

Ergopodručja u općoj teoriji relativnosti

Ana Bokulić

Mentor: doc. dr. sc. Ivica Smolić

Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu

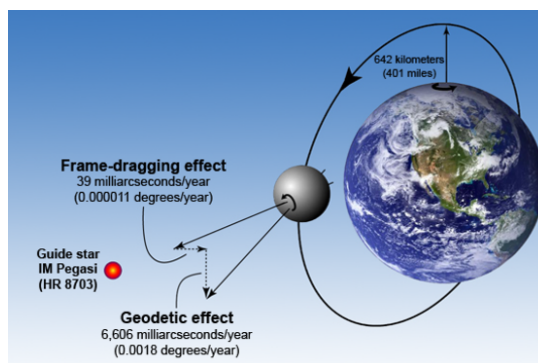
19. siječnja 2019.

Rotiranje lokalnih inercijalnih sustava, poznato kao Lense-Thirringov efekt, jedno je od predviđanja opće teorije relativnosti. Posljedica je rotacije masivnog objekta koja uzrokuje povlačenje okolnog prostorvremena. Efekt se opaža i kod Zemlje te je eksperimentalno provjeren sondom Gravity Probe B. Posebno je izražen u slučaju rotirajućih crnih rupa gdje se manifestira pojavom ergopodručja, dijela prostorvremena u kojem svi promatrači moraju rotirati zajedno s crnom rupom. U ovom je seminaru napravljen pregled prostorvremena u kojima može postojati ergopodručje te su analizirana geometrijska i fizikalna svojstva ergopodručja.

1 Uvod

U Newtonovoj teoriji prostor je opisan kao fiksna struktura u smislu da prisutna materija ni na koji način ne utječe na njega. Einsteinova opća teorija relativnosti prikazuje drugačiju sliku, po kojoj materija deformira okolno prostorvrijeme. Masivni objekti tako zakrivljuju prostorvrijeme oko sebe, dok rotirajući objekti za sobom povlače prostorvrijeme. Oba se efekta uočavaju kod Zemlje, a dovoljno osjetljivim instrumentom ih je moguće i izmjeriti. Cilj Gravity Probe B eksperimenta bio je provjeriti slaganje izmjerenih vrijednosti s teorijskim predviđanjima opće teorije relativnosti. Sonda Gravity Probe B sastoji se od četiri žiroskopa koji kruže oko Zemlje na visini od 642 km. Zbog gibanja u zakrivljenom prostorvremenu žiroskop precesira u ravnini orbite satelita, što se naziva geodetskim efektom. Lense-Thirringov efekt

rezultat je Zemljine rotacije, a očituje se kao precesija u ravnini okomitoj na orbitu sonde.



Slika 1: Shematski prikaz orbite satelita Gravity Probe B i precesija uzrokovanih relativističkim efektima, preuzeto iz [1]

Usporedbom eksperimentalnih i teorijskih vrijednosti navedenih u tablici 1, zaključujemo da je opća teorija relativnosti uspješno prošla još jedan test.

	Izmjereno	Teorijski
Geodetska precesija	6602±18	6606
Lense-Thirringova precesija	37.2±7.2	39.2

Tablica 1: Izmjerene i izračunate vrijednosti precesija izražene u tisućinkama lučnih sekunda (eng. mas) po godini, preuzeto iz [1]

Ekstreman oblik Lense-Thirringovog efekta javlja se u ergopodručjima. Jednom kada se nađe u njemu, niti jedan objekt ne može ostati stacionaran u odnosu na vrlo udaljenog promatrača. No, objekti nisu zarobljeni u ergopodručju pa zbog toga postoji mogućnost ekstrakcije rotacijske energije crne rupe. Prije opisa geometrija ergopodručja i mehanizama dobivanja energije, u nastavku je dana precizna definicija ergopodručja te su objašnjene fizikalne posljedice takve definicije.

2 Osnovna svojstva ergopodručja

Definicija 1. (Ergopodručje)

Neka je (M, g_{ab}) stacionarno, asimptotski ravno prostorvrijeme i k^a Killingovo vektorsko polje koje je vremenskog tipa u otvorenoj podmnogostrukosti $O \in M$. Otvorena podmnogostrukost $\mathcal{E} \in M$ naziva se ergopodručjem ako su zadovoljeni sljedeći uvjeti ([2]):

- k^a je prostornog tipa u \mathcal{E} ,
- $\partial\mathcal{E} \cap \partial O \neq \emptyset$,
- $I^+(\mathcal{I}^-) \cap I^-(\mathcal{I}^+) \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$.

Činjenica da u ergopodručju ne postoji stacionaran promatrač proizlazi iz prvog uvjeta. Uvjet normalizacije četverovektora brzine takvog promatrača $(u^t)^2 g_{tt} = -1$

nije kompatibilan s $k^a k_a = g_{tt} > 0$, što vrijedi u ergopodručju. Drugi uvjet garantira postojanje statičke granice na kojoj je $g_{tt} = 0$. Takav vanjski rub $\partial\mathcal{E} \cap \partial O$ naziva se ergoplohom te razdvaja ergopodručje i ostatak prostorvremena izvan crne rupe. Treći uvjet znači da čestice koje dolaze iz daljine mogu ući u ergopodručje te da čestice koje ga napuštaju mogu doći do asimptotskog područja.

