63)$$

i upotrebom Fourierovog transformata klasičnog statičnog vektorskog polja te pripadnih izraza za magnetsko polje u x i p prostoru

$$\begin{aligned} \vec{A}^{cl}(\vec{x}) &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\vec{x}} \vec{A}^{cl}(\vec{q}), \\ \vec{B}(\vec{x}) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}^{cl}(\vec{x}), \\ \vec{\tilde{B}} &= i\vec{q} \times \vec{\tilde{A}}^{cl}(\vec{q}), \end{aligned} \quad (64)$$

dobija se amplituda izražena preko magnetskog polja:

$$i\mathcal{M} = -i(2m)e\xi^{\dagger t} \left(\frac{-1}{2m} \sigma^k [F_1(0) + F_2(0)] \right) \xi \vec{\tilde{B}}^k(\vec{q}). \quad (65)$$

Izlučivanjem faktora $-i2m$ i Fourierovom transformacijom q zavisnih dijelovih, dolazi se do amplitudi pridružene potencijalne energije

$$\begin{aligned} V(\vec{x}) &= -\frac{e}{m} [F_1(0) + F_2(0)] \xi^{\dagger t} \frac{\vec{\sigma}}{2} \xi \cdot \vec{B}(\vec{x}) \\ &= -\langle \vec{\mu} \rangle \cdot \vec{B}(\vec{x}). \end{aligned} \quad (66)$$

Usporedbom s klasičnim izrazom za potencijal međudjelovanja magnetskog polja s magnetskim momentom $\vec{\mu}$ i uvođenjem izraza za spin $\vec{S} = \xi^{\dagger t} \frac{\vec{\sigma}}{2} \xi$ dobija se izraz za očekivanu vrijednost operatora magnetskog momenta:

$$\langle \vec{\mu} \rangle = \frac{e}{m} [F_1(0) + F_2(0)] \vec{S}, \quad (67)$$

kojeg se može napisati u standardnom obliku za magnetski moment

$$\vec{\mu} = g \left(\frac{e}{2m} \right) \vec{S}, \quad (68)$$

gdje je giromagnetski faktor dan s

$$g = 2 [F_1(0) + F_2(0)] = 2 + 2F_2(0). \quad (69)$$

Na taj se način dobila tražena veza između form faktora i magnetskog momenta. U drugoj jednadžbi u relaciji (69) upotrebljena je činjenica da je $F_1(0) = 1$ u svakom redu računa smetnje, što slijedi iz Wardovog identiteta i iz definicije Γ_μ u limesu kada $q \rightarrow 0$. U nultom redu računa smetnje vrijedi:

$$g = 2 + \mathcal{O}(\alpha), \quad (70)$$

a doprinosi višeg reda su mali i tvore anomalni magnetski moment. $F_2(q^2)$ se iščitava iz izraza (57) i (58). Može se primjetiti da je izraz za taj form faktor konačan pa nema potrebe ni za UV ni za IR regularizacijom, već se samo izračuna integral. Ono što je od interesa je slučaj $q^2 = 0$. Integral je vrlo lako rješiv i dobiva se:

$$F_2(0) = \frac{\alpha}{2\pi} = a_e = \frac{g-2}{2}. \quad (71)$$

Za sad se magnetski moment elektrona izračunao na nivou 5 petlji i veličina je koja se jako dobro slaže s eksperimentalnim provjerama. Rezultati eksperimenata [6] s visoko nabijenim ionima koji predstavljaju okruženje koje dozvoljava da se precizno proučava jedan ili više vezanih elektrona u elektromagnetskom polju. U takvim uvjetima magnetski moment (g-faktor) vezanog elektrona se jako mijenja. Rezultati mjerenja su uspoređeni s teorijskim predviđanjima za konkretne ione i dani na slici 7.

