

# Faze baždarnih teorija

Ivana Česić, F-4115

Fizički odsjek Prirodoslovo-matematičkog fakulteta

Bijenička cesta 32, 10000 Zagreb

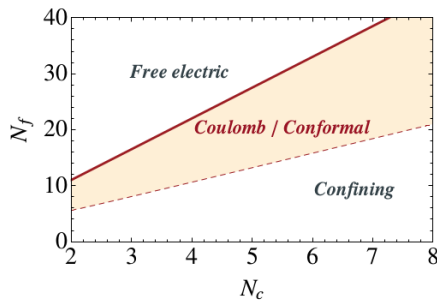
## Sažetak

Baždarne teorije klasificiraju se u faze na osnovi njihovih ponašanja na velikim udaljenostima. Ključnu ulogu u klasifikaciji ima renormalizacijska grupna jednačba, ili  $\beta$  funkcija, budući da ona kontrolira klizanje konstante vezanja te se iz njenih karakteristika ekstrapoliraju ključna svojstva teorije. Izračunate su renormalizacija naboja i  $\beta$  funkcija u kvantnoj elektrodinamici iz dijagrama vakuumske polarizacije s jednom petljom. Na primjeru  $\beta$  funkcije kvantne kromodinamike pokazano je kako faza teorije ovisi o broju okusa  $n_f$ .

## 1 Uvod

Fazni prostor baždarnih teorija razapet je skupom parametara koji definiraju teoriju, poput baždarne grupe, broja i tipa polja. Ovakav fazni prostor nije kontinuiran, ali se za potrebe razmatranja analitički proširuje na nefizikalna područja. Primjer faznog prostora pokazan je na slici 1, gdje za različite brojeve boja i okusa teorije pokazuju drugačija ponašanja na velikim udaljenostima.

Jedno od ključnih svojstava kvantnih teorija polja je ovisnost jakosti vezanja o energetske skali i kaže se da je jakost vezanja *klizna*. Faza baždarne teorije određuje se ponašanjem baždarne konstante vezanja na velikim udaljenostima (niskim energijama). Neabelovske baždarne teorije mogu biti asimptotski slobodne te je kod njih bitno proučiti i ponašanje na malim udaljenostima.



Slika 1: Primjer faznog prostora baždarnih teorija  $SU(N_c)$  razapetog s brojem boja  $N_c$  i brojem okusa (fermiona)  $N_f$  [1].

Kliznost baždarnih konstanti vezanja od malih udaljenosti (visokih energija) do velikih udaljenosti (niskih energija) određena je jednačbom renormalizacijske grupe:

$$\mu \frac{dg}{d\mu} = \frac{dg}{d \ln \mu} = \beta(g) \quad (1)$$

gdje je  $\mu$  impulsna skala. Jednačba povezuje konstantu vezanja  $g(\mu)$  s  $\beta$  funkcijom koja se može izračunati renormalizacijom baždarnog polja. Općenito  $\beta$  funkcija ovisi o metodi renormalizacije.

Vrijednosti  $g$  za koje  $\beta(g) = 0$  zovu se fiksne točke te njihovo postojanje ne ovisi o načinu renormalizacije. Fiksne točke klasificiraju se njihovim kritičkim eksponentima koji su zadani svojstvenim vrijednostima matrice stabilnosti

$$M_{ij} = \left. \frac{\partial \beta_i}{\partial g_j} \right|_{g=g^*}, \quad (2)$$

gdje je  $g^*$  vrijednost vezanja u fiksnoj točki u zadanoj shemi. Predznak realnog dijela svojstvenih vrijednosti određuje stabilnost fiksnih točaka, tj. hoće li tok renormalizacijske grupe, čiji je zadani smjer onaj od visokih energija prema niskim energijama, teći dalje od fiksne točke ili prema fiksnoj točki.