Teorem 1. (Carter-Vishveshwara)

Neka je K^a Killingovo vektorsko polje i $S[K]$ hiperploha takva da vrijedi:

$$N = (K|K) \stackrel{S}{=} 0 \quad i \quad dN \stackrel{S}{\neq} 0$$

Tada je $S[K]$ hiperploha svjetlosnog tipa ako i samo ako je Killingovo vektorsko polje ortogonalno na hiperplohu $S[K]$. Posljedica je ta da se u statičnom prostorvremenu ergoploha podudara s Killingovim horizontom.

Dokaz: Iz identiteta (38) i (39) slijedi:

$$(dN|dN) \stackrel{S}{=} (\omega|\omega) \quad i \quad (dN|\omega) \stackrel{S}{=} 0$$

Ako je Killingovo vektorsko polje ortogonalno na $S[K]$, tada je po Frobeniusovom teoremu $\omega \stackrel{S}{=} 0$ i samim time i $(dN|dN) \stackrel{S}{=} 0$. Budući da vrijedi $dN \stackrel{S}{\neq} 0$, dN mora biti proporcionalan normalni na $S[K]$, koja je u tom slučaju svjetlosnog tipa.

Ako polazimo od pretpostavke da je $S[K]$ svjetlosnog tipa i nedegenerirana ($dN \stackrel{S}{\neq} 0$), tada je $(dN|dN) \stackrel{S}{=} 0$. Dakle, K^a i $(dN)^a$ svjetlosnog su tipa na $S[K]$ i međusobno ortogonalni jer uvijek vrijedi $(K|dN) = \mathcal{L}_K N = 0$. Zbog toga su proporcionalni, $K \stackrel{S}{=} \rho dN$, gdje je ρ neka funkcija. Odnosno, K^a proporcionalan je normalni na $S[K]$ pa je ortogonalan na tu hiperplohu. Iz

toga slijedi i $dN \wedge dK \stackrel{S}{=} dN \wedge d(\rho dN) = 0$, pa i $\omega \stackrel{S}{=} 0$.

3 Ergopodručja u prostorvremenima

Slijedi sistematičan pregled rješenja Einsteinove jednadžbe koja sadrže ergopodručje. Najvažniji su primjeri u kategoriji vakuumskih rješenja prostorvremena koja opisuju različite vrste rotirajućih crnih rupa. Kategoriji nevakuumskih rješenja pripadaju crvotočine, a razmatra se i mogućnost postojanja ergopodručja kod rotirajućih zvezda.

3.1 Vakuumska rješenja

Kerrovo rješenje

Kerrovo rješenje odgovara osnosimetričnim, rotirajućim i nenabijenim crnim rupama. Metrika u Boyer-Lindquist koordinatama (t, r, θ, ϕ) glasi ([3]):

$$ds^2 = -dt^2 \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) - \frac{4Mr a \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi + \left(r^2 + a^2 - \frac{2Mr a^2}{\rho^2} \sin^2 \theta\right) d\phi^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2, \quad (1)$$

gdje je $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$, $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$, M je masa, a $a = J/m$ angularni moment po jedinici mase. Slučaj u kojem je $M^2 < a^2$ nije fizikaln jer se u takvom prostorvremenu pojavljuje goli singularitet, pa se stoga postavlja ograničenje $M^2 \geq a^2$. Članovi metričke singularni su kada je $\rho = 0$, što se događa za $r = 0$ i $\theta = \pi/2$. Priroda tog singulariteta vidi se prelaskom na nove

koordinate koje pokazuju da je riječ o prstenastom singularitetu. Također, potencijalno je problematičan i radijus određen jednadžbom $\Delta = 0$, no riječ je o koordinatnom singularitetu. Hiperplohe

$$r = r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2} \quad (2)$$

za koje je $\Delta = 0$ predstavljaju Killingove horizonte Killingovih vektorskih polja ($k = \frac{\partial}{\partial t}$ i $m = \frac{\partial}{\partial \phi}$):

$$\xi_{\pm} = k + \left(\frac{a}{r_{\pm}^2 + a^2}\right)m. \quad (3)$$

Navedene hiperplohe r_+ i r_- još se nazivaju i vanjskim i unutrašnjim horizontom. Područje $r < r_+$ definira unutrašnjost crne rupe budući da je r_+ horizont događaja. Veličina Ω_H predstavlja angularnu brzinu crne rupe:

$$\Omega_H = \left(\frac{a}{r_+^2 + a^2}\right). \quad (4)$$

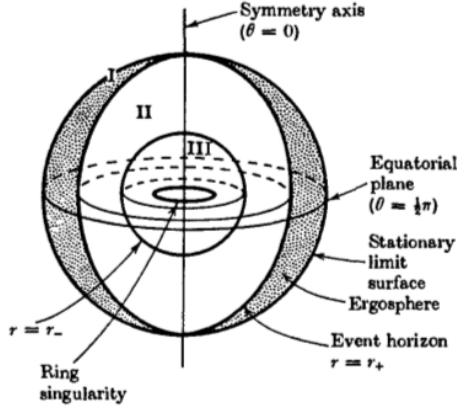
Ergoploha se pronalazi iz zahtjeva $k^2 = g_{tt} = 0$:

$$k^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) = 0. \quad (5)$$

Gornja jednadžba ima dva rješenja, no od interesa je samo ono koje se nalazi izvan horizonta događaja:

$$r_+^E(\theta) = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (6)$$

Ergoploha dotiče horizont kada je $\theta = 0, \pi$, a za sve ostale vrijednosti koordinate θ nalazi se izvan horizonta. Ergopodručje se nalazi u granicama $r_+ < r < r_+^E(\theta)$. U limesu $a \rightarrow 0$ dobivamo statično Schwarzschildovo rješenje pa se ergoploha poklapa s horizontom.



Slika 2: Struktura Kerrovog prostora. Preuzeto iz [3]

Kerr-Newmanovo rješenje

Kerr-Newmanovo rješenje koje opisuje osnosimetričnu, rotirajuću i nabijenu crnu rupu čija je masa M , naboj Q i angularni moment J generalizacija je prethodno opisanog Kerrovog rješenja. U odnosu na Kerrovu metriku, Kerr-Newmanova je metrika složenija jer se pojavljuje dodatni parametar koji odgovara naboju ([4]):

$$\begin{aligned}
ds^2 = & -dt^2 \frac{(\Delta - a^2 \sin^2 \theta)}{\rho^2} \\
& - 2a \sin^2 \theta \frac{r^2 + a^2 - \Delta}{\rho^2} dt d\phi \\
& + \frac{(r^2 + a^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta)}{\rho^2} \sin^2 \theta d\phi^2 \\
& + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2,
\end{aligned} \tag{7}$$

gdje su ρ i a definirani su jednako kao i u Kerrovom rješenju, a $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2$. Unutrašnji i vanjski horizont ponovno se pronalaze kao rješenja jednadžbe $\Delta = 0$ te se kao rezultat dobivaju hiperplohe

$$r = r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}. \tag{8}$$

Analiza ergopodručja provodi se analogno kao i u slučaju Kerrovog rješenja te vrijede isti zaključci, razlika se javlja samo u izrazu za ergoplohu koja je sada definirana s:

$$r_+^E(\theta) = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta - Q^2}. \tag{9}$$

Kerr-Newman-NUT i Kerr-NUT rješenja

Crne rupe Kerr-Newmanove familije asimptotski su ravna rješenja Einstein-Maxwellovih jednadžbi. Ali ako od prostora ne zahtijevamo da bude asimptotski ravno, uz postojeće je parametre (M, J, Q) opisano jednim dodatnim, tzv. NUT nabojem l . Fizikalno, u rotirajućem prostoru on odgovara gravitomagnetskom naboju. Metrika je dana s ([5]):

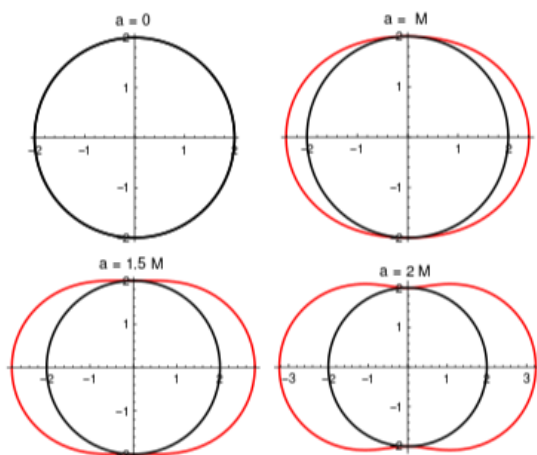
$$\begin{aligned}
ds^2 = & -\frac{\Delta}{\rho^2} (dt - P d\phi)^2 \\
& + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} ((r^2 + a^2 + l^2) d\phi - a dt)^2 \\
& + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} dr^2 + \rho^2 d\theta^2,
\end{aligned} \tag{10}$$

gdje je $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2 - l^2$, $P = a \sin^2 \theta - 2l \cos \theta$, $\rho^2 = r^2 + (l + a \cos \theta)^2$. Za $l = 0$ dobiva se Kerr-Newmanovo, a za $Q = 0$ Kerr-NUT rješenje. Koordinate ergoplohe su:

$$r = M + \sqrt{M^2 + l^2 - Q^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \tag{11}$$

Singularitet je ponovno prstenasti, pronalazi se iz uvjeta $\rho^2 = 0$, iz kojeg slijedi $r = 0$ i $\cos \theta = -l/a$. Posebno je zanimljiv jedan specijalan slučaj ove metrike. Ako naboj Q izaberemo tako da vrijedi $Q^2 = l^2 - a^2$ (što nužno povlači $l \geq a$), horizont odgovara radijusu $r = 2M$ kao i u Schwarzschildovom rješenju, iako je crna rupa rotirajuća i posjeduje NUT i električni naboj. Za $l > a$ ne postoji singularitet budući da jednadžba $\cos \theta = -l/a$ nema rješenje u tom

slučaju. Ergopodručje se nalazi u granicama $2M \leq r \leq M + \sqrt{M^2 + a^2 \sin^2 \theta}$. Porastom angularnog momenta raste veličina ergopodručja. Kada je $a = 0$ nema ergopodručja, već se ergoploha poklapa s horizontom.



