Statistika

Vanja Wagner

3. Osnove vjerojatnosti

Poznate (diskretne) razdiobe

Na prošlom satu uveli smo pojam (diskretne[1]) slučajne varijable i njene razdiobe. Podsjetimo, razdiobu slučajne varijable X koja može poprimiti vrijednosti $x_1, \dots, x_k, \dots$ zapisujemo u obliku tablice

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k & \dots \\ p_1 & \dots & p_k & \dots \end{pmatrix}$$

gdje je $p_i = \mathbf{P}(X = x_i)$ pripadna vjerojatnost da X poprimi vrijednost x_i.

[1] Kažemo da je slučajna varijabla diskretna ako može poprimiti konačno ili prebrojivo mnogo različitih vrijednosti.

Poznate (diskretne) razdiobe

Na prošlom satu uveli smo pojam (diskretne[1]) slučajne varijable i njene razdiobe. Podsjetimo, razdiobu slučajne varijable X koja može poprimiti vrijednosti $x_1, \ldots, x_k, \ldots$ zapisujemo u obliku tablice

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_k & \ldots \\ p_1 & \ldots & p_k & \ldots \end{pmatrix}$$

gdje je $p_i = \mathbf{P}(X = x_i)$ pripadna vjerojatnost da X poprimi vrijednost x_i.

Već smo se upoznali s nekim primjerima slučajnih varijabli i njihovih distribucija i odredili im očekivanja i varijancu. U ostatku odjeljka ćemo promotriti neke od najpoznatijih i najčešće korištenih diskretnih razdioba (distribucija).

[1] Kažemo da je slučajna varijabla diskretna ako može poprimiti konačno ili prebrojivo mnogo različitih vrijednosti.

Uniformna distribucija

Kažemo da slučajna varijabla X ima **uniformnu distribuciju** (odnosno da je X uniformna slučajna varijabla) na skupu $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ako svaka od vrijednosti x_i ima jednaku vjerojatnost pojavljivanja, odnosno

$$\mathbf{P}(X = x_i) = \frac{1}{n}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Uniformna distribucija

Kažemo da slučajna varijabla X ima **uniformnu distribuciju** (odnosno da je X uniformna slučajna varijabla) na skupu $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ako svaka od vrijednosti x_i ima jednaku vjerojatnost pojavljivanja, odnosno

$$\mathbf{P}(X = x_i) = \frac{1}{n}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Primjere uniformne distribucije vidjeli smo do sada, npr.:

- bacanje (simetričnog) novčića;
- bacanje (simetrične) kocke;
- broj slučajno odabrane ribice iz akvarija.

Bernoullijeva distribucija

Kažemo da slučajna varijabla X ima **Bernoullijevu distribuciju** ako poprima samo dvije vrijednosti: 0 i 1. Ako označimo $p = \mathbf{P}(X = 1)$, onda je $q = \mathbf{P}(X = 0) = 1 - p$.

Bernoullijeva distribucija

Kažemo da slučajna varijabla X ima **Bernoullijevu distribuciju** ako poprima samo dvije vrijednosti: 0 i 1. Ako označimo $p = \mathbf{P}(X = 1)$, onda je $q = \mathbf{P}(X = 0) = 1 - p$. Pišemo

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$$

i koristimo oznaku $X \sim B(p)$.

Bernoullijeva distribucija

Kažemo da slučajna varijabla X ima **Bernoullijevu distribuciju** ako poprima samo dvije vrijednosti: 0 i 1. Ako označimo $p = \mathbf{P}(X = 1)$, onda je $q = \mathbf{P}(X = 0) = 1 - p$. Pišemo

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$$

i koristimo oznaku $X \sim B(p)$.

Bernoullijeva distribucija

Kažemo da slučajna varijabla X ima **Bernoullijevu distribuciju** ako poprima samo dvije vrijednosti: 0 i 1. Ako označimo $p = \mathbf{P}(X = 1)$, onda je $q = \mathbf{P}(X = 0) = 1 - p$. Pišemo

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$$

i koristimo oznaku $X \sim B(p)$.

Interpretacija Bernoullijeve distribucije: provodimo pokus i želimo zabilježiti je li se dogodio željeni ishod (uspjeh) ili nije (neuspjeh). To možemo učiniti preko slučajne varijable

$$X = \begin{cases} 1, & \text{dogodio se uspjeh} \\ 0, & \text{dogodio se neuspjeh} \end{cases}.$$

Primjer:

- bacamo novčić sa željenim ishodom pismo $\longrightarrow$

Bernoullijeva distribucija

Kažemo da slučajna varijabla X ima **Bernoullijevu distribuciju** ako poprima samo dvije vrijednosti: 0 i 1. Ako označimo $p = \mathbf{P}(X = 1)$, onda je $q = \mathbf{P}(X = 0) = 1 - p$. Pišemo

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$$

i koristimo oznaku $X \sim B(p)$.

Interpretacija Bernoullijeve distribucije: provodimo pokus i želimo zabilježiti je li se dogodio željeni ishod (uspjeh) ili nije (neuspjeh). To možemo učiniti preko slučajne varijable

$$X = \begin{cases} 1, & \text{dogodio se uspjeh} \\ 0, & \text{dogodio se neuspjeh} \end{cases}.$$

Primjer:

- bacamo novčić sa željenim ishodom pismo $\longrightarrow X \sim B(\frac{1}{2})$

Bernoullijeva distribucija

Kažemo da slučajna varijabla X ima **Bernoullijevu distribuciju** ako poprima samo dvije vrijednosti: 0 i 1. Ako označimo $p = \mathbf{P}(X = 1)$, onda je $q = \mathbf{P}(X = 0) = 1 - p$. Pišemo

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$$

i koristimo oznaku $X \sim B(p)$.

Interpretacija Bernoullijeve distribucije: provodimo pokus i želimo zabilježiti je li se dogodio željeni ishod (uspjeh) ili nije (neuspjeh). To možemo učiniti preko slučajne varijable

$$X = \begin{cases} 1, & \text{dogodio se uspjeh} \\ 0, & \text{dogodio se neuspjeh} \end{cases}.$$

Primjer:

- bacamo novčić sa željenim ishodom pismo $\longrightarrow X \sim B(\frac{1}{2})$
- izvlačimo kuglicu iz kutije s 2 bijele i 3 crne kuglice, željeni ishod je kuglica bijele boje $\longrightarrow$

Bernoullijeva distribucija

Kažemo da slučajna varijabla X ima **Bernoullijevu distribuciju** ako poprima samo dvije vrijednosti: 0 i 1. Ako označimo $p = \mathbf{P}(X = 1)$, onda je $q = \mathbf{P}(X = 0) = 1 - p$. Pišemo

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$$

i koristimo oznaku $X \sim B(p)$.

Interpretacija Bernoullijeve distribucije: provodimo pokus i želimo zabilježiti je li se dogodio željeni ishod (uspjeh) ili nije (neuspjeh). To možemo učiniti preko slučajne varijable

$$X = \begin{cases} 1, & \text{dogodio se uspjeh} \\ 0, & \text{dogodio se neuspjeh} \end{cases}.$$

Primjer:

- bacamo novčić sa željenim ishodom pismo $\longrightarrow X \sim B(\frac{1}{2})$
- izvlačimo kuglicu iz kutije s 2 bijele i 3 crne kuglice, željeni ishod je kuglica bijele boje $\longrightarrow X \sim B(\frac{2}{5})$

Slučajne varijable koje poprimaju samo dvije vrijednosti često se nazivaju **dihotomne** varijable (te vrijednosti ne trebaju biti 0 i 1).

Slučajne varijable koje poprimaju samo dvije vrijednosti često se nazivaju **dihotomne** varijable (te vrijednosti ne trebaju biti 0 i 1).

Općenito, kod dihotomnih varijabli uvijek možemo jedan ishod označiti s 0 a drugi s 1 (neovisno o interpretaciji uspjeh/neuspjeh) i time dobiti Bernoullijevu slučajnu varijablu.