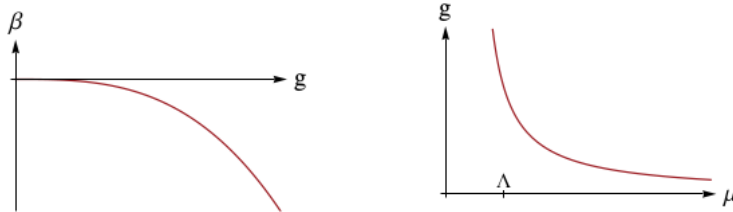
U slučaju samo jednog vezanja, derivacija  $d\beta/dg|_{g^*}$  određuje stabilnost. Fiksna točka je stabilna (IR) kada je derivacija pozitivna, a nestabilna je (UV) kada je derivacija negativna jer tok renormalizacijske grupe ide iz UV prema IR.

Općeniti oblik  $\beta$  funkcije čiste fermionske teorije na nivou dvije petlje je

$$\beta(a_g) = -2a_g^2[\beta_0 + \beta_1 a_g], \quad (3)$$

gdje je  $a_g = g^2/(4\pi)^2$ . Predznaci koeficijenata  $\beta_0$  i  $\beta_1$  uvjetuju postojanje fiksnih točaka i njihovu stabilnost i time klasificiraju teoriju. S obzirom na ponašanje na niskim energijama, baždarna teorija može pripadati jednoj od tri faze: fazi zatočenja, slobodnoj električnoj te Coulombovoj.

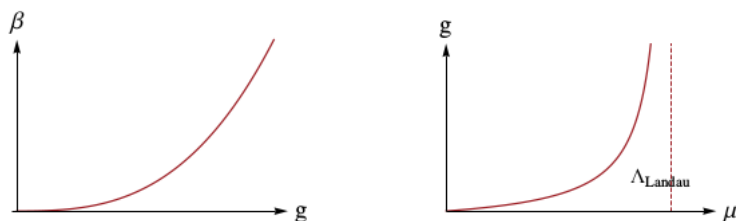
Faze zatočenja pojavljuje se kod pozitivnih  $\beta_0$  i  $\beta_1$  koeficijenata i tada je  $\beta$  funkcija negativna u perturbativnom režimu (slika 2). Sadrži Gaussovu (neinteragirajuću, trivijalnu) nestabilnu (UV) fiksnu točku koja je specifična za teorije koje su asimptotski slobodne. Teorija jakim interakcijama dinamički generira skalnu masu  $\Lambda$  i može doći do loma globalnih simetrija.



Slika 2: Asimptotski slobodna teorija sa zatočenjem. [1]

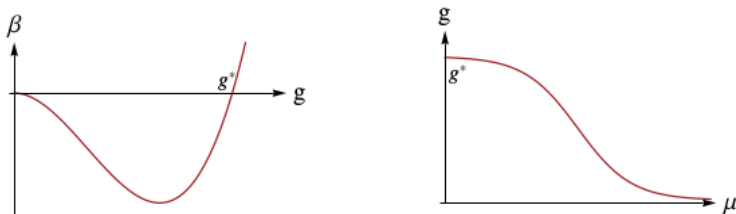
Teorija je u slobodnoj električnoj kada ima Gaussovu stabilnu (IR) fiksnu točku, tj. ako su koeficijenti  $\beta_0 \leq 0$  i  $\beta_1 < 0$  (slika 3). Teorija ima Landauovu

pol na kojem vezanje postane beskonačno i nije dobro definirana na visokim energijama. Pojavom interagirajuće nestabilne (UV) fiksne točke, teorija bi bila asimptotski sigurna, tj. bila bi konzistentna do proizvoljno visokih energija, no to nije moguće postići perturbacijom na razini dvije petlje.