contribution	$^{12}\text{C}^{5+}$	$^{16}\text{O}^{7+}$	$^{28}\text{Si}^{13+}$
Dirac value	+1.998 721 354 391 (1)	+1.997 726 003 06 (2)	+1.993 023 571 551(5)
free QED	+0.002 319 304 358 (1)	+0.002 319 304 358 (1)	+0.002 319 304 358 (1)
BS-QED	+0.000 000 843 391 (6)	+0.000 001 594 38 (11)	+0.000 005 855 67 (165)
nuclear size	+0.000 000 000 407	+0.000 000 001 55 (1)	+0.000 000 020 468
nuclear recoil	+0.000 000 087 629	+0.000 000 116 97	+0.000 000 205 881
theory total	+2.001 041 590 117 (6)	+2.000 047 021 28 (11)	+1.995 348 957 93 (165)
experiment	+2.001 041 592 44 (232)	+2.000 047 025 4 (46)	+1.995 348 959 04 (81)

Slika 7: Usporedba eksperimentalno dobivenih rezultata magnetskog momenta za točno određene ione s teorijskim predviđanjem. Preuzeto iz [6].

II.3. Renormalizacija u višim redovima računa smetnje

II.3.1. Prividni stupanj divergencije

Divergencije dijagrama se mogu naći na osnovi prebrojavanja potencija impulsa u petljama. Na primjeru QED-a se za prebrojavanje koristi notacija [4],[1]

$$\begin{aligned} N_e &= \text{broj vanjskih } e^- \text{ linija} \\ N_\gamma &= \text{broj vanjskih } \gamma \text{ linija} \\ P_e &= \text{broj } e^- \text{ propagatora} \\ P_\gamma &= \text{broj } \gamma \text{ propagatora} \\ V &= \text{broj vrhova} \\ L &= \text{broj petlji} \end{aligned} \quad (72)$$

Logika ove metode je sljedeća: svaka petlja ima 4-dimenzionalnu integraciju po bilo kojem impulsu petlji p i zato uvećava divergenciju dijagrama za 4. Svaki bozonski propagator smanjuje divergenciju unutar petlje za 2 jer se pojavljuje s kvadratom impulsa u nazivniku, dok je fermionski, iz istih razloga, smanjuje za 1. Definicija

prividne divergencije dijagrama:

$$\begin{aligned} d &= (\text{potencija } p \text{ u brojniku}) - (\text{potencija } p \text{ u nazivniku}) \\ &= 4L - P_e - 2P_\gamma \end{aligned} \quad (73)$$

Tri su slučaja na koja se može naići primjenjujući ovu metodu: $d > 0$ i postoji divergencija, $d = 0$ i divergencija dijagrama je logaritamskog oblika, $d < 0$ i nema divergencije. Takvo predviđanje divergencija je najpessimističnije. U ovakvoj analizi su zanemarene simetrije teorije i činjenica da su u definiciji D uključeni 4-impulsi koji nisu u petljama, činjenica da drvasti dijagrami nisu divergentni te činjenica da divergencije mogu doći od poddijagrama danog dijagrama. Za promatranje divergencija preko vanjskih linija je potrebno uzeti u obzir to da je broj petlji definiran brojem propagatora i vrhova. Za svaki propagator vrijedi da je potencijalno dio petlje (sadrži d^4p), no svaki vrh ima jednu $\delta^{(4)}(p)$, ali jedna odlazi na sačuvanje impulsa. Uzimajući sve ovo u obzir, relacija glasi

$$L = P_e + P_\gamma - V + 1. \quad (74)$$

Za QED vrijedi da svaki vrh čine dva fermiona i jedan bozon pa je izraz za vrh dan kao

$$V = 2P_\gamma + N_\gamma = \frac{1}{2}(2P_e + N_e). \quad (75)$$

Kombinirajući dobiveno, dobija se rezultat takav da D ne ovisi o propagatorima i broju vrhova, nego ovisi samo o broju vanjskih linija

$$d = 4 - N_\gamma - \frac{3}{2}N_e. \quad (76)$$

Poopćenje na D dimenzija glasi

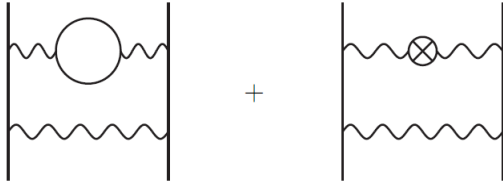
$$d = DL - P_e - 2P_\gamma = D(P_e + P_\gamma - V + 1) - P_e - 2P_\gamma. \quad (77)$$