Očekivanje i varijanca Bernoullijeve distribucije

Očekivanje:

$$\mathbf{E}(X) = \sum_i x_i \cdot p_i = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p.$$

Očekivanje i varijanca Bernoullijeve distribucije

Očekivanje:

$$\mathbf{E}(X) = \sum_i x_i \cdot p_i = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p.$$

Varijanca:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \sum_i x_i^2 \cdot p_i - (\mathbf{E}X)^2 = 0^2 \cdot (1-p) + 1^2 \cdot p - p^2 = \\ &= p - p^2 = (1-p) \cdot p \end{aligned}$$

Binomna distribucija

Promotrimo pokus gdje željeni ishod označimo kao **uspjeh**. Taj ishod se događa s vjerojatnošću p, gdje je $0 < p < 1$.

Binomna distribucija

Promotrimo pokus gdje željeni ishod označimo kao **uspjeh**. Taj ishod se događa s vjerojatnošću p, gdje je $0 < p < 1$. Promatrani pokus **nezavisno** ponovimo $n \in \mathbf{N}$ puta i brojimo koliko puta se dogodio uspjeh.

Binomna distribucija

Promotrimo pokus gdje željeni ishod označimo kao **uspjeh**. Taj ishod se događa s vjerojatnošću p, gdje je $0 < p < 1$. Promatrani pokus **nezavisno** ponovimo $n \in \mathbf{N}$ puta i brojimo koliko puta se dogodio uspjeh. Kažemo da slučajna varijabla X koja označava broj uspjeha u tih n nezavisnih ponavljanja tog pokusa ima **binomnu distribuciju** s parametrima n i p i koristimo oznaku

$$X \sim B(n, p).$$

Binomna distribucija

Promotrimo pokus gdje željeni ishod označimo kao **uspjeh**. Taj ishod se događa s vjerojatnošću p, gdje je $0 < p < 1$. Promatrani pokus **nezavisno** ponovimo $n \in \mathbf{N}$ puta i brojimo koliko puta se dogodio uspjeh. Kažemo da slučajna varijabla X koja označava broj uspjeha u tih n nezavisnih ponavljanja tog pokusa ima **binomnu distribuciju** s parametrima n i p i koristimo oznaku

$$X \sim B(n, p).$$

Primjer. Bacamo simetričnu kocku 3 puta i zanima nas ukupan broj dobivenih šestica:

Binomna distribucija

Promotrimo pokus gdje željeni ishod označimo kao **uspjeh**. Taj ishod se događa s vjerojatnošću p, gdje je $0 < p < 1$. Promatrani pokus **nezavisno** ponovimo $n \in \mathbf{N}$ puta i brojimo koliko puta se dogodio uspjeh. Kažemo da slučajna varijabla X koja označava broj uspjeha u tih n nezavisnih ponavljanja tog pokusa ima **binomnu distribuciju** s parametrima n i p i koristimo oznaku

$$X \sim B(n, p).$$

Primjer. Bacamo simetričnu kocku 3 puta i zanima nas ukupan broj dobivenih šestica:

- uspjeh = "pala je šestica";
- p = vjerojatnost da dobijemo šesticu $= \frac{1}{6}$;
- n = broj ponavljanja pokusa = 3.

Slučajna varijabla X koja označava broj šestica ima binomnu razdiobu s parametrima 3 i $\frac{1}{6}$, odnosno $X \sim B(3, \frac{1}{6})$.

Binomna distribucija

Promotrimo pokus gdje željeni ishod označimo kao **uspjeh**. Taj ishod se događa s vjerojatnošću p, gdje je $0 < p < 1$. Promatrani pokus **nezavisno** ponovimo $n \in \mathbf{N}$ puta i brojimo koliko puta se dogodio uspjeh. Kažemo da slučajna varijabla X koja označava broj uspjeha u tih n nezavisnih ponavljanja tog pokusa ima **binomnu distribuciju** s parametrima n i p i koristimo oznaku

$$X \sim B(n, p).$$

Primjer. Bacamo simetričnu kocku 3 puta i zanima nas ukupan broj dobivenih šestica:

- uspjeh = "pala je šestica";
- p = vjerojatnost da dobijemo šesticu = $\frac{1}{6}$;
- n = broj ponavljanja pokusa = 3.

Slučajna varijabla X koja označava broj šestica ima binomnu razdiobu s parametrima 3 i $\frac{1}{6}$, odnosno $X \sim B(3, \frac{1}{6})$.

Odredimo sada distribuciju slučajne varijable X iz prethodnog primjera. Prvo zaključimo da X može poprimiti samo vrijednosti 0, 1, 2 i 3. Odredimo pripadne vjerojatnosti

$$p_i = \mathbf{P}(X = i), \qquad i = 0, 1, 2, 3.$$

Nezavisnost - podsjetnik

Da bismo mogli odrediti promatrane vjerojatnosti podsjetimo se matematičkog pojma **nezavisnosti događaja**.

Nezavisnost - podsjetnik

Da bismo mogli odrediti promatrane vjerojatnosti podsjetimo se matematičkog pojma **nezavisnosti događaja**.

Sjetimo se, kažemo da su događaji A i B nezavisni ako je

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A \text{ i } B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B).$$

Nezavisnost - podsjetnik

Da bismo mogli odrediti promatrane vjerojatnosti podsjetimo se matematičkog pojma **nezavisnosti događaja**.

Sjetimo se, kažemo da su događaji A i B nezavisni ako je

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A \text{ i } B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B).$$

Analogno, događaji A, B i C su nezavisni, ako su nezavisni A i B, B i C, A i C, te dodatno vrijedi

$$\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(A \text{ i } B \text{ i } C) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(C).$$

Nezavisnost - podsjetnik

Da bismo mogli odrediti promatrane vjerojatnosti podsjetimo se matematičkog pojma **nezavisnosti događaja**.

Sjetimo se, kažemo da su događaji A i B nezavisni ako je

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A \text{ i } B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B).$$

Analogno, događaji A, B i C su nezavisni, ako su nezavisni A i B, B i C, A i C, te dodatno vrijedi

$$\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(A \text{ i } B \text{ i } C) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(C).$$

Sjetimo se da smo pretpostavili da su ishodi uzastopnih ponavljanja pokusa nezavisni. Prema tome, vjerojatnost da je u sva tri bacanja kocke pala šestica je (elementarni događaj možemo označiti s 666):

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(666) &= \mathbf{P}(\text{"palo 6 u 1. bacanju"}) \cdot \mathbf{P}(\text{"palo 6 u 2. bacanju"}) \cdot \mathbf{P}(\text{"palo 6 u 3. bacanju"}) \\ &= p \cdot p \cdot p = \left(\tfrac{1}{6}\right)^3.\end{aligned}$$

Promotrimo sve moguće ishode tri bacanja kocke (0 označava bacanje u kojem nije pala šestica, 1 bacanje u kojem je pala šestica) i pripadne vjerojatnosti:

1.b	2.b	3.b	X
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	2
1	0	0	1
1	0	1	2
1	1	0	2
1	1	1	3

Promotrimo sve moguće ishode tri bacanja kocke (0 označava bacanje u kojem nije pala šestica, 1 bacanje u kojem je pala šestica) i pripadne vjerojatnosti:

$$P(000) \quad = \quad P(0) \cdot P(0) \cdot P(0) =$$

1.b	2.b	3.b	X
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	2
1	0	0	1
1	0	1	2
1	1	0	2
1	1	1	3

Promotrimo sve moguće ishode tri bacanja kocke (0 označava bacanje u kojem nije pala šestica, 1 bacanje u kojem je pala šestica) i pripadne vjerojatnosti:

1.b	2.b	3.b	X
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	2
1	0	0	1
1	0	1	2
1	1	0	2
1	1	1	3

$$\begin{aligned} P(000) &= P(0) \cdot P(0) \cdot P(0) = \\ &= \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{5}{6} = \left(\tfrac{5}{6}\right)^3 \end{aligned}$$

Promotrimo sve moguće ishode tri bacanja kocke (0 označava bacanje u kojem nije pala šestica, 1 bacanje u kojem je pala šestica) i pripadne vjerojatnosti:

1.b	2.b	3.b	X
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	2
1	0	0	1
1	0	1	2
1	1	0	2
1	1	1	3

$$\begin{aligned} P(000) &= P(0)\cdot P(0)\cdot P(0) = \\ &= \tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{5}{6} = \left(\tfrac{5}{6}\right)^3 \\ P(001) &= P(0)\cdot P(0)\cdot P(1) = \end{aligned}$$

Promotrimo sve moguće ishode tri bacanja kocke (0 označava bacanje u kojem nije pala šestica, 1 bacanje u kojem je pala šestica) i pripadne vjerojatnosti:

1.b	2.b	3.b	X
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	2
1	0	0	1
1	0	1	2
1	1	0	2
1	1	1	3

$$\begin{aligned} P(000) &= P(0) \cdot P(0) \cdot P(0) = \\ &= \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{5}{6} = \left(\tfrac{5}{6}\right)^3 \\ P(001) &= P(0) \cdot P(0) \cdot P(1) = \\ &= P(010) = P(100) = \end{aligned}$$

Promotrimo sve moguće ishode tri bacanja kocke (0 označava bacanje u kojem nije pala šestica, 1 bacanje u kojem je pala šestica) i pripadne vjerojatnosti:

1.b	2.b	3.b	X
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	2
1	0	0	1
1	0	1	2
1	1	0	2
1	1	1	3

$$\begin{aligned} P(000) &= P(0)\cdot P(0)\cdot P(0) = \\ &= \tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{5}{6} = \left(\tfrac{5}{6}\right)^3 \\ P(001) &= P(0)\cdot P(0)\cdot P(1) = \\ &= P(010) = P(100) = \\ &= \tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{1}{6} = \left(\tfrac{5}{6}\right)^2 \tfrac{1}{6} \end{aligned}$$

Promotrimo sve moguće ishode tri bacanja kocke (0 označava bacanje u kojem nije pala šestica, 1 bacanje u kojem je pala šestica) i pripadne vjerojatnosti:

1.b	2.b	3.b	X
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	2
1	0	0	1
1	0	1	2
1	1	0	2
1	1	1	3

$$\begin{aligned}
P(000) &= P(0)\cdot P(0)\cdot P(0) = \\
&= \tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{5}{6} = \left(\tfrac{5}{6}\right)^3 \\
P(001) &= P(0)\cdot P(0)\cdot P(1) = \\
&= P(010) = P(100) = \\
&= \tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{1}{6} = \left(\tfrac{5}{6}\right)^2\tfrac{1}{6} \\
P(110) &= P(101) = P(011) = \\
&= P(1)\cdot P(1)\cdot P(0) = \\
&= \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{5}{6} = \left(\tfrac{1}{6}\right)^2\tfrac{5}{6}
\end{aligned}$$

Promotrimo sve moguće ishode tri bacanja kocke (0 označava bacanje u kojem nije pala šestica, 1 bacanje u kojem je pala šestica) i pripadne vjerojatnosti:

1.b	2.b	3.b	X
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	2
1	0	0	1
1	0	1	2
1	1	0	2
1	1	1	3

$$
\begin{aligned}
P(000) &= P(0)\cdot P(0)\cdot P(0) = \\
&= \tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{5}{6} = \left(\tfrac{5}{6}\right)^3 \\
P(001) &= P(0)\cdot P(0)\cdot P(1) = \\
&= P(010) = P(100) = \\
&= \tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{1}{6} = \left(\tfrac{5}{6}\right)^2 \tfrac{1}{6} \\
P(110) &= P(101) = P(011) = \\
&= P(1)\cdot P(1)\cdot P(0) = \\
&= \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{5}{6} = \left(\tfrac{1}{6}\right)^2 \tfrac{5}{6} \\
P(111) &= P(1)\cdot P(1)\cdot P(1) = \\
&= \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{6} = \left(\tfrac{1}{6}\right)^3
\end{aligned}
$$

Sada je:

$$P(X=0) \quad = \quad P(000) = \left(\tfrac{5}{6}\right)^3$$

Sada je:

$$
\begin{aligned}
P(X=0) &= P(000) = \left(\tfrac{5}{6}\right)^3 \\
P(X=1) &= P(100 \text{ ili } 010 \text{ ili } 001) =
\end{aligned}
$$

Sada je:

$$\begin{aligned} P(X=0) &= P(000) = \left(\tfrac{5}{6}\right)^3 \\ P(X=1) &= P(100 \text{ ili } 010 \text{ ili } 001) = \\ &= P(100)+P(010)+P(001) = 3\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\left(\tfrac{5}{6}\right)^2 \end{aligned}$$

Sada je:

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= P(000) = \left(\tfrac{5}{6}\right)^3 \\
P(X=1) &= P(100 \text{ ili } 010 \text{ ili } 001) = \\
&= P(100) + P(010) + P(001) = 3 \cdot \tfrac{1}{6} \cdot \left(\tfrac{5}{6}\right)^2 \\
P(X=2) &= P(110 \text{ ili } 101 \text{ ili } 011) = \\
&= P(110) + P(101) + P(011) = 3 \cdot \tfrac{5}{6} \cdot \left(\tfrac{1}{6}\right)^2
\end{aligned}$$

Sada je:

$$
\begin{aligned}
P(X=0) &= P(000) = \left(\tfrac{5}{6}\right)^3 \\
P(X=1) &= P(100 \text{ ili } 010 \text{ ili } 001) = \\
&= P(100) + P(010) + P(001) = 3 \cdot \tfrac{1}{6} \cdot \left(\tfrac{5}{6}\right)^2 \\
P(X=2) &= P(110 \text{ ili } 101 \text{ ili } 011) = \\
&= P(110) + P(101) + P(011) = 3 \cdot \tfrac{5}{6} \cdot \left(\tfrac{1}{6}\right)^2 \\
P(X=3) &= P(111) = \left(\tfrac{1}{6}\right)^3
\end{aligned}
$$

Sada je:

$$\begin{aligned} P(X=0) &= P(000) = \left(\tfrac{5}{6}\right)^3 \\ P(X=1) &= P(100 \text{ ili } 010 \text{ ili } 001) = \\ &= P(100)+P(010)+P(001) = 3\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\left(\tfrac{5}{6}\right)^2 \\ P(X=2) &= P(110 \text{ ili } 101 \text{ ili } 011) = \\ &= P(110)+P(101)+P(011) = 3\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\left(\tfrac{1}{6}\right)^2 \\ P(X=3) &= P(111) = \left(\tfrac{1}{6}\right)^3 \end{aligned}$$

Distribucija slučajne varijable X:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \left(\tfrac{5}{6}\right)^3 & 3\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\left(\tfrac{5}{6}\right)^2 & 3\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\left(\tfrac{1}{6}\right)^2 & \left(\tfrac{1}{6}\right)^3 \end{pmatrix}.$$

Distribucija binomne slučajne varijable

Neka sada $X \sim B(n, p)$ opet označava broj uspjeha u n nezavisnih ponavljanja pokusa, gdje je vjerojatnost pojedinog uspjeha jednaka p. Prvo uočimo da X može poprimiti jednu od vrijednosti: $0, 1, ..., n$.