Slika 3: Prikazano je kako se mijenja veličina ergopodručja u ovisnosti o parametru a , crnom je bojom označen horizont, a crvenom ergopodručje. Preuzeto iz [5]

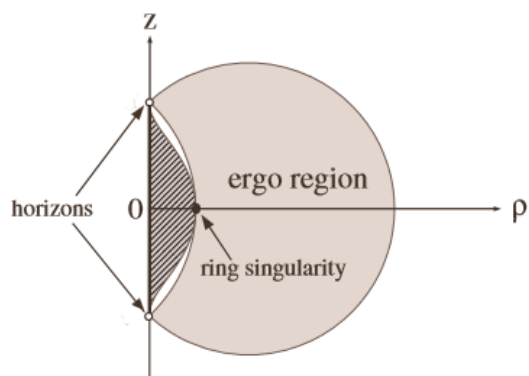
Tomimatsu-Sato rješenje

Tomimatsu-Sato rješenje osnosimetrično je i asimptotski ravno prostorvrijeme. Metrika je algebarski složena ([6]):

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & B\rho^{-4}(x^2 - y^2)^{-4}(dz^2 + d\rho^2) \\
 & - AB^{-1}(dt - 2mqA^{-1}C(1 - y^2)d\phi)^2 \\
 & + \rho^2 BA^{-1}d\phi^2,
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

gdje su A , B i C polinomi u sferoidnim koordinatama x i y , $\rho = \frac{1}{4}m^2p^2(x^2 - 1)(1 - y^2)$, $z^2 = \frac{1}{4}m^2p^2x^2y^2$, $p^2 + q^2 = 1$. Zbog svojih svojstava nije od astrofizikalnog značaja. Kao i Kerrovo rješenje, sadrži prstenasti singularitet za $B(x, y = 0) = 0$. Budući

da ne postoji horizont događaja, nego samo dva odvojena Killingova horizonta, taj je singularitet goli. Osim toga, i kauzalnost je narušena. Naime, da bi prostorvrijeme bilo asimptotski ravno, ϕ se mora interpretirati kao angularna koordinata, a kada je $g_{\phi\phi} < 0$ pojavljuju se zatvorene vremenske krivulje. Ergoploha je određena jednadžbom $x^2 = 1 + \lambda^2(1 - y^2)$, gdje je λ rješenje $p^2\lambda^4 + q^2 - 4pq\lambda(\lambda^2 + 1) = 0$. Singularitet dotiče ergoplohu.



Slika 4: Struktura Tomimatsu-Sato rješenja; označeni su ergopodručje, Killingovi horizonti, singularitet i područje u kojem postoje zatvorene vremenske krivulje (iscrtano). Preuzeto iz [7].

3.2 Nevakuumska rješenja

Rotirajuće zvijezde

U teoriji, oko vrlo kompaktnih rotirajućih zvijezda može postojati ergopodručje. Promatramo aproksimaciju u kojoj zvijezda sporo rotira angularnom brzinom Ω jer bi u protivnom preveliki angularni moment uzrokovao gubitak mase s ekvatora. Spora rotacija zahtijeva uvođenje korekcija u komponentama metrike nerotirajuće zvijezde. Zanima nas član g_{tt} :

$$g_{tt} = -e^{2\Phi(r)}(1 + h(r, \theta)) + \omega^2 r^2 \sin^2 \theta. \quad (13)$$

Druga aproksimacija dodatno pojednostavljuje izraz. Za vrlo kompaktne zvijezde vrijedi $e^{2\Phi(r)} \ll 1$, a $h(r, \theta)$ istog je reda veličine kao i $\omega^2 r^2$. Stoga se u izrazu (13) može zanemariti $h(r, \theta)$ i ergoploha se dobiva za:

$$0 = -e^{2\Phi(r)} + \omega^2 r^2 \sin^2 \theta. \quad (14)$$

Topološki, ergopodručje je torus čiji rubovi u ekvatorijalnoj ravnini zadovoljavaju $r\omega(r) = e^{2\Phi(r)}$. Dva različita modela materije zvijezde pokazuju da realistične rotirajuće zvijezde nemaju ergopodručje jer bi takva rješenja bila nestabilna ([8]).