Slika 3: Slobodna električna teorija i Landauov pol. [1]

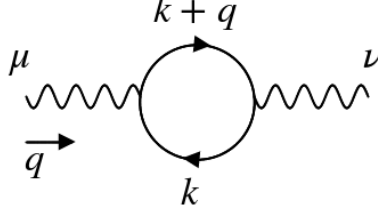
Teorije Coulombove faze imaju interagirajuću stabilnu (IR) fiksnu točku i one su invarijantne na skaliranje (eng. *scale invariant*) na velikim udaljenostima. Takav je slučaj s  $\beta_0 > 0$  i  $\beta_1 < 0$  u kojem  $\beta$  funkcija ne bude negativna na cijeloj skali (slika 4). Interagirajuća stabilna (IR) fiksna točka je  $a_{g^*} = -\beta_0/\beta_1$  i perturbativna je za  $\beta_0 \rightarrow 0$ . Teorija je asimptotski slobodna i nema zatočenja. Transformacije skale tvore podgrupu konformalne grupe simetrija i često se ova faza naziva i konformalna faza.



Slika 4: Teorija u Coulombovoj fazi. [1]

## 2 $\beta$ funkcija u kvantnoj elektrodinamici

$\beta$  funkcija kvantne elektrodinamike može se dobiti renormalizacijom električnog naboja, tj. konstante vezanja, iz sljedećeg procesa:



Ovo je dijagram vakuumske polarizacije u reda  $\alpha$  i on utječe na efektivno polje  $A^\mu(x)$  koje vidi elektron.

Amplituda vakuumske polarizacije je

$$i\Pi_2^{\mu\nu} = (-ie_0)^2(-1) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ \gamma^\mu \frac{i}{\not{k} - m} \gamma^\nu \frac{i}{\not{k} + \not{q} - m} \right]. \quad (4)$$

Definira li se  $i\Pi^{\mu\nu}$  kao zbroj svih jednočestičnih ireducibilnih dijagrama (1PI) u fotonskom propagatoru,  $i\Pi_2^{\mu\nu}$  njegov je doprinos drugog reda u  $e$  (1PI su svi dijagrami koji se ne mogu razdijeliti u dva nezavisna dijagrama rezanjem jedne linije).

Wardov identitet u ovom slučaju glasi

$$q_\mu \Pi^{\mu\nu} = 0, \quad (5)$$

iz čega slijedi da je  $\Pi^{\mu\nu}$  proporcionalan operatoru  $(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)$ :

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \Pi(q^2). \quad (6)$$

Egzaktna fotonska funkcija sada je

$$\begin{aligned} & \text{wavy line with loop} = \\ & \text{wavy line} + \text{wavy line with 1PI loop} + \text{wavy line with 1PI loop and 1PI loop} + \dots \\ & = \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2} [i(q^2 g^{\rho\sigma} - q^\rho q^\sigma) \Pi(q^2)] \frac{-ig_{\sigma\nu}}{q^2} + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

$$= \frac{-i}{q^2(1 - \Pi(q^2))} \left( g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + \frac{-i}{q^2} \left( \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \quad (8)$$

Članovi proporcionalni s  $q_\mu$  ili  $q_\nu$  mogu se zanemariti jer, po Wardovom identitetu, iščezavaju prilikom računanja S-matričnog elementa i spajanja kraja egzaktnog fotonskog propagatora s fermionskom linijom. Sada preostaje samo:

$$= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2(1 - \Pi(q^2))} \quad (9)$$

Reziduum pola u  $q^2 = 0$  iznosi

$$\frac{1}{1 - \Pi(0)} = Z_3 \quad (10)$$

te budući da faktor  $e_0$  leži na oba kraja fotonskog propagatora, električni naboj može se renormalizirati zamjenom  $e_0 \rightarrow e = \sqrt{Z_3}e_0$ . Fizikalni naboj koji se mjeri eksperimentima na velikim udaljenostima ( $q^2 = 0$ ) je  $e = \sqrt{Z_3}e_0$ , a  $e_0$  naziva se goli naboj.

