MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

1. kolokvij - 24. travnja 2023.

ZADATAK 1

(5 bodova) Neka je $A : \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}^3$ preslikavanje dano sa

$$A(p(x)) = (p(1), p(2), p(1) + p(2)).$$

Pokažite da je A linearno preslikavanje, te mu odredite rang, defekt i po jednu bazu za sliku i jezgru.

Rješenje

$$\begin{aligned} A(\alpha p + \beta q) &= ((\alpha p + \beta q)(1), (\alpha p + \beta q)(2), (\alpha p + \beta q)(1) + (\alpha p + \beta q)(2)) \\ &= (\alpha p(1) + \beta q(1), \alpha p(2) + \beta q(2), \alpha p(1) + \beta q(1) + \alpha p(2) + \beta q(2)) \\ &= \alpha(p(1), p(2), p(1) + p(2)) + \beta(q(1), q(2), q(1) + q(2)) \\ &= \alpha A(p) + \beta A(q). \end{aligned}$$

$A(p) = (0,0,0) \Leftrightarrow p(1) = 0$ i $p(2) = 0$. Za $p(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$ imamo

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 &= 0 \end{aligned}$$

Odnosno

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \\ a_1 + 3a_2 + 7a_3 &= 0 \end{aligned}$$

Uzmimo $a_2 = s, a_3 = r, s, r \in \mathbb{R}$, pa je $a_1 = -3s - 7r$, te $a_0 = 2s + 6r$. Dobijemo bazu za jezgru $\{2 - 3t + t^2, 6 - 7t + t^3\}$. Imamo $d(A) = 2$, pa je $r(A) = 4 - d(A) = 2$. Sliku generira skup $\{A(1), A(t), A(t^2), A(t^3)\}$. Vidimo da je $\{A(1), A(t)\} = \{(1,1,2), (1,2,3)\}$ linearno nezavisan, pa je, zbog dimenzije, baza slike.

LINEARNA ALGEBRA 2

1. kolokvij - 24. travnja 2023.

ZADATAK 2

(a) (2 boda) Dana je baza $\{f_1, \ldots, f_n\}$ za $(\mathbb{R}^n)^*$ pri čemu je

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = x_1, \quad f_k(x_1, \ldots, x_n) = x_{k-1} + x_k, \quad 2 \leq k \leq n.$$

Odredite bazu $\{b_1, \ldots, b_n\}$ za $\mathbb{R}^n$ kojoj je $\{f_1, \ldots, f_n\}$ dualna.

(b) (3 boda) Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor te $f_1, f_2, f \in V^* \setminus \{0\}$. Dokažite:

$$f \text{ se može prikazati kao linearna kombinacija } f_1 \text{ i } f_2 \iff \mathrm{Ker} f_1 \cap \mathrm{Ker} f_2 \subseteq \mathrm{Ker} f.$$

Rješenje:

(a) U kanonskoj bazi zapis funkcionala je dan s

$$[f_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} = E_1, \qquad [f_k] = E_{k-1} + E_k, \quad 2 \leq k \leq n.$$

Traženu bazu $(b) = \{b_1, \ldots, b_n\}$ stoga dobijemo tako da posložimo ove retke u matricu, invertiramo ju te očitamo stupce, pa je

$$[I]_b^e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{cases} (-1)^{i+j}, & i \geq j, \\ 0, & i < j. \end{cases}$$

Stoga je $b_j = \sum_{i=j}^{n} (-1)^{i+j} e_i$, $j = 1, \ldots, n$.

(b) Pretpostavimo da postoje $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je $f = \alpha f_1 + \beta f_2$. Neka je $x \in \mathrm{Ker}\, f_1 \cap \mathrm{Ker}\, f_2$. Tada je $f(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) = 0$, pa slijedi $x \in \mathrm{Ker}\, f$.
Obratno, pretpostavimo da je $\mathrm{Ker}\, f_1 \cap \mathrm{Ker}\, f_2 \subseteq \mathrm{Ker}\, f$. Ako je $\mathrm{Ker}\, f_1 \cap \mathrm{Ker}\, f_2 = \mathrm{Ker}\, f$, tada zbog dimenzija slijedi $\mathrm{Ker}\, f_1 = \mathrm{Ker}\, f_2 = \mathrm{Ker}\, f$, pa je prema obratu zadatka iz druge zadaće f proporcionalan i s f_1 i f_2, te posebno slijedi i da se može prikazati kao njihova linearna kombinacija. Inače, imamo da je $\dim(\mathrm{Ker}\, f_1 \cap \mathrm{Ker}\, f_2) = n - 2$, gdje je $n = \dim V$. Neka je $\{b_1, \ldots, b_{n-2}\}$ baza za $\mathrm{Ker}\, f_1 \cap \mathrm{Ker}\, f_2$, te neka je $\{b_{n-1}, b_n\}$ dopuna do baze za V. Kako je $f_1(b_j) = f_2(b_j) = f(b_j) = 0$ za sve $j = 1, \ldots, n$, da bi dokazali tvrdnju dovoljno je pokazati da možemo pronaći $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takve da je