Rotirajuće crvotočine

Primjer rješenja od teorijskog interesa su crvotočine - hipotetski prečaci koji bi omogućili putovanje između dviju udaljenih točaka prostorvremena. Suprotno uobičajenoj praksi, prilikom određivanja metrike crvotočine prvo se zadaju fizikalni uvjeti koje ona mora zadovoljavati, a potom se iz Einsteinove jednadžbe odredi pripadna materija. Promatrano prostorvrijeme mora biti stacionarno i osnosimetrično. Najopćenitiji oblik takvog prostorvremena u sfernim koordinatama je:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + e^\mu dr^2 + r^2 K^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta (d\phi - \omega dt)^2), \quad (15)$$

gdje N , K , μ , ω ovise samo o r i θ . $K(r, \theta)$ određuje radijalnu udaljenost R od ishodišta $R(r, \theta) = rK(r, \theta)$, a za μ se bira

$$\mu(t, \theta) = -\ln\left(1 - \frac{b(r, \theta)}{r}\right).$$

”Grlom” crvotočine nazivamo $r = b$ te kako ono ne bi bilo singularno, mora vrijediti $\partial b / \partial \theta = 0$ za $r = b$. Taj se zahtjev dobiva iz skalarne zakrivljenosti jer je ona proporcionalna $(\partial b / \partial \theta)(r - b)^{-2}$ ([9]). Da bi ovako zadana geometrija odgovarala izgledu crvotočine, mora vrijediti i $\partial b / \partial r < 1$, što je uvjet dobiven uranjanjem plohe konstantnih t i θ u prostor više dimenzije ([9]). Ako je

$$\omega = \frac{2a}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^4}\right),$$

a odgovara angularnom momentu. Metrika mora biti nesingularna na osi rotacije ($\theta = 0, \pi$), što znači da derivacije N , K , μ , ω po θ moraju iščezavati na osi. Također, prostorvrijeme mora biti asimptotski ravno pa za $r \rightarrow \infty$ zahtijevamo

$$N \rightarrow 1, b/r \rightarrow 0, K \rightarrow 1, \omega \rightarrow 0.$$

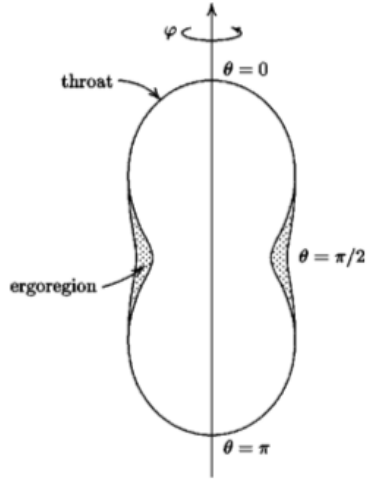
Uzevši u obzir sve uvjete, metrika stacionarne osnosimetrične crvotočine je oblika:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 K^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta (d\phi - \omega dt)^2). \quad (16)$$

Odgovarajući tenzor energije i impulsa nužno narušava energijske uvjete u području grla jer ono po definiciji defokusira svjetlosne zrake. Može se pokazati ([9]) kako u ovom slučaju za klasu vektora svjetlosnog tipa v^a ne vrijedi energijski uvjet $R_{ab} v^a v^b \geq 0$. Gustoća energije takve materije negativna je te se stoga naziva egzotičnom. Da bismo dobili konkretan primjer crvotočine, biramo:

$$N = K = 1 + \frac{(4a \cos \theta)^2}{r}, \quad \omega = \frac{2a}{r^3}, \quad b = 1.$$

Ergopodručje se pojavljuje ako je rotacija dovoljno brza da komponenta g_{tt} postane pozitivna. U ovom se primjeru to događa za $r^2 = |2a \sin \theta| > 1$, tj. za $|a| > 1/2$. Ergopodručje ne okružuje grlo u potpunosti, već samo oko ekvatora.



Slika 5: Shematski prikaz poprečnog presjeka grla crvotočine, ergopodručje je osjenčani dio. Preuzeto iz [9].

4 Ekstrakcija energije

4.1 Penroseov proces

Penroseov proces najjednostavniji je mehanizam ekstrakcije energije iz rotirajuće crne rupe koji je direktna posljedica svojstava ergopodručja. Za česticu u stacionarnom prostorvremenu sačuvana je veličina energija:

$$E = -p^\mu k_\mu, \quad (17)$$

gdje je k^μ Killingovo vektorsko polje koje predstavlja translaciju u vremenu, a p^μ 4-impuls čestice koji je vremenskog ili svjetlosnog tipa te buduće usmjeren. Budući da je unutar ergopodručja vektor k^μ prostornog tipa, energija može biti negativna. Promatramo česticu impulsa p_0^μ koja upada u ergopodručje te se tamo raspada u par čestica čiji su impulsi p_1^μ i p_2^μ te pritom vrijedi zakon očuvanja impulsa, $p_0^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$.

Neka je energija čestice 2 negativna,

$$E_2 = -p_2^\mu k_\mu < 0 \quad (18)$$

Tada je energija čestice 1 veća od energije početne čestice

$$E_1 = -p_1^\mu k_\mu = E_0 - E_2 > E_0 \quad (19)$$

Čestica je dobila dodatnu energiju na račun rotacijske energije crne rupe te može pobjeći u beskonačnost jer se ergopodručje nalazi izvan horizonta. Čestice negativne energije mogu pobjeći iz ergopodručja jedino tako da prođu horizont crne rupe.

