Statistika

Vanja Wagner

3. Osnove vjerojatnosti

Osnove vjerojatnosti

Cilj ovog poglavlja je prikazati osnovne pojmove i tehnike iz teorije vjerojatnosti koji su nam nužni za postavljanje i razumijevanje inferencijalnih statističkih procedura.

Osnove vjerojatnosti

Cilj ovog poglavlja je prikazati osnovne pojmove i tehnike iz teorije vjerojatnosti koji su nam nužni za postavljanje i razumijevanje inferencijalnih statističkih procedura.

Želimo prikazati najčešće korištene matematičke modele kojima ćemo opisivati razne tipove pokusa, procjena i donošenja statističkih zaključaka temeljenih na nekim podacima.

Osnove vjerojatnosti

Cilj ovog poglavlja je prikazati osnovne pojmove i tehnike iz teorije vjerojatnosti koji su nam nužni za postavljanje i razumijevanje inferencijalnih statističkih procedura.

Želimo prikazati najčešće korištene matematičke modele kojima ćemo opisivati razne tipove pokusa, procjena i donošenja statističkih zaključaka temeljenih na nekim podacima.

Ključni pojmovi koji zahtijevaju matematičku formalizaciju: događaj (slučajni ishod pokusa), vjerojatnost događaja (koliko je izgledno da se takav ishod dogodi), slučajna varijabla (slučajna varijabla čije vrijednosti mjerimo na nekom uzorku) i njena distribucija (koliko je vjerojatno da slučajna vrijednost poprimi neke vrijednosti), očekivanje (kolika je srednja ili očekivana vrijednost neke slučajne vrijednosti), . . .

- **Slučajan pokus** je svaki neizvjesan proces koji završava nekim slučajnim ishodom, odnosno **elementarnim događajem**.
- **Prostor elementarnih događaja** je skup svih elementarnih događaja, odnosno potencijalnih ishoda jednog pokusa.
- **Događaj** je skup koji se sastoji od jednog ili više elementarnih događaja.

- **Slučajan pokus** je svaki neizvjesan proces koji završava nekim slučajnim ishodom, odnosno **elementarnim događajem**.
- **Prostor elementarnih događaja** je skup svih elementarnih događaja, odnosno potencijalnih ishoda jednog pokusa.
- **Događaj** je skup koji se sastoji od jednog ili više elementarnih događaja.

Primjer:

Vjerojatnosni eksperiment	Prostor elementarnih događaja	Primjer događaja

- **Slučajan pokus** je svaki neizvjesan proces koji završava nekim slučajnim ishodom, odnosno **elementarnim događajem**.
- **Prostor elementarnih događaja** je skup svih elementarnih događaja, odnosno potencijalnih ishoda jednog pokusa.
- **Događaj** je skup koji se sastoji od jednog ili više elementarnih događaja.

Primjer:

Vjerojatnosni eksperiment	Prostor elementarnih događaja	Primjer događaja
Bacanje novčića	{Pismo, glava}	"Palo je pismo"={Pismo}

- **Slučajan pokus** je svaki neizvjesan proces koji završava nekim slučajnim ishodom, odnosno **elementarnim događajem**.
- **Prostor elementarnih događaja** je skup svih elementarnih događaja, odnosno potencijalnih ishoda jednog pokusa.
- **Događaj** je skup koji se sastoji od jednog ili više elementarnih događaja.

Primjer:

Vjerojatnosni eksperiment	Prostor elementarnih događaja	Primjer događaja
Bacanje novčića	{Pismo, glava}	"Palo je pismo"={Pismo}
Bacanje kocke	{1, 2, 3, 4, 5, 6}	"Pao je paran broj"={2,4,6}

- **Slučajan pokus** je svaki neizvjesan proces koji završava nekim slučajnim ishodom, odnosno **elementarnim događajem**.
- **Prostor elementarnih događaja** je skup svih elementarnih događaja, odnosno potencijalnih ishoda jednog pokusa.
- **Događaj** je skup koji se sastoji od jednog ili više elementarnih događaja.