II.3.2. Divergentni dijagrami

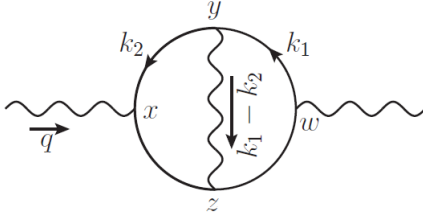
U višim redovima računa smetnje se javljaju i divergentni poddijagrami koji se moraju uzeti u obzir. Primjerice, kod prividne divergencije je to bio jedan od nedostataka metode prebrojavanja divergencija u dijagramu. Divergentni poddijagrami se mogu javiti u nekim konačnim dijagramima. Na slici 8 je prikazan jedan takav primjer. Takvu divergenciju nije teško tretirati jer je suma ovakva dva dijagrama konačna.

Međutim komplikacija se javlja kad se pojave preklapne divergencije: kad dvije divergentne petlje dijele propagator. Primjerice u QED je jedna od takvih prikazana na slici 9.

Jedan doprinos ovom dijagramu je u slučaju kad je k_2 jako velik. Prostorno to znači da su x, y i z blizu dok je točka w dalje. Područje u kojem su x, y i z blizu se može razmotriti kao običnu korekciju vrha u točki x . Međutim,



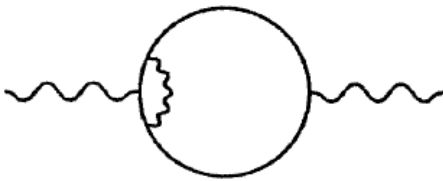
Slika 8: Prikaz tretiranja divergencije konačnog dijagrama s divergentnim poddijagramom. Preuzeto iz [4].



Slika 9: Jedan od dijagrama polarizacije vakuuma na nivou dvije petlje. Preuzeto iz [1].

korekcija vrha na nivou jedne petlje je logaritamski divergentna, odnosno ima divergenciju oblika $-ie\gamma^\mu \cdot \alpha \ln \Lambda^2$ za $\Lambda \rightarrow \infty$. Taj izraz se zatim umetne u ostatak dijagrama i integrira se po manjem impulsu koji je u ovom konkretnom slučaju k_1 . Takav dijagram bi izgledao kao na slici 10. i bio bi proporcionalan s

$$\sim \alpha (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \Pi_2(q^2) (\ln \Lambda^2 + \ln q^2) \cdot \alpha \ln \Lambda^2. \quad (78)$$



Slika 10: Jedan od dijagrama polarizacije vakuuma na nivou dvije petlje u slučaju kad je jedan impuls veći od drugog. Preuzeto iz [4].

Član $(\ln \Lambda)^2$ se pojavljuje kad su oba impulsa (i k_1 i k_2) veliki. Član $\ln q^2 \ln \Lambda^2$ se javlja kad je k_2 velik i k_1 malen. Drugi takav član bi se dobio kad je k_1 velik i k_2 malen. Tu se virtualni foton koji se izmjenjuje između y i z može uzeti kao korekcija vrha u w .

Na ovom primjeru se vidi kako je metoda prividne divergencije ograničena. Naime, pokazano je da divergentni članovi Feynmanovih dijagrama nisu uvijek jed-



(a) Kontračlanovi koji dokidaju nelokalne divergencije.



(b) Kontračlanovi koji dokidaju lokalne divergencije.