Efikasnost Penroseovog procesa

Penroseovim procesom može se dobiti ograničena količina energije. Čestice negativne energije imaju i negativan angularni moment ([12]), odnosno suprotan onome crne rupe. To će rezultirati smanjivanjem angularnog momenta crne rupe sve dok ona ne postane statična. Tada više ne postoji ergopodručje pa daljnji dobitak u energiji nije moguć. Za kvantifikaciju efekta uvodi se nova veličina, ireducibilna masa M_{irr} ([10], poglavlje 12.4.):

$$M_{irr}^2 = \frac{1}{2}(M^2 + \sqrt{M^4 + J^2}). \quad (20)$$

Masa crne rupe ne može postati manja od ireducibilne mase, što je vidljivo invertiranjem gornjeg izraza:

$$M^2 = M_{irr}^2 + \frac{J^2}{4M_{irr}^2} \geq M_{irr}^2 \quad (21)$$

Neka su M_0 i J_0 početna masa i početni angularni moment crne rupe. Dobivenu energiju $\Delta E = \Delta M = M_0 - M_{irr}(M_0, J_0)$ možemo interpretirati kao rotacijsku energiju crne rupe. Najveća je za ekstremalnu

crnu rupu ($J_0^2 = M_0^4$) te iznosi oko 29% njezine energije:

$$\Delta M_{max} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)M_0 \approx 0.29M_0 \quad (22)$$

Ovaj je rezultat konzistentan s 2. zakonom termodinamike crnih rupa po kojem se površina horizonta ne smanjuje, $\delta A_H \geq 0$, ukoliko vrijedi slabi energijski uvjet. Površina horizonta Kerrove crne rupe A i kvadrat ireducibilne mase razlikuju se samo za numerički faktor: $A = 16\pi M_{irr}^2$. Killin-govo vektorsko polje ξ_+ definirano izrazom (3) svjetlosnog je tipa i buduće usmjereno na horizontu pa vrijedi

$$0 \geq \xi^a p_a = -E + \Omega^H L. \quad (23)$$

Nakon apsorpcije čestice, promjena mase crne rupe je $\delta M = E$, a angularnog momenta $\delta J = L$ Uvjet (23) daje $\delta M \geq \Omega^H \delta J$, što se može zapisati i kao $\delta M_{irr} > 0$.

4.2 "Superradiance"

Osim Penroseovog procesa, kod rotirajućih crnih rupa uočava se analogni efekt u slučaju valova. Naime, pod određenim uvjetima amplituda vala reflektiranog od horizonta veća je od amplitude upadnog vala. Dodatna energija vala potječe od rotacijske energije crne rupe. Interakcija skalarnih, elektromagnetskih, gravitacijskih i spin-1/2 polja s crnom rupom opisana je Teukolskyjevom jednadžbom ([11], Appendix G). Konkretno, u slučaju Kerrove crne rupe, problem se svodi na rješavanje radijalne jednadžbe. Uz uvođenje nove koordinate definirane na sljedeći način:

$$\frac{d}{dr_*} = \frac{\Delta}{r^2 + a^2} \frac{d}{dr}, \quad (24)$$

i nove varijable:

$$\chi = (r^2 + a^2)^{1/2} \Delta^{s/2} R, \quad (25)$$

radijalna jednadžba poprima oblik:

$$\frac{d_s^2 \chi_{lm}}{dr_*^2} + {}_s V_{lm} \chi_{lm} = 0. \quad (26)$$

${}_s V_{lm}$ je kompleksni efektivni potencijal definiran kao

$${}_s V_{lm} = \frac{K^2 - 2is(r-M)K}{(r^2 + a^2)^2} + \frac{\Delta(4ir\omega s - \lambda)}{(r^2 + a^2)^2} - G^2 - \frac{dG}{dr_*} \quad (27)$$

gdje je $G = \frac{s(r-M)}{r^2 + a^2} + \frac{r\Delta}{(r^2 + a^2)^2}$,

$K = (r^2 + a^2)\omega - am$, a

$\lambda = E - 2am\omega + a^2\omega^2 - s(s+1)$.

E je separacijska konstanta koja se za male $a\omega$ može razviti u red čiji je vodeći član $l(l+1)$.