$$\begin{cases} \alpha f_1(b_{n-1}) + \beta f_2(b_{n-1}) & = f(b_{n-1}) \\ \alpha f_1(b_{n-1}) + \beta f_2(b_{n-1}) & = f(b_n) \end{cases}$$

Primijetimo kako su retci matrice ovog 2x2 sustava linearno nezavisni; u suprotnom bismo za netrivijalne $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ dobili $f_1(\lambda b_{n-1} + \mu b_n) = f_2(\lambda b_{n-1} + \mu b_n) = 0$, što je kontradikcija s time da su b_{n-1}, b_n bili u direktnom komplementu $\mathrm{Ker}\, f_1 \cap \mathrm{Ker}\, f_2$. Stoga je matrica sustava regularna, te rješenje gornjeg sustava postoji.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

1. kolokvij - 24. travnja 2023.

ZADATAK 3

(5 bodova) Neka su $M = [((1,1,0),(0,1,-1))]$ i $L = [(1,1,1)]$ potprostori od $\mathbb{R}^3$, te neka je $P \in L(\mathbb{R}^3)$ operator projekcije na potprostor M, u smjeru potprostora L. Dakle, P na M djeluje kao identiteta, a L poništava.

a) Odredite matricu operatora P u kanonskoj bazi.

b) Odredite parametre a i b, ako je

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -1 & b & 1 \\ -1 & a & 2 \end{bmatrix}$$

matrica operatora P u nekoj drugoj bazi. Uputa: što kod matričnog prikaza ne ovisi o odabiru baze?

Rješenje Neka je $(f) = (f_1, f_2, f_3) = (1,1,0),(0,1,-1),(1,1,1)$.

$$\begin{aligned} P_{(e)} &= I_{(e,f)} P_{(f)} I_{(e,f)}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$b = trP = trP_{(f)} = 2$. Kako je $2 = r(P_{(f)})$ postoje α, β takvi da je

$$\alpha(-2,3,3) + \beta(-1,2,1) = (-1,a,2)$$

Imamo $\alpha = 1, \beta = -1, a = 1$.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

1. kolokvij - 24. travnja 2023.

ZADATAK 4

(5 bodova) Neka je operator $A \in L(\mathbb{R}^3)$ dan matricom $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ u kanonskoj bazi.

(a) Može li se A dijagonalizirati? Detaljno obrazložite svaki svoj odgovor.

(b) Odredite matrični prikaz od A^{30} u kanonskoj bazi.

Rješenje:

(a) Računamo $k_A(\lambda) = ... = (1-\lambda)^2(3-\lambda)$, iz čega slijedi $\sigma(A) = \{1, 3\}$ te $a(1) = 2$ i $a(3) = 1$.

Prvo računamo $V_A(1)$:

$$A - I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow V_A(1) = \left[\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right] \Rightarrow g(1) = 2.$$

Sada za $V_A(3)$ imamo:

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow V_A(1) = \left[\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right] \Rightarrow g(3) = 1.$$

Dobivamo:

$$A = PJP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

(b) Računamo:

$$A^{30} = PJ^{30}P^{-1} = ... = \begin{bmatrix} 0.5 + 0.5 \cdot 3^{30} & 0 & -0.5 + 0.5 \cdot 3^{30} \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.5 + 0.5 \cdot 3^{30} & 0 & 0.5 + 0.5 \cdot 3^{30} \end{bmatrix}.$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

1. kolokvij - 24. travnja 2023.

ZADATAK 5

(5 bodova) Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor, te $A, B \in L(V)$.