Slika 11: Kontračlanovi. Preuzeto iz [4].

nostavni polinomi u q^2 . Takve divergencije koje se javljaju uz funkcije koje nisu polinomi u q^2 ($\Pi_2(q^2) \ln \Lambda^2$) se zovu nelokalne divergencije. One divergencije koje stoje uz polinome u q^2 se nazivaju lokalne [4]. Ono što se vidi iz ove diskusije jest da nelokalne divergencije u fizikalnom smislu imaju značenje lokalnih divergencija okruženih s nedivergentnim procesima u QED. Nelokalne divergencije bi se trebale poništiti u računu s dijagramima s kontračlanovima prikazanim kao a) dio slike 11, dok b) dio na istoj slici pokazuje član kojim se rješavaju preostale lokalne divergencije.

Bogoliubov, Parasiuk, Hepp i Zimmermann (BPHZ teorem) su pokazali da se na taj način otklanjaju sve nelokalne divergencije, a preostale lokalne se otklanjaju kontračlanovima polinomijalnog oblika. Time se postiže konačnost sveukupnih amplituda. BPHZ teorem daje važnu tvrdnju: za svaku renormalizabilnu teoriju polja divergencije se uklanjaju za svaki red perturbacijskog računa vrhovima- kontračlanovima koji odgovaraju "prividno" divergentnim amplitudama. Dakle, svaka prividno divergentna teorija se može napraviti konačnom s konačnim skupom kontračlanova [1].

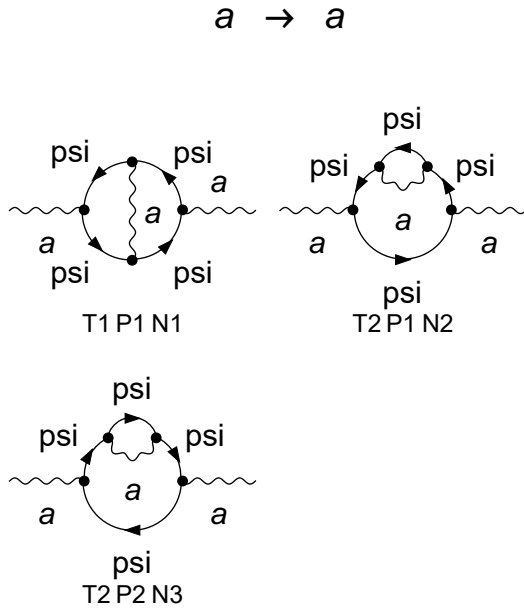
II.4. Radijativne korekcije za QED na nivou dvije petlje

Računi amplituda na dvije petlje su obavljani pomoću programskog sustava Wolfram Mathematica, odnosno pomoću paketa FeynArts, FeynCalc i TARCER.

II.4.1. Dijagrami vakuumske polarizacije

Na nivou dvije petlje se javljaju tri dijagrama vakuumske polarizacije dana na slici 12.

Ako se prouče drugi i treći dijagram na slici 12, može se pretpostaviti kako će doprinski njihovih amplituda u



Slika 12: Svi dijagrami vakuumske polarizacije na nivou dvije petlje. Dobiveno pomoću koda rađenog u sklopu seminara.

ukupnoj amplitudi biti jednaki. Ta tvrdnja je kompjuterskim računom dokazana kao točna. Prva amplituda se razlikuje od ostale dvije. Uzeta je suma doprinosa tri amplitude te se razvila (isto kao i u slučaju jedne petlje) do člana uz ϵ^{-1} te je dobiveno

$$\frac{ie^4 (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu})}{128\pi^4 \epsilon}. \quad (79)$$