Iz asimptotskog ponašanja jednadžbe (25), slijede rješenja oblika:

$$\chi \sim r^{\mp s} e^{\pm i\omega r_*} \text{ za } r \rightarrow \infty \quad (28)$$

$$\chi \sim \Delta^{\pm s/2} e^{\pm i\bar{\omega} r_*} \text{ za } r \rightarrow r_+ \quad (29)$$

gdje je $\bar{\omega} = \omega - m\Omega_H$, a $\Omega_H = a/(2Mr_+)$ angularna brzina crne rupe. Postoje četiri nezavisna skupa rješenja koji se razlikuju po rubnim uvjetima ([11], poglavlje 4.2.2.). Konkretno, promotrimo slučaj skalarnog polja, $s = 0$. Asimptotska rješenja radijalne jednadžbe su:

$$\chi \sim \begin{cases} e^{-i\bar{\omega} r_*} \text{ za } r \rightarrow r_+, \\ A_{out}(\omega)e^{i\omega r_*} + A_{in}(\omega)e^{i\omega r_*} \text{ za } r \rightarrow \infty \end{cases} \quad (30)$$

Zbog simetrije potencijala (${}_s \bar{V}_{lm} = -{}_s V_{lm}$), drugo je rješenje kompleksno konjugirana funkcija. Budući da je Wronskijan dvaju linearno nezavisnih rješenja konstantan, dobiva se izraz koji povezuje koeficijente refleksije ($R = A_{out}/A_{in}$) i transmisije ($T = 1/A_{in}$):

$$\left(1 - \frac{m\Omega_H}{\omega}\right)|T|^2 = 1 - |R|^2. \quad (31)$$

Amplituda reflektiranog vala bit će veća od amplitude upadnog vala kada je $R > 1$, što se postiže za frekvencije u rasponu:

$$0 < \omega < m\Omega_H. \quad (32)$$

Do istog se rezultata može doći i pozivajući se na teorem o površini, $\delta A_H \geq 0$. Prvi zakon termodinamike crnih rupa povezuje promjene mase, površine i angularnog momenta crne rupe:

$$\delta M = \frac{k}{8\pi} \delta A_H + \Omega_H \delta J \quad (33)$$

Za skalarno polje frekvencije ω i azimutalnog broja m u stacionarnom osnosimetričnom prostorvremenu postoji veza toka angularnog momenta \mathcal{L} i toka energije \mathcal{E} : $\mathcal{L}/\mathcal{E} = m/\omega$. Po zakonu očuvanja energije i angularnog momenta, omjer promjene angularnog momenta δJ i energije δM crne rupe je $\delta J/\delta M = m/\omega$. Uvrštavanjem u (33) dobiva se:

$$\delta M = \frac{\omega k}{8\pi} \frac{\delta A_H}{\omega - \Omega_H m}, \quad (34)$$

odnosno, $\delta M < 0$ znači dobitak energije te on postoji kada je $\omega < \Omega_H m$.

5 Zaključak

Motivirani Lense-Thirringovim efektom prouzročenim Zemljinom rotacijom, promatrali smo situaciju u kojoj je on dovoljno snažan da drastično utječe na prostorvrijeme. U tom slučaju postoji ergopodručje unutar kojeg su svi objekti prisiljeni rotirati u istom smjeru kao i tijelo koje uzrokuje efekt. Pojam ergopodručja najčešće se veže uz rotirajuće crne rupe, ali utvrđeno je da ono može postojati i u drugačijim vrstama nestatičnih prostorvremena. Neka od njih zanimljiva su isključivo s teorijskog

stanovišta. Primjerice, nije sigurno mogu li crvotočine uopće postojati, a masivne zvijezde okružene ergopodručjem ne bi bile stabilne.

Korištenje crne rupe kao izvora energije putem Penroseovog procesa i "superradiance" efekta još je jedna posebnost rotirajućih crnih rupa. Nakon opisa navedenih mehanizama, njihova je općenitost potvrđena time što slijede iz drugog zakona termodinamike crnih rupa.

6 Dodatak

6.1 Killingovi vektori i Killingovi horizonti ([13])

Definicija 2. (Killingovo vektorsko polje)

Vektorsko polje K^a nazvamo Killingovim ako zadovoljava Killingovu jednadžbu:

$$\mathcal{L}_K g_{ab} = \nabla_a K_b + \nabla_b K_a = 0. \quad (35)$$

Propozicija 1.

Neka je K^a Killingovo vektorsko polje i γ geodezik s tangentnim vektorom u^a . Tada je veličina $K_a u^a$ konstantna duž γ .

Dokaz:

$$u^b \nabla_b (K_a u^a) = u^b u^a \nabla_b K_a + K_a u^b \nabla_b u^a = 0 \quad (36)$$

Prvi član iščezava zato što je simetrični tenzor kontrahiran s antisimetričnim, a drugi zbog geodetske jednadžbe.

Killingovi vektori generatori su simetrija prostorvremena, a uz svaku simetriju vezana je očuvana veličina. U stacionarnom prostorvremenu sačuvana je veličina $e = -k^a u_a$ koja se za čestice s masom

interpretira kao ukupna energija po jedinici mase, a za bezmasene je ukupna energija $E = \hbar e$. Pripadni Killingov vektor $k = \partial/\partial t$ generator je vremenske translacije. U osnosimetričnom prostorvremenu sačuvana je veličina $l = m^a u_a$, koja je na analogan način povezana s angularnim momentom čestice. Killingovo vektorsko polje $m = \partial/\partial \phi$ generira rotacije.