Primjer:

Vjerojatnosni eksperiment	Prostor elementarnih događaja	Primjer događaja
Bacanje novčića	{Pismo, glava}	"Palo je pismo"={Pismo}
Bacanje kocke	{1, 2, 3, 4, 5, 6}	"Pao je paran broj"={2,4,6}
Bacanje 2 novčića	{(P,P), (G,G), (P,G), (G,P)}	"Palo je 1 pismo"={(P,G), (G,P)}

Zadatak. Odredite prostor elementarnih događaja za bacanje dvije kocke.

Zadatak. Odredite prostor elementarnih događaja za bacanje dvije kocke.

Rješenje.

1. kocka	**2. kocka**					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Opći zapis (elementarnih) događaja

Prostor elementarnih događaja najčešće označavamo s Ω, a elementarni događaj (element iz skupa Ω) s ω.

Opći zapis (elementarnih) događaja

Prostor elementarnih događaja najčešće označavamo s Ω, a elementarni događaj (element iz skupa Ω) s ω.

Često ćemo pretpostaviti da je Ω konačan skup s $n \in \mathbb{N}$ elemenata (pokus ima konačno mnogo potencijalnih ishoda). U tom slučaju možemo Ω zapisati kao

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2 \ldots, \omega_n\}.$$

Opći zapis (elementarnih) događaja

Prostor elementarnih događaja najčešće označavamo s Ω, a elementarni događaj (element iz skupa Ω) s ω.

Često ćemo pretpostaviti da je Ω konačan skup s $n \in \mathbb{N}$ elemenata (pokus ima konačno mnogo potencijalnih ishoda). U tom slučaju možemo Ω zapisati kao

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2 \ldots, \omega_n\}.$$

Događaj je proizvoljan podskup A od Ω, pišemo $A \subset \Omega$. Stoga da bismo znali formulirati kompleksnije događaje, trebamo se podsjetiti nekih **skupovnih operacija**. Neka su $A, B \subset \Omega$, što su:

$$A \cap B, \quad A \cup B, \quad A^c, \quad \emptyset?$$

Podsjetite se Vennovih dijagrama!

Vjerojatnost - osnovni primjer

Pretpostavimo da promatramo pokus koji ima n mogućih ishoda koji su svi jednako mogući, npr. na slučajan način iz akvarija vadimo jednu od 12 ribica (ima smisla pretpostaviti da je izbor svake ribice jednako vjerojatan).

Vjerojatnost - osnovni primjer

Pretpostavimo da promatramo pokus koji ima n mogućih ishoda koji su svi jednako mogući, npr. na slučajan način iz akvarija vadimo jednu od 12 ribica (ima smisla pretpostaviti da je izbor svake ribice jednako vjerojatan). $\longrightarrow \Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_{12}\}$

Vjerojatnost - osnovni primjer

Pretpostavimo da promatramo pokus koji ima n mogućih ishoda koji su svi jednako mogući, npr. na slučajan način iz akvarija vadimo jednu od 12 ribica (ima smisla pretpostaviti da je izbor svake ribice jednako vjerojatan). $\longrightarrow \Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_{12}\}$

Kolika je vjerojatnost da je iz akvarija izvađena ribica ω_3?

Vjerojatnost - osnovni primjer

Pretpostavimo da promatramo pokus koji ima *n* mogućih ishoda koji su svi jednako mogući, npr. na slučajan način iz akvarija vadimo jednu od 12 ribica (ima smisla pretpostaviti da je izbor svake ribice jednako vjerojatan). $\longrightarrow \Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_{12}\}$

Kolika je vjerojatnost da je iz akvarija izvađena ribica ω_3? $\longrightarrow \frac{1}{12}$!

Vjerojatnost - osnovni primjer

Pretpostavimo da promatramo pokus koji ima *n* mogućih ishoda koji su svi jednako mogući, npr. na slučajan način iz akvarija vadimo jednu od 12 ribica (ima smisla pretpostaviti da je izbor svake ribice jednako vjerojatan). $\longrightarrow \Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_{12}\}$

Kolika je vjerojatnost da je iz akvarija izvađena ribica ω_3? $\longrightarrow \frac{1}{12}$!

Kako bi odredili vjerojatnost kompleksnijih događaja? Recimo da je u akvariju 8 ribica vrste *Carassius auratus* i 4 ribice vrste *Ancistrus cirrhosus*. Kolika je vjerojatnost da je slučajno izvađena ribica potonje vrste?