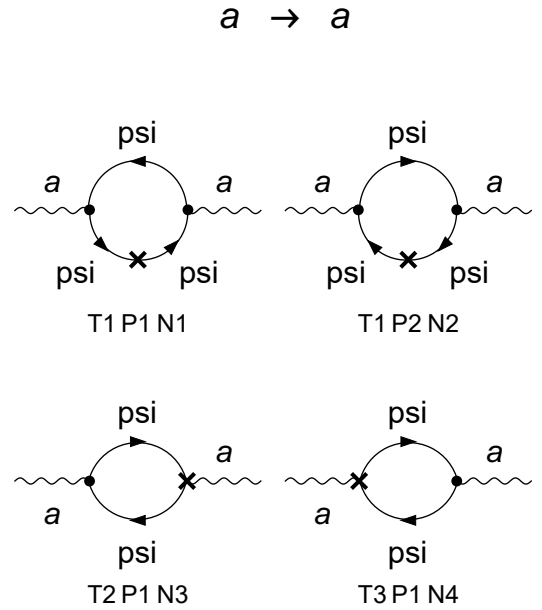
Taj rezultat je zanimljiv iz više razloga. Prvi je taj što se pojavila poželjna struktura $(k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu})$ što ukazuje na to da je zadovoljen Wardov identitet. Druga zanimljivost je ta da se nisu pojavili članovi koji sadrže logaritme - nelokalne divergencije. O tome je li to točan rezultat se više može zaključiti ako se pogledaju amplitude koje u sebi imaju kontračlanove. Njih je za slučaj vakuumske polarizacije na nivou 2 petlje četiri i prikazani su na slici 13.

Prvi i drugi, a zatim i treći i četvrti dijagram u sumi jednako dopriose, a nakon sumiranja te četiri amplitude se dobije 0. Ovakav rezultat sugerira da je dobiveni izraz (79) točan i da zbilja nema nelokalnih divergencija.

Još preostaje iščitati δZ_3^{2L} :

$$\delta Z_3^{2L} = -\frac{e^4}{128\pi^4} \frac{1}{\epsilon} \quad (80)$$

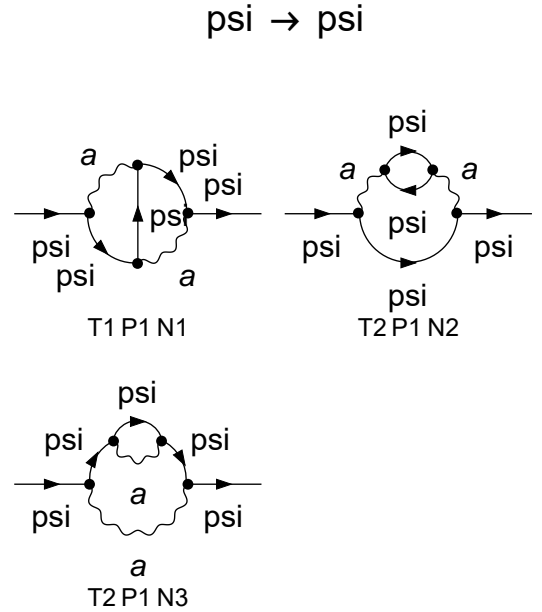
koji će se kasnije koristiti pri računu beta funkcije.



Slika 13: Svi dijagrami vakuumske polarizacije s kontračlanovima na nivou dvije petlje. Dobiveno pomoću koda rađenog u sklopu seminara.

II.4.2. Dijagrami vlastite energije elektrona

Na nivou dvije petlje se javljaju tri dijagrama vlastite energije elektrona koji su prikazani na slici 14.

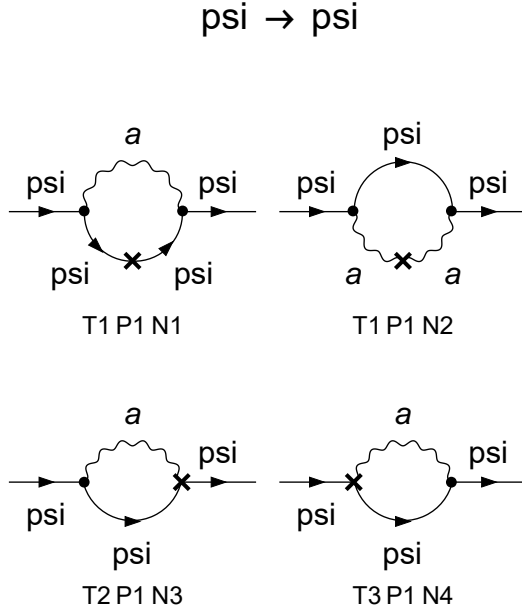


Slika 14: Svi dijagrami vlastite energije elektrona na nivou dvije petlje. Preuzeto iz koda rađenog u sklopu seminara.