U slučaju raspršenja s  $q^2 \neq 0$  i  $\Pi(q^2)$  poznatog do vodećeg reda u  $\alpha$ , amplituda procesa će sadržavati veličinu

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \left( \frac{e_0^2}{1 - \Pi(q^2)} \right) = \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \left( \frac{e^2}{1 - [\Pi_2(q^2) - \Pi_2(0)]} \right) \quad (11)$$

gdje se veličina u zagradama može interpretirati kao električni naboj ovisan o  $q^2$ . Sada je preostalo zapravo izračunati  $\Pi_2$ .

Iz (4) se nakon računanja tragova dobije

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) = -4e^2 \times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu(k+q)^\nu + k^\nu(k+q)^\mu - g^{\mu\nu}(k \cdot (k+q) - m^2)}{(k^2 - m^2)((k+q)^2 - m^2)} \quad (12)$$

Uvodi se Feynmanov parametar

$$\frac{1}{(k^2 - m^2)((k+q)^2 - m^2)} = \int_0^1 dx \frac{1}{(l^2 + x(1-x)q^2 - m^2)} \quad (13)$$

gdje je  $l = k + xq$ . Brojnik u jednadžbi (12) napiše se preko  $l$ :

$$2l^\mu l^\nu - g^{\mu\nu}l^2 - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu}(m^2 + x(1-x)q^2) + \text{clanovi linearni u } l \quad (14)$$

Nakon supstitucije  $l^0 = il_E^0$  i uvođenja  $\Delta = m^2 - x(1-x)q^2$  dobije se

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) = -4ie^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4l_E}{(2\pi)^4} \times \frac{-2l_E^\mu l_E^\nu + 1/2g^{\mu\nu}l_E^2 - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu}(m^2 + x(1-x)q^2)}{(l_E^2 + \Delta)^2}. \quad (15)$$

Ovaj je integral ultraljubičasto divergentan i pokuša li se regulirati tako da se integral odsječe na  $l_E = \Lambda$ , ne sačuva se Wardov identitet. Stoga je najjednostavnija regularizacija koja bi sačuvala simetrije QED-a dimenzionalna regularizacija. Feynmanov se dijagram računa kao analitička funkcija dimenzionalnosti prostor-vremena  $d$  u kojem postoji jedna vremenska dimenzija i  $d-1$  prostornih dimenzija.

U  $d$  dimenzija vrijedi  $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = d$  te treba napraviti zamjenu

$$l^\mu l^\nu \rightarrow \frac{1}{d} l^2 g^{\mu\nu}. \quad (16)$$

Potrebne integracijske formule u  $d$  dimenzija su [2]:

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n - d/2)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-d/2} \quad (17)$$

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{l_E^2}{(l_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d \Gamma(n - d/2 - 1)}{2 \Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-d/2-1} \quad (18)$$

Uvrštavanje ovih formula u (15) i korištenje  $\Delta = m^2 - x(1-x)q^2$  daje

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) = -8ie^2 \int_0^1 dx \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} \Gamma(2 - d/2) x(1-x) \times (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \quad (19)$$

Iz jednadžbe je vidljivo da dimenzionalnom regularizacijom  $\Pi_2^{\mu\nu}$  stvarno ima oblik koji mu je potreban da zadovolji Wardov identitet, ali će se pokazati da je logaritamski divergentan. Dio koji množi operator  $(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)$  prepoznaje se kao  $\Pi_2(q^2)$ . U njega se uvrsti  $\epsilon = 4 - d$  i iskoristi se

$$\Gamma(\epsilon/2) \approx \frac{2}{\epsilon} - \gamma \quad (20)$$

te se konačno dobije

$$\Pi_2(q^2) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left(\frac{2}{\epsilon} - \ln \Delta - \gamma + \ln(4\pi)\right) \quad (21)$$

Promjena električnog naboja u redu  $\alpha$  je

$$\frac{e^2 - e_0^2}{e_0^2} = \delta Z_3 = \Pi_2(0) \approx -\frac{2\alpha}{3\pi\epsilon} \quad (22)$$

Goli je naboj beskonačno puta veći od fizikalnog naboja, no ta razlika nije opservabilna. Ono što se može opservirati je ovisnost efektivnog naboja o  $q^2$ , a za njen izračun je potrebno znati razliku

$$\widehat{\Pi}_2(q^2) = \Pi_2(q^2) - \Pi_2(0) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln\left(\frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2}\right) \quad (23)$$

koja je neovisna o  $\epsilon$ .