(a) Ako je v svojstveni vektor i od A i od B, je li v svojstveni vektor od AB?

(b) Ako je λ svojstvena vrijednost i od A i od B, je li λ svojstvena vrijednost od AB?

Svoje odgovore obrazložite (to jest, za tvrdnje koje vrijede navedite dokaz, a za one koje ne vrijede navedite kontraprimjer).

Rješenje (a) Da. Dokažimo to. Neka je $v \in V$ svojstveni vektor linearnih operatora A i B. Tada je $v \neq 0$, te postoje skalari λ i μ takvi da je $Av = \lambda v$ i $Bv = \mu v$. Tada je

$$(AB)v = A(Bv) = A(\mu v) = \mu Av = \lambda\mu v,$$

pa je v svojstveni vektor linearnog operatora AB (pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda\mu$).

(b) Ne. Na primjer, neka su A, B linearni operatori na $\mathbb{R}^2$ zadani kao $A(x_1, x_2) = (x_1, 0)$ i $B(x_1, x_2) = (0, x_2)$. Tada je $A(1, 0) = (1, 0)$, pa je 1 svojstvena vrijednost od A. Isto tako, $B(0, 1) = (0, 1)$, pa je 1 svojstvena vrijednost od B. Međutim, 1 nije svojstvena vrijednost od AB jer je $AB = 0$ (0 je jedina svojstvena vrijednost od AB).

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

1. kolokvij - 24. travnja 2023.

ZADATAK 1

(5 bodova) Neka je $B : \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}^3$ preslikavanje dano sa

$$B(p(x)) = (p(2), p(3), p(2) - p(3)).$$

Pokažite da je B linearno preslikavanje, te mu odredite rang, defekt i po jednu bazu za sliku i jezgru.

Rješenje

$$\begin{aligned} B(\alpha p + \beta q) &= ((\alpha p + \beta q)(2), (\alpha p + \beta q)(3), (\alpha p + \beta q)(2) - (\alpha p + \beta q)(3)) \\ &= (\alpha p(2) + \beta q(2), \alpha p(3) + \beta q(3), \alpha p(2) + \beta q(2) - \alpha p(3) - \beta q(3)) \\ &= \alpha(p(2), p(3), p(2) - p(3)) + \beta(q(2), q(3), q(2) - q(3)) \\ &= \alpha B(p) + \beta B(q). \end{aligned}$$

$B(p) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow p(1) = 0$ i $p(2) = 0$. Za $p(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$ imamo

$$\begin{aligned} a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 &= 0 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 &= 0 \end{aligned}$$

Odnosno

$$\begin{aligned} a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 &= 0 \\ a_1 + 5a_2 + 19a_3 &= 0 \end{aligned}$$

Uzmimo $a_2 = s, a_3 = r, s, r \in \mathbb{R}$, pa je $a_1 = -5s - 19r$, te $a_0 = 6s + 30r$. Dobijemo bazu za jezgru $\{6 - 5t + t^2, 30 - 19t + t^3\}$. Imamo $d(A) = 2$, pa je $r(A) = 4 - d(A) = 2$. Sliku generira skup $\{A(1), A(t), A(t^2), A(t^3)\}$. Vidimo da je $\{A(1), A(t)\} = \{(1, 1, 0), (2, 3, -1)\}$ linearno nezavisan, pa je, zbog dimenzije, baza slike.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

1. kolokvij - 24. travnja 2023.

ZADATAK 2

(a) (2 boda) Dana je baza $\{f_1, \ldots, f_n\}$ za $(\mathbb{R}^n)^*$ pri čemu je

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = x_1, \quad f_k(x_1, \ldots, x_n) = x_{k-1} + x_k, \quad 2 \leq k \leq n.$$

Odredite bazu $\{b_1, \ldots, b_n\}$ za $\mathbb{R}^n$ kojoj je $\{f_1, \ldots, f_n\}$ dualna.

(b) (3 boda) Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor te $f_1, f_2, f \in V^* \setminus \{0\}$. Dokažite:

$$f \text{ se može prikazati kao linearna kombinacija } f_1 \text{ i } f_2 \iff \mathrm{Ker} f_1 \cap \mathrm{Ker} f_2 \subseteq \mathrm{Ker} f.$$

Rješenje: Vidjeti prvu grupu.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

1. kolokvij - 24. travnja 2023.