Ponovno je napravljen račun za svaku amplitudu koje su zatim zbrojene. Gledani su članovi uz ϵ^{-1} i dobio se rezultat u kojem se pojavio član:

$$-\frac{ie^4 \log(-k^2)}{\pi^4 256\epsilon}. \quad (81)$$

Ako se unutar amplitude pojavi nelokalni član proporcionalan $\log(-k^2)$, to znači da očekujemo da suma amplituda s kontračlanovima u ovom slučaju neće iščezavati, već da će imati isti član proporcionalan logaritmu, do na predznak. Amplitude s kontračlanovima su dane na slici 15, a rezultat potvrđuje gornje predviđanje pa se nelokalni članovi dokidaju.



Slika 15: Svi dijagrami vlastite energije elektrona s kontračlanovima na nivou dvije petlje. Dobiveno pomoću koda rađenog u sklopu seminara.

Suma amplituda sa i bez kontračlanova daje

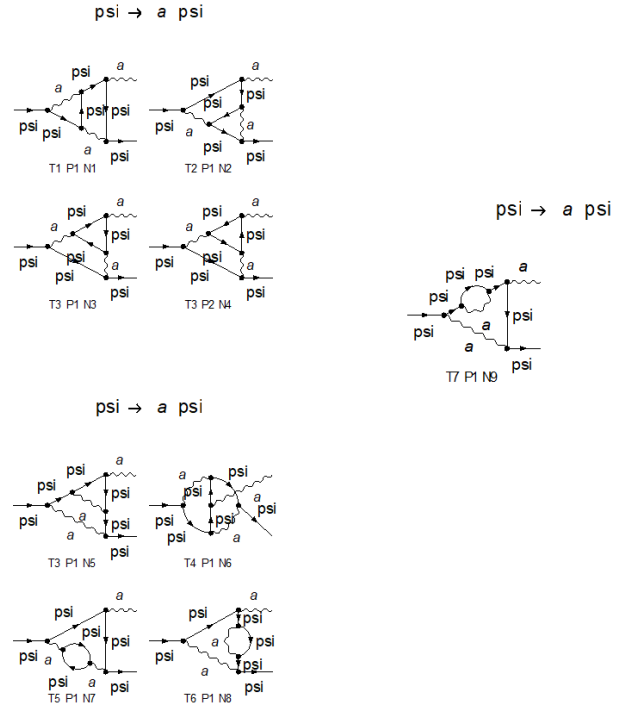
$$\frac{-7ie^4 k}{1024\pi^4\epsilon}, \quad (82)$$

iz čega se iščitava

$$\delta Z_2^{2L} = \frac{7e^4}{1024\pi^4} \frac{1}{\epsilon}. \quad (83)$$

II.4.3. Dijagrami korekcije vrha

Jednom kad se dobije izraz za δZ_2^{2L} , odmah se zna rezultat i za δZ_1^{2L} zato što Wardov identitet uvijek vrijedi tako da račun korekcija vrha ni nije potreban, no ipak je napravljen zbog kompletnosti i provjere. Amplitude su dane na slici 16 i ima ih 9. Međutim, pri računu ovih



Slika 16: Svi dijagrami korekcije vrha na nivou dvije petlje. Dobiveno pomoću koda rađenog u sklopu seminara.