Distribucija binomne slučajne varijable

Neka sada $X \sim B(n, p)$ opet označava broj uspjeha u n nezavisnih ponavljanja pokusa, gdje je vjerojatnost pojedinog uspjeha jednaka p. Prvo uočimo da X može poprimiti jednu od vrijednosti: $0, 1, ..., n$. Nadalje, uočimo da je vjerojatnost da se u n ponavljanja pokusa pojavi točno k uspjeha, $k \in \{0, 1, ..., n\}$, je

$$\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Objasnimo pojedinu komponentu u ovom izrazu:

- znamo da se dogodilo točno k uspjeha u n ponavljanja - na $\binom{n}{k}$ načina biramo ponavljanja u kojima su se dogodili uspjesi (neuspjesi su onda dogodili u preostalim ponavljanjima)

Distribucija binomne slučajne varijable

Neka sada $X \sim B(n, p)$ opet označava broj uspjeha u n nezavisnih ponavljanja pokusa, gdje je vjerojatnost pojedinog uspjeha jednaka p. Prvo uočimo da X može poprimiti jednu od vrijednosti: $0, 1, ..., n$. Nadalje, uočimo da je vjerojatnost da se u n ponavljanja pokusa pojavi točno k uspjeha, $k \in \{0, 1, ..., n\}$, je

$$\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Objasnimo pojedinu komponentu u ovom izrazu:

- znamo da se dogodilo točno k uspjeha u n ponavljanja - na $\binom{n}{k}$ načina biramo ponavljanja u kojima su se dogodili uspjesi (neuspjesi su onda dogodili u preostalim ponavljanjima) - u prethodnom primjeru za događaj $\{X = 1\}$ imali smo $\binom{3}{1} = 3$ moguća ishoda u kojima se uspjeh pojavio jednom

Distribucija binomne slučajne varijable

Neka sada $X \sim B(n, p)$ opet označava broj uspjeha u n nezavisnih ponavljanja pokusa, gdje je vjerojatnost pojedinog uspjeha jednaka p. Prvo uočimo da X može poprimiti jednu od vrijednosti: $0, 1, ..., n$. Nadalje, uočimo da je vjerojatnost da se u n ponavljanja pokusa pojavi točno k uspjeha, $k \in \{0, 1, ..., n\}$, je

$$\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Objasnimo pojedinu komponentu u ovom izrazu:

- znamo da se dogodilo točno k uspjeha u n ponavljanja - na $\binom{n}{k}$ načina biramo ponavljanja u kojima su se dogodili uspjesi (neuspjesi su onda dogodili u preostalim ponavljanjima) - u prethodnom primjeru za događaj $\{X = 1\}$ imali smo $\binom{3}{1} = 3$ moguća ishoda u kojima se uspjeh pojavio jednom
- svaki od točno k uspjeha se događa nezavisno s vjerojatnošću p i svaki od $n - k$ neuspjeha nezavisno s vjerojatnošću $q = 1 - p$

Distribucija binomne slučajne varijable

Neka sada $X \sim B(n, p)$ opet označava broj uspjeha u n nezavisnih ponavljanja pokusa, gdje je vjerojatnost pojedinog uspjeha jednaka p. Prvo uočimo da X može poprimiti jednu od vrijednosti: $0, 1, \ldots, n$. Nadalje, uočimo da je vjerojatnost da se u n ponavljanja pokusa pojavi točno k uspjeha, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, je

$$\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Objasnimo pojedinu komponentu u ovom izrazu:

- znamo da se dogodilo točno k uspjeha u n ponavljanja - na $\binom{n}{k}$ načina biramo ponavljanja u kojima su se dogodili uspjesi (neuspjesi su onda dogodili u preostalim ponavljanjima) - u prethodnom primjeru za događaj $\{X = 1\}$ imali smo $\binom{3}{1} = 3$ moguća ishoda u kojima se uspjeh pojavio jednom
- svaki od točno k uspjeha se događa nezavisno s vjerojatnošću p i svaki od $n - k$ neuspjeha nezavisno s vjerojatnošću $q = 1 - p$ - sjetimo se u prethodnom primjeru da su vjerojatnosti ishoda $\mathbf{P}(100)$, $\mathbf{P}(010)$ i $\mathbf{P}(001)$ sve bile jednake $p \cdot q \cdot q$, neovisno o redoslijedu uspjeha i neuspjeha

Distribucija binomne slučajne varijable

Neka sada $X \sim B(n,p)$ opet označava broj uspjeha u n nezavisnih ponavljanja pokusa, gdje je vjerojatnost pojedinog uspjeha jednaka p. Prvo uočimo da X može poprimiti jednu od vrijednosti: $0, 1, ..., n$. Nadalje, uočimo da je vjerojatnost da se u n ponavljanja pokusa pojavi točno k uspjeha, $k \in \{0, 1, ..., n\}$, je

$$\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Objasnimo pojedinu komponentu u ovom izrazu:

- znamo da se dogodilo točno k uspjeha u n ponavljanja - na $\binom{n}{k}$ načina biramo ponavljanja u kojima su se dogodili uspjesi (neuspjesi su onda dogodili u preostalim ponavljanjima) - u prethodnom primjeru za događaj $\{X = 1\}$ imali smo $\binom{3}{1} = 3$ moguća ishoda u kojima se uspjeh pojavio jednom
- svaki od točno k uspjeha se događa nezavisno s vjerojatnošću p i svaki od $n - k$ neuspjeha nezavisno s vjerojatnošću $q = 1 - p$ - sjetimo se u prethodnom primjeru da su vjerojatnosti ishoda $\mathbf{P}(100)$, $\mathbf{P}(010)$ i $\mathbf{P}(001)$ sve bile jednake $p \cdot q \cdot q$, neovisno o redoslijedu uspjeha i neuspjeha - vjerojatnost uspjeha se javlja k puta i vjerojatnost neuspjeha $n - k$ puta - dobivamo $p^k \cdot q^{n-k}$.

Distribucija binomne slučajne varijable u Excelu

Ako je $X \sim B(n, p)$ onda $\mathbf{P}(X = k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$ možemo odrediti i pozivanjem naredve z Excelu:

```
=BINOM.DIST(k, n, p, FALSE)
```

Binomna slučajna varijabla kao suma **nezavisnih** Bernoullijevih

Definiramo slučajne varijable

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{u } i\text{-tom ponavljanju pokusa se dogodio uspjeh} \\ 0 & \text{u } i\text{-tom ponavljanju pokusa se dogodio neuspjeh} \end{cases}$$

i uočimo da je $X_i \sim B(p)$.

Binomna slučajna varijabla kao suma **nezavisnih** Bernoullijevih

Definiramo slučajne varijable

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{u } i\text{-tom ponavljanju pokusa se dogodio uspjeh} \\ 0 & \text{u } i\text{-tom ponavljanju pokusa se dogodio neuspjeh} \end{cases}$$

i uočimo da je $X_i \sim B(p)$. Tada ukupan broj uspjeha u n ponavljanja pokusa možemo zapisati kao

$$X = X_1 + \ldots + X_n.$$

Binomna slučajna varijabla kao suma **nezavisnih** Bernoullijevih

Definiramo slučajne varijable

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{u } i\text{-tom ponavljanju pokusa se dogodio uspjeh} \\ 0 & \text{u } i\text{-tom ponavljanju pokusa se dogodio neuspjeh} \end{cases}$$

i uočimo da je $X_i \sim B(p)$. Tada ukupan broj uspjeha u n ponavljanja pokusa možemo zapisati kao

$$X = X_1 + \ldots + X_n.$$

Sjetite se da smo pretpostavili da su ishodi uzastopnih ponavljanja pokusa **nezavisni**. To ćemo matematički modelirati tako što ćemo pretpostaviti da su slučajne varijable $X_1, X_2, \ldots, X_n$ koje modeliraju ishode pojedinih ponavljanja pokusa **nezavisne slučajne varijable**.

Nezavisne slučajne varijable

Za slučajne varijable X i Y reći ćemo da su **nezavisne** ako su svi događaji oblika

$$A = \{X = x\} \text{ i } B = \{Y = y\}$$

nezavisni za proizvoljne vrijednosti x i y

Nezavisne slučajne varijable

Za slučajne varijable X i Y reći ćemo da su **nezavisne** ako su svi događaji oblika

$$A = \{X = x\} \text{ i } B = \{Y = y\}$$

nezavisni za proizvoljne vrijednosti x i y, odnosno ako vrijedi da je

$$\mathbf{P}(X = x \text{ i } Y = y) = \mathbf{P}(X = x) \cdot \mathbf{P}(Y = y).$$

Nezavisne slučajne varijable

Za slučajne varijable X i Y reći ćemo da su **nezavisne** ako su svi događaji oblika

$$A = \{X = x\} \text{ i } B = \{Y = y\}$$

nezavisni za proizvoljne vrijednosti x i y, odnosno ako vrijedi da je

$$\mathbf{P}(X = x \text{ i } Y = y) = \mathbf{P}(X = x) \cdot \mathbf{P}(Y = y).$$

Definiciji možemo proširiti i na više slučajnih varijabli - kažemo da su $X_1, \dots, X_n$ nezavisne slučajne varijable ako vrijedi

$$\mathbf{P}(X_1 = x_1 \text{ i } X_2 = x_2 \text{ i } \dots \text{ i } X_n = x_n) = \mathbf{P}(X_1 = x_1) \cdot \mathbf{P}(X_2 = x_2) \dots \mathbf{P}(X_n = x_n)$$

za sve vrijednosti $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}$.