Pomoću Killingovih vektora možemo definirati veličinu ω :

$$\omega = - * (K \wedge dK), \quad \omega_a = \epsilon_{abcd} K^b \nabla^c K^d, \quad (37)$$

koja zadovoljava sljedeće relacije relevantne prilikom dokazivanja teorema 2.:

$$N(dK|dK) = (dN|dN) - (\omega|\omega) \quad (38)$$

$$N\delta\omega = 2(\omega|dN) \quad (39)$$

Definicija 3. (Frobeniusov teorem u statičnom prostorvremenu)

U statičnom prostorvremenu Killingovo vektorsko polje k^a svugdje je ortogonalno na familiju hiperploha pa tada Frobeniusov teorem glasi $k \wedge dk = 0$, odnosno, $\omega = 0$.

Definicija 4. (Killingov horizont)

Hiperplohu svjetlosnog tipa na koju je Killingovo vektorsko polje ortogonalno nazivamo Killingovim horizontom. (Napomena: vektorsko polje koje je normala na hiperplohu svjetlosnog tipa ujedno je i tangentno na nju.)

6.2 Energijski uvjeti

Kriterije koje tenzor energije i impulsa T_{ab} mora zadovoljiti kako bi opisivao fizikalno realističnu materiju nazivamo energijskim uvjetima.

Prema slabom energijskom uvjetu, gustoća

energije $T_{ab}v^a v^b$ koju mjeri bilo koji promatrač čiji je četverovektor brzine v^a mora biti nenegativna:

$$T_{ab}v^a v^b \geq 0, \quad (40)$$

za svaki vremenski vektor v^a . Privlačnost gravitacije manifestira se kroz jaki energijski uvjet:

$$(T_{ab} - \frac{1}{2}Tg_{ab})v^a v^b \geq 0, \quad (41)$$

za svaki vektor v^a vremenskog tipa. Korisniji oblik ovog teorema dobiva se iz Einsteinove jednadžbe (uz $\Lambda = 0$) te postaje očita veza s Riccijevim tenzorom. Einsteinova se jednadžba kontrahira s $v^a v^b$ te potom iskoristi veza Riccijevog skalara i traga tenzora T_{ab} dobivena uzimanjem traga Einsteinove jednadžbe.

$$\begin{aligned} & 8\pi(T_{ab} - \frac{1}{2}Tg_{ab})v^a v^b \\ &= 8\pi(T_{ab}v^a v^b + \frac{1}{2}T) \\ &= R_{ab}v^a v^b \geq 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Jaki energijski uvjet ne implicira slabi ukoliko nije riječ o vektorima svjetlosnog tipa. Za vektore svjetlosnog tipa ta su dva uvjeta ekvivalentna. Postoji i treći uvjet, dominantni energijski uvjet koji ograničava brzinu toka energije na manju ili jednaku brzini svjetlosti. Za svaki buduće usmjereni vektor vremenskog tipa v^a , vektorsko polje $-T^a_b v^b$ mora biti vremenskog ili svjetlosnog tipa i buduće usmjereno.

Energijski uvjeti vrijede za klasičnu materiju, no kvantni efekti mogu dovesti do njihovog narušenja. Jedno od predloženih rješenja tog problema korištenje je uprosječenih verzija navedenih teorema. Ali neka novija istraživanja ekspanzije svemira i modeli inflacije ukazuju na moguće narušenje jakog energijskog uvjeta čak i tada.

Literatura

- [1] C. M. Will, Finally, Results from Gravity Probe B, *Physics* 4, 43 (2011)
- [2] P. Hajicek, General Theory of Vacuum Ergospheres, *Physical Review D*, Vol. 7, No. 8 (1973)
- [3] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis, The Large Scale Structure of Space-time, Cambridge University Press (1973)
- [4] P. K. Townsend, Black Holes, arXiv:gr-qc/9707012v1
- [5] S. Mukherjee, S. Chakraborty, N. Dadhich, On Some Novel Features of the Kerr-Newman-NUT Spacetime, arXiv:1807.02216v1 [gr-qc] (2018)
- [6] G. W. Gibbons, R. A. Russell-Clark, Note on the Sato-Tomimatsu Solution of Einstein's Equations, *Physical Review Letters*, Vol.30, No.9 (1973)
- [7] H. Kodama, W. Hikida, Global Structure of the Zipoy-Vorhees-Weyl Spacetime, *Class. Quantum Grav.* 20 (2003) 5121-5140
- [8] B. F. Schutz, N. Comins, On the Existence of Ergoregions in Rotating Stars, *Mon. Not. R. astr. Soc.* 182 (1978) 69-76
- [9] E. Teo, Rotating Traversable Wormholes, *Physical Review D*, vol. 58, 024014 (1998)
- [10] R. M. Wald, General Relativity, The University of Chicago Press (1984)
- [11] V. P. Frolov, I. D. Novikov, Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments (1997)
- [12] A. A. Grib, Yu. V. Pavlov, V. D. Vertogradov, Geodesics with Negative Energy in the Ergosphere of Rotating Black Holes, *Modern Physics Letters A*, Vol. 29, No. 20, 1450110 (2014)
- [13] I. Smolić, Diferencijalna geometrija u fizici (2018)