amplituda su se javile komplikacije zbog ograničenosti programskog paketa. Morale su se napraviti neke pretpostavke koje pojednostavljuju problem tako da se rezultat ipak može računalno dobiti. Pretpostavka koja je odabrana je ta da se jedan od izlaznih impulsa izjednači s nulom. Račun s takvom pretpostavkom je proveden i u sumi amplituda se ponovno pojavio nelokalni član

$$\frac{12ie^5 \gamma^\mu \log(-k_1^2)}{3072\pi^4\epsilon}. \quad (84)$$

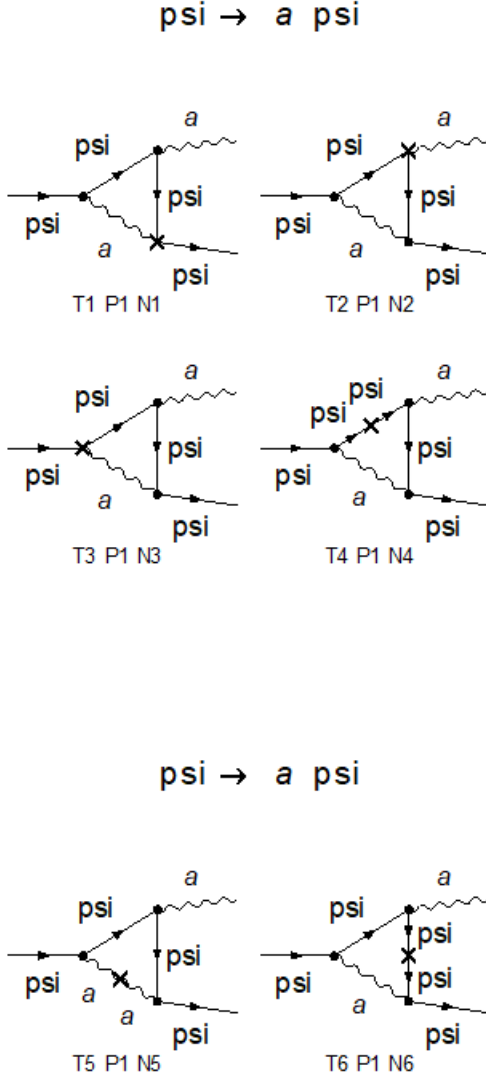
Račun za amplitude s kontračlanovima danim na slici 17. je ponovljen s istom pretpostavkom te su sume zbrojene što je dalo rezultat:

$$\frac{7ie^5 k}{1024\pi^4\epsilon}, \quad (85)$$

iz čega se iščitava

$$\delta Z_1^{2L} = \frac{7e^4}{1024\pi^4} \frac{1}{\epsilon}. \quad (86)$$

Rezultat dobiven za δZ_1^{2L} je isti kao δZ_2^{2L} što je u skladu s Wardovim identitetom. To je indikacija da je račun proveden za korekciju vrha na dvije petlje s uvedenim pretpostavkama koje olakšavaju račun, točan.



Slika 17: Svi dijagrami korekcije vrha s kontračlanovima na nivou dvije petlje. Dobiveno pomoću koda rađenog u sklopu seminara.

II.5. Renormalizacijske grupne jednačbe za QED na nivou dvije petlje

Korigira li se izraz (30) dimenzionalnom analizom u $D = 4 - 2\epsilon$ [5], dobije se

$$e = Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{1/2} e_B \mu^{-\epsilon}, \quad (87)$$

odnosno ako se primjeni Wardov identitet:

$$e = Z_3^{1/2} e_B \mu^{-\epsilon}. \quad (88)$$

Z_3 je izračunat na nivou dvije petlje i glasi

$$Z_3 = 1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \frac{1}{\epsilon} - \frac{e^4}{128\pi^4} \frac{1}{\epsilon}. \quad (89)$$