Očekivanje i varijanca zbroja slučajnih varijabli

Na prošlom satu smo već rekli da je očekivanje sume dvaju slučajnih varijabli uvijek jednako sumi njihovih očekivanja. Odnosno, ako su X i Y dvije slučajne varijable tada je

$$\mathbf{E}(X+Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y).$$

Također smo spomenuli da analogno svojstvo ne vrijedi općenito za varijancu. Ali ako su X i Y **nezavisne** slučajne varijable tada je

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y).$$

Očekivanje i varijanca zbroja slučajnih varijabli

Na prošlom satu smo već rekli da je očekivanje sume dvaju slučajnih varijabli uvijek jednako sumi njihovih očekivanja. Odnosno, ako su X i Y dvije slučajne varijable tada je

$$\mathbf{E}(X+Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y).$$

Također smo spomenuli da analogno svojstvo ne vrijedi općenito za varijancu. Ali ako su X i Y **nezavisne** slučajne varijable tada je

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y).$$

Važno je napomenuti da ako slučajne varijable nisu nezavisne tada gornja formula za varijancu ne treba vrijediti.

Očekivanje i varijanca zbroja slučajnih varijabli

Na prošlom satu smo već rekli da je očekivanje sume dvaju slučajnih varijabli uvijek jednako sumi njihovih očekivanja. Odnosno, ako su X i Y dvije slučajne varijable tada je

$$\mathbf{E}(X+Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y).$$

Također smo spomenuli da analogno svojstvo ne vrijedi općenito za varijancu. Ali ako su X i Y **nezavisne** slučajne varijable tada je

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y).$$

Važno je napomenuti da ako slučajne varijable nisu nezavisne tada gornja formula za varijancu ne treba vrijediti.

Korištenjem ovih formula i prethodno pokazane činjenice da binomnu slučajnu varijablu $B(n, p)$ možemo prikazati kao sumu n nezavisnih Bernoullijevih $B(p)$, odredit ćemo očekivanje i varijancu binomne slučajne varijable.

Očekivanje i varijanca binomne distribucije

Neka je X binomna slučajna varijabla definirana kao broj uspješnih ishoda u n nezavisnih ponavljanja pokusa. Slučajnu varijablu X možemo prikazati kao

$$X = X_1 + \ldots + X_n$$

gdje je $X_i \sim B(p)$ ishod i-tog pokusa, $i = 1, \ldots, n$.

Očekivanje i varijanca binomne distribucije

Neka je X binomna slučajna varijabla definirana kao broj uspješnih ishoda u n nezavisnih ponavljanja pokusa. Slučajnu varijablu X možemo prikazati kao

$$X = X_1 + \ldots + X_n$$

gdje je $X_i \sim B(p)$ ishod i-tog pokusa, $i = 1, \ldots, n$. Za nezavisne pokuse su i slučajne varijable $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne.

Uz p vjerojatnost uspjeha pojedinog ponavljanja pokusa, pokazali smo da je

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X_1) &= \mathbf{E}(X_2) = \ldots = \mathbf{E}(X_n) = p \quad \text{i} \\ \mathrm{Var}(X_1) &= \mathrm{Var}(X_2) = \ldots = \mathrm{Var}(X_n) = p(1-p). \end{aligned}$$

Očekivanje i varijanca binomne distribucije

Neka je X binomna slučajna varijabla definirana kao broj uspješnih ishoda u n nezavisnih ponavljanja pokusa. Slučajnu varijablu X možemo prikazati kao

$$X = X_1 + \ldots + X_n$$

gdje je $X_i \sim B(p)$ ishod i-tog pokusa, $i = 1, \ldots, n$. Za nezavisne pokuse su i slučajne varijable $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne.

Uz p vjerojatnost uspjeha pojedinog ponavljanja pokusa, pokazali smo da je

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X_1) &= \mathbf{E}(X_2) = \ldots = \mathbf{E}(X_n) = p \quad \text{i} \\ \mathrm{Var}(X_1) &= \mathrm{Var}(X_2) = \ldots = \mathrm{Var}(X_n) = p(1-p). \end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X) &= \mathbf{E}(X_1 + X_2 + \ldots X_n) = \mathbf{E}(X_1) + \mathbf{E}(X_2) + \ldots + \mathbf{E}(Xn) = \\ &= p + p + \ldots + p = n \cdot p \end{aligned}$$

Očekivanje i varijanca binomne distribucije

Neka je X binomna slučajna varijabla definirana kao broj uspješnih ishoda u n nezavisnih ponavljanja pokusa. Slučajnu varijablu X možemo prikazati kao

$$X = X_1 + \ldots + X_n$$

gdje je $X_i \sim B(p)$ ishod i-tog pokusa, $i = 1, \ldots, n$. Za nezavisne pokuse su i slučajne varijable $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne.

Uz p vjerojatnost uspjeha pojedinog ponavljanja pokusa, pokazali smo da je

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X_1) &= \mathbf{E}(X_2) = \ldots = \mathbf{E}(X_n) = p \quad \text{i} \\
\mathrm{Var}(X_1) &= \mathrm{Var}(X_2) = \ldots = \mathrm{Var}(X_n) = p(1-p).
\end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \mathbf{E}(X_1 + X_2 + \ldots X_n) = \mathbf{E}(X_1) + \mathbf{E}(X_2) + \ldots + \mathbf{E}(Xn) = \\
&= p + p + \ldots + p = n \cdot p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{Var}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \\
&= \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + \ldots + \mathrm{Var}(X_n) = \\
&= n \cdot p \cdot (1-p)
\end{aligned}$$

DZ. Odredite distribuciju vjerojatnosti, očekivanje i varijancu za broj pojavljivanja broja 6 kod bacanja pet igraćih kocaka.

Rješenje.

Bacanje pet kocaka odgovara pokusu od pet uzastopnih bacanja kocke (pet puta ponavljamo isti pokus). Vjerojatnost pozitivnog ishoda (da padne broj 6) u jednom bacanju je

$$p = \frac{1}{6}$$

a vjerojatnost negativnog ishoda (da ne padne broj 6) je

$$q = 1 - p = \frac{5}{6}.$$

Dakle, radi se o binomnoj razdiobi s parametrima

$$n = 5 \quad \text{i} \quad p = \frac{1}{6}.$$

Očekivanje i varijanca:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X) &= n \cdot p = 5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6} = 0.833 \\ \mathrm{Var}(X) &= n \cdot p \cdot (1 - p) = 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36} = 0.694 \end{aligned}$$

Distribucija vjerojatnosti zadana je s

$$P(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{5}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{5-k}$$

za $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Distribucija vjerojatnosti zadana je s

$$P(k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k} = \begin{pmatrix} 5 \\ k \end{pmatrix} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{5-k}$$

za $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$

$$P(0) \quad = \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^{5-0} = \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0.402$$

Distribucija vjerojatnosti zadana je s

$$P(k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k} = \begin{pmatrix} 5 \\ k \end{pmatrix} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{5-k}$$

za $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

$$P(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^{5-0} = \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0.402$$

$$P(1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^{5-1} = 5\left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.402$$

Distribucija vjerojatnosti zadana je s

$$P(k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k} = \begin{pmatrix} 5 \\ k \end{pmatrix} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{5-k}$$

za $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

$$P(0) \quad = \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^{5-0} = \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0.402$$

$$P(1) \quad = \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^{5-1} = 5 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.402$$

$$P(2) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{5-2} = 10\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0.161$$

$$P(2) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{5-2} = 10\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0.161$$

$$P(3) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^{5-3} = 10\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0.032$$

$$P(2) = \binom{5}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{5-2} = 10 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0.161$$

$$P(3) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^{5-3} = 10 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0.032$$

$$P(4) = \binom{5}{4} \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^{5-4} = 5 \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right) = 0.003$$

$$P(2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{5-2} = 10 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0.161$$

$$P(3) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^{5-3} = 10 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0.032$$

$$P(4) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^{5-4} = 5 \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right) = 0.003$$

$$P(5) = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{6}\right)^5 \left(\frac{5}{6}\right)^{5-5} = \left(\frac{1}{6}\right)^5 = 0.0001$$

$$P(2) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{5-2} = 10\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0.161$$

$$P(3) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^{5-3} = 10\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0.032$$

$$P(4) = \binom{5}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^{5-4} = 5\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right) = 0.003$$

$$P(5) = \binom{5}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^{5-5} = \left(\frac{1}{6}\right)^5 = 0.0001$$

Usporedite dobivene vrijednosti s vrijednostima koje dobijete u Excelu korištenjem funkcije `BINOM.DIST` .