Gornji se integral može izračunati u limesu malih udaljenosti ili velikih energija  $-q^2 \gg m^2$ :

$$\widehat{\Pi}_2(q^2) = \frac{\alpha}{3\pi} \left[ \ln\left(\frac{-q^2}{m^2}\right) - \frac{5}{3} + \mathcal{O}\left(\frac{m^2}{q^2}\right) \right] \quad (24)$$

$$= \frac{\alpha}{3\pi} \ln\left(\frac{-q^2}{Am^2}\right) \quad (25)$$

Efektivna konstanta vezanja u ovom limesu je

$$\alpha_{eff} = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln\left(\frac{-q^2}{Am^2}\right)} \quad (26)$$

gdje je  $A = e^{5/3}$ .

Sada je  $\beta$  funkciju lako izračunati deriviranjem gornjeg izraza po logaritmu energetske skale:

$$\beta_{QED}(\alpha) = \frac{2\alpha^2}{3\pi} \quad (27)$$

Može se pokazati da je i drugi koeficijent  $\beta$  funkcije u kvantnoj elektrodinamici pozitivan [3]. Jakost vezanja povećava se s energetskom skalom i ima Landauov pol, tj. vezanje divergira na nekoj konačnoj energiji. Međutim, pojava Landauovog pola je vjerojatno posljedica korištenja perturbativne aproksimacije na režimu u kojem ona više nije valjana metoda. Jedina fiksna točka je trivijalna i stabilna te teorija je u električno slobodnoj fazi.

### 3 $\beta$ funkcija u kvantnoj kromodinamici

Metodom minimalne suptrakcije dobije se sljedeća  $\beta$  funkcija za bezmaseni QCD na nivou dvije petlje[4]

$$\beta_{QCD}(a_s) = -2a_s^2 \left( \left( 11 - \frac{2}{3}n_f \right) + \left( 102 - \frac{38}{3}n_f \right) a_s \right), \quad (28)$$

gdje je  $a_s = \alpha_s/4\pi = g^2/16\pi^2$  i  $n_f$  broj okusa.

Na nivou dvije petlje mogu se uočiti promjene u fazi variranjem  $n_f$ . Konkretno, promjena predznaka koeficijenata  $\beta$  funkcije

$$\beta_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f \quad (29)$$

$$\beta_1 = 102 - \frac{38}{3}n_f \quad (30)$$

dovodi do različitih faza:

- Za  $n_f \leq 8$  oba su koeficijenta pozitivna i teorija je u fazi zatočenja. Samo jedna fiksna točka postoji i ona je UV Gaussova iz čega slijedi da je teorija asimptotski slobodna.
- Za  $9 \leq n_f \leq 16$  koeficijent  $\beta_0$  je pozitivan, a  $\beta_1$  negativan i teorija je u Coulombovoj fazi zbog postojanja netrivialne IR fiksne točke.
- Za  $n_f \geq 17$  oba su koeficijenta negativna i teorija pripada slobodnoj električnoj fazi jer  $\beta$  funkcija ima trivijalnu IR fiksnu točku.

Ove faze su u skladu sa shemom faznog prostora sa slike 1 i slični bi se rezultati mogli izvesti za bilo koju drugu neabelovu  $SU(N_c)$  teoriju.

## 4 Zaključak

Cilj seminara bio je opisati klasifikaciju baždarnih teorija u faze na temelju vezanja na niskim energija, tj. velikim udaljenostima. Kao alat za provjeru ponašanja teorije koristi se njena  $\beta$  funkcija koja sadrži informacije o kliznosti jakosti vezanja.