ZADATAK 3

(5 bodova) Neka su $K = [((1,1,0),(-1,1,1))]$ i $U = [(0,-1,-1)]$ potprostori od $\mathbb{R}^3$, te neka je $T \in L(\mathbb{R}^3)$ operator projekcije na potprostor K, u smjeru potprostora U. Dakle, T na K djeluje kao identiteta, a U poništava.

a) Odredite matricu operatora T u kanonskoj bazi.

b) Odredite parametre c i d, ako je

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 1 & d & 2 \\ 1 & c & 3 \end{bmatrix}$$

matrica operatora T u nekoj drugoj bazi. Uputa: što kod matričnog prikaza ne ovisi o odabiru baze?

Rješenje Neka je $(f) = (f_1, f_2, f_3) = (1,1,0), (-1,1,1), (0,-1,-1)$.

$$\begin{aligned} P_{(e)} &= I_{(e,f)} P_{(f)} I_{(e,f)}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$d + 2 = trP = trP_{(f)} = 2$, pa je $d = 0$. Kako je $2 = r(P_{(f)})$ postoje α, β takvi da je

$$\alpha(-1,2,4) + \beta(1,0,2) = (1,c,3)$$

Imamo $\alpha = -1/2, \beta = 1/2, c = -1$.

MATIČNI BROJ STUDENTA	IME I PREZIME	BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

1. kolokvij - 24. travnja 2023.

ZADATAK 4

(5 bodova) Neka je operator $A \in L(\mathbb{R}^3)$ dan matricom $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \\ -4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ u kanonskoj bazi.

(a) Može li se A dijagonalizirati? Detaljno obrazložite svaki svoj odgovor.

(b) Odredite matrični prikaz od A^{10} u kanonskoj bazi.

Rješenje:

(a) Računamo $k_A(\lambda) = ... = (\lambda - 3)^2(\lambda - 4)$, iz čega slijedi $\sigma(A) = \{3, 4\}$ te $a(3) = 2$ i $a(4) = 1$.

Prvo računamo $V_A(3)$:

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow V_A(3) = \left[\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right] \Rightarrow g(3) = 2.$$

Sada za $V_A(4)$ imamo:

$$A - 4I = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow V_A(4) = \left[\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \right] \Rightarrow g(4) = 1.$$

Dobivamo:

$$A = PJP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1.5 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b) Računamo:

$$A^{10} = PJ^{10}P^{-1} = ... = \begin{bmatrix} 5 \cdot 3^{10} - 4 \cdot 4^{10} & -2 \cdot 3^{10} + 2 \cdot 4^{10} & -3^{11} - 3^{10} + 4 \cdot 4^{10} \\ 2 \cdot 3^{10} - 2 \cdot 4^{10} & 4^{10} & -2 \cdot 3^{10} + 2 \cdot 4^{10} \\ 4 \cdot 3^{10} - 4 \cdot 4^{10} & -2 \cdot 3^{10} + 2 \cdot 4^{10} & -3^{11} + 4^{11} \end{bmatrix}.$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

1. kolokvij - 24. travnja 2023.

ZADATAK 5

(5 bodova) Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor, te $A, B \in L(V)$.

(a) Ako je v svojstveni vektor i od A i od B, je li v svojstveni vektor od $A + B$?

(b) Ako je λ svojstvena vrijednost i od A i od B, je li λ svojstvena vrijednost od $A + B$?

Svoje odgovore obrazložite (to jest, za tvrdnje koje vrijede navedite dokaz, a za one koje ne vrijede navedite kontraprimjer).

Rješenje (a) Da. Dokažimo to. Neka je $v \in V$ svojstveni vektor linearnih operatora A i B. Tada je $v \neq 0$, te postoje skalari λ i μ takvi da je $Av = \lambda v$ i $Bv = \mu v$. Tada je

$$(A + B)v = Av + Bv = \lambda v + \mu v = (\lambda + \mu)v,$$

pa je v svojstveni vektor linearnog operatora $A + B$ (pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda + \mu$).

(b) Ne. Na primjer, uzmimo $A = B = I$ identični operator. Tada je 1 svojstvena vrijednost od A i od B, ali 1 nije svojstvena vrijednost od $A + B = 2I$ (2 je jedina svojstvena vrijednost od AB).