Primjer.
Izračunajte vjerojatnost da će se kod bacanja pet kocaka broj 6

a) pojaviti barem 4 puta.
b) pojaviti barem jednom.
c) pojaviti barem dva puta.

Primjer.
Izračunajte vjerojatnost da će se kod bacanja pet kocaka broj 6

a) pojaviti barem 4 puta.
b) pojaviti barem jednom.
c) pojaviti barem dva puta.

Rješenje. Distribuciju vjerojatnosti ćete izračunati za DZ:

k	$P(k)$
0	0.4019
1	0.4019
2	0.1608
3	0.0321
4	0.0032
5	0.0001

a) Vjerojatnost da će se broj 6 pojaviti barem 4 puta:

$$P(4 \text{ ili } 5) = P(4) + P(5) = 0.0032 + 0.0001 = 0.0033$$

a) Vjerojatnost da će se broj 6 pojaviti barem 4 puta:

$$P(4 \text{ ili } 5) = P(4) + P(5) = 0.0032 + 0.0001 = 0.0033$$

b) Vjerojatnost da će se broj 6 pojaviti barem jednom:

$$P(1 \text{ ili } 2 \text{ ili } 3 \text{ ili } 4 \text{ ili } 5) = 1 - P(0) = 1 - 0.4019 = 0.5981$$

a) Vjerojatnost da će se broj 6 pojaviti barem 4 puta:

$$P(4 \text{ ili } 5) = P(4) + P(5) = 0.0032 + 0.0001 = 0.0033$$

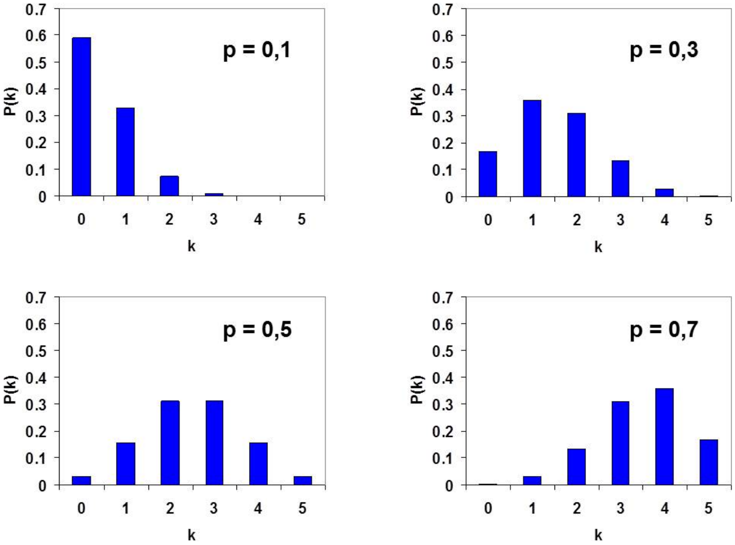
b) Vjerojatnost da će se broj 6 pojaviti barem jednom:

$$P(1 \text{ ili } 2 \text{ ili } 3 \text{ ili } 4 \text{ ili } 5) = 1 - P(0) = 1 - 0.4019 = 0.5981$$

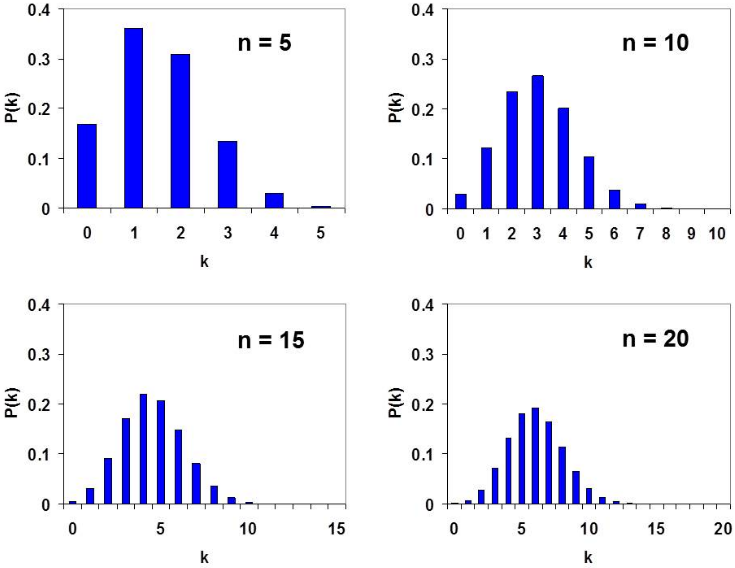
c) Vjerojatnost da će se broj 6 pojaviti barem 2 puta:

$$P(2 \text{ ili } 3 \text{ ili } 4 \text{ ili } 5) = 1 - P(0) - P(1) = 1 - 0.4019 - 0.4019 = 0.1962$$

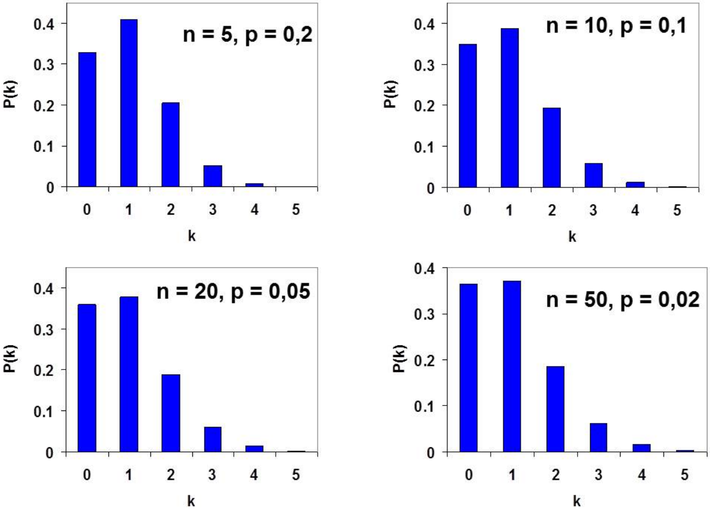
Binomna razdioba vjerojatnosti, $n = 5$



Binomna razdioba vjerojatnosti, $p = 0.3$



Binomna razdioba vjerojatnosti, $n \cdot p = 1$



Beskonačan prebrojiv skup vrijednosti slučajne varijable

Promotrimo prvi primjer slučajne varijable koja može poprimiti beskonačno, ali **prebrojivo** mnogo različitih vrijednosti.

Primjer. Slučajna varijabla X je definirana kao broj bacanja kocke do pojave prve šestice. Odredite distribuciju vjerojatnosti slučajne varijable X i odredite vjerojatnost da ćemo dobiti prvu šesticu u 5-tom bacanju.

Beskonačan prebrojiv skup vrijednosti slučajne varijable

Promotrimo prvi primjer slučajne varijable koja može poprimiti beskonačno, ali **prebrojivo** mnogo različitih vrijednosti.

Primjer. Slučajna varijabla X je definirana kao broj bacanja kocke do pojave prve šestice. Odredite distribuciju vjerojatnosti slučajne varijable X i odredite vjerojatnost da ćemo dobiti prvu šesticu u 5-tom bacanju.

Rješenje. Moguće vrijednosti slučajne varijable su

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Uočite da vrijednost slučajne varijable može biti bilo koji prirodan broj.