Uvrštavanjem u (88) se dobije

$$e_B \mu^{-\epsilon} = e \left(1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \frac{1}{\epsilon} - \frac{e^4}{128\pi^4} \frac{1}{\epsilon} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (90)$$

$$\approx e \left(1 + \frac{e^2}{24\pi^2} \frac{1}{\epsilon} + \frac{e^4}{256\pi^4} \frac{1}{\epsilon} \right).$$

Da bi se dobila beta funkcija, izraz (90) je potrebno derivirati po μ i pomnožiti s μ . Relacije koje će biti od koristi u tom računu su

$$\frac{d}{d\mu} = \frac{\partial}{\partial\mu} + \frac{\partial e}{\partial\mu} \frac{\partial}{\partial e}, \quad (91)$$

$$\mu \frac{de}{d\mu} = \beta - \epsilon e.$$

Derivacijom i množenjem s μ se dobiva

$$\beta = -\epsilon e \left(-\frac{2e^2}{24\pi^2} \frac{1}{\epsilon} - \frac{4e^4}{256\pi^4} \frac{1}{\epsilon} \right) \quad (92)$$

Konačno, izraz za beta funkciju za QED na nivou dvije petlje glasi

$$\beta = \frac{e^3}{12\pi^2} + \frac{e^5}{64\pi^2} \quad (93)$$

Dobiveni izraz se slaže s literaturom [3].

III. ZAKLJUČAK

Primjenom renormalizacijske perturbacijske teorije na primjeru kvantne elektrodinamike, uklonile su se divergencije koje se javljaju zbog velikog prijenosa impulsa (UV). Sve divergencije su se apsorbirale tako što su se redefinirale fizikalne veličine. Uvedena je klizna skala i na taj način su parametri teorije postali ovisni o energiji na kojoj se proces odvija što je od velike važnosti jer daje predviđanja za parametre na energijama višim od onih trenutno dostupnih eksperimentu. Promatrao se QED na jednoj i dvije petlje: računale su se amplitude dijagrama do reda ϵ^{-1} jer se prethodno zaključilo da samo ti članovi doprinose u renormalizacijskim grupnim jednačbama koje su također dobivene. Izračunata beta funkcija ide u beskonačnost za neku konačnu energiju. Za korekciju vrha na nivou jedne petlje su se zadržali svi članovi, a ne samo oni uz ϵ^{-1} jer se iz amplitude dobio odnos form faktora $F_2(q^2)$ i magnetskog momenta. Anomalni magnetski moment je zatim i izračunat, a od interesa je bila i usporedba teorijski i eksperimentalno dobivenih magnetskih momenata za određene ione [6]. Kod računa na dvije petlje su odstranjene sve nelokalne divergencije uvođenjem dijagrama s kontračlanovima.

IV. LITERATURA

- [1] Ilakovac, Amon: Relativistička kvantna fizika prema Peskin-Schroederu (skripta iz kolegija Teorija polja 1 i 2)
- [2] Mađor-Božinović, Marija: Renormalizacijska grupa (diplomski rad) <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:295963>
- [3] Weinberg, Steven: The Quantum Theory of Fields, Volume II, Modern Applications 1st ed., Cambridge University Press 1996
- [4] Peskin, Michael E. ; Schroeder, Daniel V.: An Introduction To Quantum Field Theory, Addison-Wesley 1995
- [5] Machacek, Marie E.; Vaughn, Michael T.: Two-loop Renormalization Group Equations in a General Quan-

tum Field Theory,(I). Wave Function Renormalization, Nucl. Phys. B 222(1983) 83-103

- [6] Sturm, Sven and Vogel, Manuel and Köhler-Langes, Florian and Quint, Wolfgang and Blaum, Klaus and Werth, G. (2017). High-Precision Measurements of the Bound Electron's Magnetic Moment. Atoms. 5. 4. 10.3390/atoms5010004.

V. ZAHVALE

Zahvaljujem svom mentoru- prof. dr. sc. Amonu Ilakovcu, magistri Mariji Mađor-Božinović i dr. sc. Hermesu Belusci na volji, vremenu, savjetima i pomoći s kodom.