Provjera  $\beta$  funkcija je standardna procedura za ispitivanje modela u elementarnim česticama jer daje uvid u ponašanje modela u režimima koji nisu dostupni eksperimentu i omogućuju procjene raspona valjanosti perturbacijske teorije.

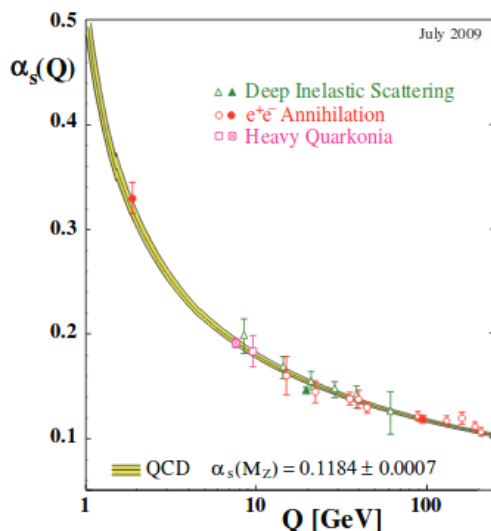
Izračunata je  $\beta$  funkcija za QED renormalizacijom naboja iz dijagrama vakuumske polarizacije

$$\beta_{QED}(\alpha) = \frac{2\alpha^2}{3\pi}, \quad (31)$$

iz koje je vidljivo da konstanta vezanja raste sa skalom energije i da je teorija slobodna električna.

QCD  $\beta$  funkcija na nivou dvije petlje pokazuje različita ponašanja s obzirom na broj okusa  $n_f$ , te se za dovoljno malen broj okusa ispostavlja da je teorija u fazi zatočenja. Povećavanjem broja okusa bi teorija ušla u Coulombovu fazu u kojem konstanta vezanja na niskim energijama ima konačnu vrijednost, a sa dovoljno velikim brojem okusa može biti u slobodnoj električnoj fazi.

Slaganje teoretske jakosti vezanja QCD-a sa 6 okusa s eksperimentalnim vrijednostima vidljiva je na slici 5, gdje rezultati pokazuju valjanost asimptotske slobode teorije i povećanje vezanja na niskim energijama.



Slika 5: Mjerenja  $\alpha_s$  u ovisnosti o energetskej skali  $Q$ . [5]

Kvantne korekcije na električni naboj mogu se interpretirati kao posljedica



zasjenjenja virtualnih elektron-pozitron parova na goli naboj. Na velikim udaljenostima se naboj slabo osjeća, ali na malim udaljenostima prodire se u oblak virtualnih parova i efektivni naboj je veći.

QCD, za razliku od QED-a, ima nositelje sila, gluone, koji su obojeni. Polarizacija virtualnih gluona u vakuumu može u konačnici pojačati polje i to se naziva antizasjenjenje. Približavanjem izvoru smanjuje se efekt antizasjenjenja od okolnih gluona i efektivni naboj se smanjuje. Budući da virtualni kvarkovi i virtualni gluoni suprotno utječu na efektivni naboj, upravo o broju kvarkova (okusa) ovisi hoće li njihovo zasjenjenje prevladati antizasjenjenje od gluona.

## Literatura

- [1] M. Mojaza (2014). Conformality, Spontaneous Symmetry Breaking and Mass Hierarchies (Doktorska disertacija).
- [2] Peskin, Schroeder: An Introduction To Quantum Field Theory, Addison-Wesley 1995
- [3] Weinberg, Steven: The Quantum Theory of Fields, Volume II, Modern Applications, Cambridge University Press 1996
- [4] T. van Ritbergen, J.A.M. Vermaseren, and S.A. Larin, Phys. Lett. B400, 379 (1997) [arXiv:hep-ph/9701390].
- [5] Siegfried Bethke, Eur. Phys. J. C64, 689-703 (2009) [arXiv:0908.1135v2].