Beskonačan prebrojiv skup vrijednosti slučajne varijable

Promotrimo prvi primjer slučajne varijable koja može poprimiti beskonačno, ali **prebrojivo** mnogo različitih vrijednosti.
Primjer. Slučajna varijabla X je definirana kao broj bacanja kocke do pojave prve šestice. Odredite distribuciju vjerojatnosti slučajne varijable X i odredite vjerojatnost da ćemo dobiti prvu šesticu u 5-tom bacanju.

Rješenje. Moguće vrijednosti slučajne varijable su

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

Uočite da vrijednost slučajne varijable može biti bilo koji prirodan broj.

Vjerojatnost da dobijemo šesticu (uspjeh) je

$$p = \tfrac{1}{6},$$

a vjerojatnost neuspjeha je tada

$$q = 1 - p = \tfrac{5}{6}.$$

Neka je kao i prije s 1 označeno bacanje u kojem se pojavila šestica, a s 0 bacanje u kojem se nije pojavila šestica. Korištenjem činjenice da su ishodi pojedinih bacanja kocke **nezavisni**, dobivamo da je za $k \in \mathbf{N}$

$$\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(\underbrace{00\ldots0}_{k-1}1)$$

Neka je kao i prije s 1 označeno bacanje u kojem se pojavila šestica, a s 0 bacanje u kojem se nije pojavila šestica. Korištenjem činjenice da su ishodi pojedinih bacanja kocke **nezavisni**, dobivamo da je za $k \in \mathbf{N}$

$$\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(\underbrace{00\ldots0}_{k-1}1) = \underbrace{q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{k-1} \cdot p = q^{k-1}p = \left(\tfrac{5}{6}\right)^{k-1} \tfrac{1}{6}.$$

□

Slučajnu varijablu X s ovom distribucijom nazivamo **geometrijska slučajna varijabla** s parametrom p i označavamo

$$X \sim G(p).$$

Neka je kao i prije s 1 označeno bacanje u kojem se pojavila šestica, a s 0 bacanje u kojem se nije pojavila šestica. Korištenjem činjenice da su ishodi pojedinih bacanja kocke **nezavisni**, dobivamo da je za $k \in \mathbf{N}$

$$\mathbf{P}(X=k)=\mathbf{P}(\underbrace{00\ldots0}_{k-1}1)=\underbrace{q\cdot q\cdot\ldots\cdot q}_{k-1}\cdot p=q^{k-1}p=\left(\tfrac{5}{6}\right)^{k-1}\tfrac{1}{6}.$$

□

Slučajnu varijablu X s ovom distribucijom nazivamo **geometrijska slučajna varijabla** s parametrom p i označavamo

$$X\sim G(p).$$

Njena interpretacija je ukupan broj nezavisnih ponavljanja pokusa do pojave prvog uspjeha, gdje je vjerojatnost uspjeha u svakom ponavljanju jednaka p, $0<p<1$.

Neka je kao i prije s 1 označeno bacanje u kojem se pojavila šestica, a s 0 bacanje u kojem se nije pojavila šestica. Korištenjem činjenice da su ishodi pojedinih bacanja kocke **nezavisni**, dobivamo da je za $k \in \mathbf{N}$

$$\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(\underbrace{00\ldots0}_{k-1}1) = \underbrace{q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{k-1} \cdot p = q^{k-1}p = \left(\tfrac{5}{6}\right)^{k-1}\tfrac{1}{6}.$$

$\square$

Slučajnu varijablu X s ovom distribucijom nazivamo **geometrijska slučajna varijabla** s parametrom p i označavamo

$$X \sim G(p).$$

Njena interpretacija je ukupan broj nezavisnih ponavljanja pokusa do pojave prvog uspjeha, gdje je vjerojatnost uspjeha u svakom ponavljanju jednaka p, $0 < p < 1$.

Napomena. Usporedite ovu interpretaciju s interpretacijom binomne distribucije. Treba biti oprezan pri razlikovanju ovih distribucija!

Neka je kao i prije s 1 označeno bacanje u kojem se pojavila šestica, a s 0 bacanje u kojem se nije pojavila šestica. Korištenjem činjenice da su ishodi pojedinih bacanja kocke **nezavisni**, dobivamo da je za $k \in \mathbf{N}$

$$\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(\underbrace{00\ldots0}_{k-1}1) = \underbrace{q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{k-1} \cdot p = q^{k-1}p = \left(\tfrac{5}{6}\right)^{k-1}\tfrac{1}{6}.$$

$\square$

Slučajnu varijablu X s ovom distribucijom nazivamo **geometrijska slučajna varijabla** s parametrom p i označavamo

$$X \sim G(p).$$

Njena interpretacija je ukupan broj nezavisnih ponavljanja pokusa do pojave prvog uspjeha, gdje je vjerojatnost uspjeha u svakom ponavljanju jednaka p, $0 < p < 1$.

Napomena. Usporedite ovu interpretaciju s interpretacijom binomne distribucije. Treba biti oprezan pri razlikovanju ovih distribucija!

Pokaže se da je $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{p}$ i $\mathrm{Var}(X) = \frac{q}{p^2}$.

Poissonova distribucija

Kažemo da slučajna varijabla X ima **Poissonovu distribuciju** s parametrom $\lambda > 0$ ako X poprima vrijednosti iz skupa $\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ s pripadnim vjerojatnostima

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

i označavamo $X \sim P(\lambda)$.

Poissonova distribucija

Kažemo da slučajna varijabla X ima **Poissonovu distribuciju** s parametrom $\lambda > 0$ ako X poprima vrijednosti iz skupa $\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ s pripadnim vjerojatnostima

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

i označavamo $X \sim P(\lambda)$.

Interpretacija Poissonove distribucije: Pretpostavimo da je u iznimno velikoj populaciji relativno malo **označenih** jedinki. Ako uzmemo veliki uzorak iz populacije ispostavlja se da razdioba broja obilježenih jedinki u uzorku ima Poissonovu distribuciju.

Poissonova distribucija

Kažemo da slučajna varijabla X ima **Poissonovu distribuciju** s parametrom $\lambda > 0$ ako X poprima vrijednosti iz skupa $\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ s pripadnim vjerojatnostima

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

i označavamo $X \sim P(\lambda)$.

Interpretacija Poissonove distribucije: Pretpostavimo da je u iznimno velikoj populaciji relativno malo **označenih** jedinki. Ako uzmemo veliki uzorak iz populacije ispostavlja se da razdioba broja obilježenih jedinki u uzorku ima Poissonovu distribuciju. Kako odrediti parametar $\lambda > 0$?

Poissonova distribucija

Kažemo da slučajna varijabla X ima **Poissonovu distribuciju** s parametrom $\lambda > 0$ ako X poprima vrijednosti iz skupa $\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ s pripadnim vjerojatnostima

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

i označavamo $X \sim P(\lambda)$.

Interpretacija Poissonove distribucije: Pretpostavimo da je u iznimno velikoj populaciji relativno malo **označenih** jedinki. Ako uzmemo veliki uzorak iz populacije ispostavlja se da razdioba broja obilježenih jedinki u uzorku ima Poissonovu distribuciju. Kako odrediti parametar $\lambda > 0$?

Pokaže se da je očekivanje za Poissonovu distribuciju:

$$\mathbf{E}(X) = \lambda,$$

te da je varijanca jednaka $\mathrm{Var}(X) = \lambda$.

Poissonova distribucija

Kažemo da slučajna varijabla X ima **Poissonovu distribuciju** s parametrom $\lambda > 0$ ako X poprima vrijednosti iz skupa $\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ s pripadnim vjerojatnostima

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

i označavamo $X \sim P(\lambda)$.

Interpretacija Poissonove distribucije: Pretpostavimo da je u iznimno velikoj populaciji relativno malo **označenih** jedinki. Ako uzmemo veliki uzorak iz populacije ispostavlja se da razdioba broja obilježenih jedinki u uzorku ima Poissonovu distribuciju. Kako odrediti parametar $\lambda > 0$?

Pokaže se da je očekivanje za Poissonovu distribuciju:

$$\mathbf{E}(X) = \lambda,$$

te da je varijanca jednaka $\mathrm{Var}(X) = \lambda$.

Primjer Pretpostavimo da želimo prebrojati broj izvjesnih rijetkih planktona u uzorku od 3l vode iz Jadranskog mora, pri čemu znamo da je očekivani broj tih planktona u 1l vode 3.8. Označimo broj planktona s X.

Poissonova distribucija

Kažemo da slučajna varijabla X ima **Poissonovu distribuciju** s parametrom $\lambda > 0$ ako X poprima vrijednosti iz skupa $\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ s pripadnim vjerojatnostima

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

i označavamo $X \sim P(\lambda)$.

Interpretacija Poissonove distribucije: Pretpostavimo da je u iznimno velikoj populaciji relativno malo **označenih** jedinki. Ako uzmemo veliki uzorak iz populacije ispostavlja se da razdioba broja obilježenih jedinki u uzorku ima Poissonovu distribuciju. Kako odrediti parametar $\lambda > 0$?

Pokaže se da je očekivanje za Poissonovu distribuciju:

$$\mathbf{E}(X) = \lambda,$$

te da je varijanca jednaka $\mathrm{Var}(X) = \lambda$.

Primjer Pretpostavimo da želimo prebrojati broj izvjesnih rijetkih planktona u uzorku od 3l vode iz Jadranskog mora, pri čemu znamo da je očekivani broj tih planktona u 1l vode 3.8. Označimo broj planktona s X. $\longrightarrow$ $X \sim P(3 \cdot 3.8)$.

Funkcija distribucije

Neka je X slučajna varijabla. Tada distribuciju slučajne varijable X možemo zadati i preko pripadne **funkcije distribucije** $F_X : \mathbf{R} \to [0, 1]$ na sljedeći način

$$F_X(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x), \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Funkcija distribucije

Neka je X slučajna varijabla. Tada distribuciju slučajne varijable X možemo zadati i preko pripadne **funkcije distribucije** $F_X : \mathbf{R} \to [0,1]$ na sljedeći način

$$F_X(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x), \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Primjer. Kolika je vjerojatnost da će u 5 bacanja kocke biti postignuto

a) najviše 3 šestice

Funkcija distribucije

Neka je X slučajna varijabla. Tada distribuciju slučajne varijable X možemo zadati i preko pripadne **funkcije distribucije** $F_X : \mathbf{R} \to [0,1]$ na sljedeći način

$$F_X(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x), \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Primjer. Kolika je vjerojatnost da će u 5 bacanja kocke biti postignuto

a) najviše 3 šestice $\longrightarrow$ $\mathbf{P}(X \leqslant 3) = F_X(3) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3$;

Funkcija distribucije

Neka je X slučajna varijabla. Tada distribuciju slučajne varijable X možemo zadati i preko pripadne **funkcije distribucije** $F_X : \mathbf{R} \to [0,1]$ na sljedeći način

$$F_X(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x), \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Primjer. Kolika je vjerojatnost da će u 5 bacanja kocke biti postignuto

a) najviše 3 šestice $\longrightarrow$ $\mathbf{P}(X \leqslant 3) = F_X(3) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3$;

b) barem 3 šestice.

Funkcija distribucije

Neka je X slučajna varijabla. Tada distribuciju slučajne varijable X možemo zadati i preko pripadne **funkcije distribucije** $F_X : \mathbf{R} \to [0,1]$ na sljedeći način

$$F_X(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x), \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Primjer. Kolika je vjerojatnost da će u 5 bacanja kocke biti postignuto

a) najviše 3 šestice $\longrightarrow$ $\mathbf{P}(X \leqslant 3) = F_X(3) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3$;

b) barem 3 šestice. $\longrightarrow$ $\mathbf{P}(X \geqslant 3) = 1 - \mathbf{P}(X \leqslant 2) = 1 - F_X(2) = 1 - p_0 - p_1 - p_2$.

Funkcija distribucije

Neka je X slučajna varijabla. Tada distribuciju slučajne varijable X možemo zadati i preko pripadne **funkcije distribucije** $F_X : \mathbf{R} \to [0,1]$ na sljedeći način

$$F_X(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x), \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Primjer. Kolika je vjerojatnost da će u 5 bacanja kocke biti postignuto

a) najviše 3 šestice $\longrightarrow$ $\mathbf{P}(X \leqslant 3) = F_X(3) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3$;

b) barem 3 šestice.$\longrightarrow$ $\mathbf{P}(X \geqslant 3) = 1 - \mathbf{P}(X \leqslant 2) = 1 - F_X(2) = 1 - p_0 - p_1 - p_2$.

Vjerojatnosti možete odrediti za DZ preko tablice distribucije od X na slideu 21. Također, može se koristiti gotova naredva u Excelu

$F_X(3)$=`BINOM.DIST(3, 5, 1/6, TRUE).`

Funkcija distribucije

Neka je X slučajna varijabla. Tada distribuciju slučajne varijable X možemo zadati i preko pripadne **funkcije distribucije** $F_X : \mathbf{R} \to [0,1]$ na sljedeći način

$$F_X(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x), \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Primjer. Kolika je vjerojatnost da će u 5 bacanja kocke biti postignuto

a) najviše 3 šestice $\longrightarrow$ $\mathbf{P}(X \leqslant 3) = F_X(3) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3$;

b) barem 3 šestice.$\longrightarrow$ $\mathbf{P}(X \geqslant 3) = 1 - \mathbf{P}(X \leqslant 2) = 1 - F_X(2) = 1 - p_0 - p_1 - p_2$.

Vjerojatnosti možete odrediti za DZ preko tablice distribucije od X na slideu 21. Također, može se koristiti gotova naredva u Excelu

$F_X(3)$=`BINOM.DIST(3, 5, 1/6, TRUE).`

Primjer. Što kada bismo umjesto 5 bacanja promatrali 300 bacanja simetrične kocke?

Funkcija distribucije

Neka je X slučajna varijabla. Tada distribuciju slučajne varijable X možemo zadati i preko pripadne **funkcije distribucije** $F_X : \mathbf{R} \to [0,1]$ na sljedeći način

$$F_X(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x), \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Primjer. Kolika je vjerojatnost da će u 5 bacanja kocke biti postignuto

a) najviše 3 šestice $\longrightarrow$ $\mathbf{P}(X \leqslant 3) = F_X(3) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3;$

b) barem 3 šestice. $\longrightarrow$ $\mathbf{P}(X \geqslant 3) = 1 - \mathbf{P}(X \leqslant 2) = 1 - F_X(2) = 1 - p_0 - p_1 - p_2.$

Vjerojatnosti možete odrediti za DZ preko tablice distribucije od X na slideu 21. Također, može se koristiti gotova naredva u Excelu

$F_X(3)$=`BINOM.DIST(3, 5, 1/6, TRUE).`

Primjer. Što kada bismo umjesto 5 bacanja promatrali 300 bacanja simetrične kocke? Zamislite da trebamo odrediti vjerojatnost da je palo najviše 250 šestica.

Funkcija distribucije

Neka je X slučajna varijabla. Tada distribuciju slučajne varijable X možemo zadati i preko pripadne **funkcije distribucije** $F_X : \mathbf{R} \to [0,1]$ na sljedeći način

$$F_X(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x), \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Primjer. Kolika je vjerojatnost da će u 5 bacanja kocke biti postignuto

a) najviše 3 šestice $\longrightarrow$ $\mathbf{P}(X \leqslant 3) = F_X(3) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3$;

b) barem 3 šestice.$\longrightarrow$ $\mathbf{P}(X \geqslant 3) = 1 - \mathbf{P}(X \leqslant 2) = 1 - F_X(2) = 1 - p_0 - p_1 - p_2$.

Vjerojatnosti možete odrediti za DZ preko tablice distribucije od X na slideu 21. Također, može se koristiti gotova naredva u Excelu

$F_X(3)$=`BINOM.DIST(3, 5, 1/6, TRUE).`

Primjer. Što kada bismo umjesto 5 bacanja promatrali 300 bacanja simetrične kocke? Zamislite da trebamo odrediti vjerojatnost da je palo najviše 250 šestica. Gornji postupak je veoma nepraktičan - koriste se **aproksimacije** - o tome više nešto kasnije.