Vjerojatnost - osnovni primjer

Pretpostavimo da promatramo pokus koji ima n mogućih ishoda koji su svi jednako mogući, npr. na slučajan način iz akvarija vadimo jednu od 12 ribica (ima smisla pretpostaviti da je izbor svake ribice jednako vjerojatan). $\longrightarrow \Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_{12}\}$

Kolika je vjerojatnost da je iz akvarija izvađena ribica ω_3? $\longrightarrow \frac{1}{12}$!

Kako bi odredili vjerojatnost kompleksnijih događaja? Recimo da je u akvariju 8 ribica vrste *Carassius auratus* i 4 ribice vrste *Ancistrus cirrhosus*. Kolika je vjerojatnost da je slučajno izvađena ribica potonje vrste? $\longrightarrow \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$!

Vjerojatnost - osnovni primjer

Pretpostavimo da promatramo pokus koji ima n mogućih ishoda koji su svi jednako mogući, npr. na slučajan način iz akvarija vadimo jednu od 12 ribica (ima smisla pretpostaviti da je izbor svake ribice jednako vjerojatan). $\longrightarrow \Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_{12}\}$

Kolika je vjerojatnost da je iz akvarija izvađena ribica ω_3?$\longrightarrow \frac{1}{12}$!

Kako bi odredili vjerojatnost kompleksnijih događaja? Recimo da je u akvariju 8 ribica vrste *Carassius auratus* i 4 ribice vrste *Ancistrus cirrhosus*. Kolika je vjerojatnost da je slučajno izvađena ribica potonje vrste? $\longrightarrow \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$!

Napomena. Uočimo da je vjerojatnost da izvučemo ribicu pojedine vrste ista kao i relativna frekvencija te vrste ribica u akvariju!

Vjerojatnost - osnovni primjer

Pretpostavimo da promatramo pokus koji ima n mogućih ishoda koji su svi jednako mogući, npr. na slučajan način iz akvarija vadimo jednu od 12 ribica (ima smisla pretpostaviti da je izbor svake ribice jednako vjerojatan). $\longrightarrow \Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_{12}\}$

Kolika je vjerojatnost da je iz akvarija izvađena ribica ω_3? $\longrightarrow \frac{1}{12}$!

Kako bi odredili vjerojatnost kompleksnijih događaja? Recimo da je u akvariju 8 ribica vrste *Carassius auratus* i 4 ribice vrste *Ancistrus cirrhosus*. Kolika je vjerojatnost da je slučajno izvađena ribica potonje vrste? $\longrightarrow \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$!

Napomena. Uočimo da je vjerojatnost da izvučemo ribicu pojedine vrste ista kao i relativna frekvencija te vrste ribica u akvariju!

Općenito, ako je $A \subset \Omega$ proizvoljan događaj, s $\mathbf{P}(A)$ ćemo označavati **vjerojatnost** događaja A.

Vjerojatnost - osnovni primjer

Pretpostavimo da promatramo pokus koji ima n mogućih ishoda koji su svi jednako mogući, npr. na slučajan način iz akvarija vadimo jednu od 12 ribica (ima smisla pretpostaviti da je izbor svake ribice jednako vjerojatan). $\longrightarrow \Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_{12}\}$

Kolika je vjerojatnost da je iz akvarija izvađena ribica ω_3? $\longrightarrow \frac{1}{12}$!

Kako bi odredili vjerojatnost kompleksnijih događaja? Recimo da je u akvariju 8 ribica vrste *Carassius auratus* i 4 ribice vrste *Ancistrus cirrhosus*. Kolika je vjerojatnost da je slučajno izvađena ribica potonje vrste? $\longrightarrow \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$!

Napomena. Uočimo da je vjerojatnost da izvučemo ribicu pojedine vrste ista kao i relativna frekvencija te vrste ribica u akvariju!

Općenito, ako je $A \subset \Omega$ proizvoljan događaj, s $\mathbf{P}(A)$ ćemo označavati **vjerojatnost** događaja A. U slučaju kada su svi elementarni događaji jednako vjerojatni, vrijedi

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\text{broj povoljnih elementarnih događaja}}{\text{ukupan broj elementarnih događaja}} = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

gdje je $|A|$ veličina skupa A, odnosno broj elementa u skupu A.

Primjer. Kolika je vjerojatnost da iz špila s 52 karte izvućemo kralja?

Primjer. Kolika je vjerojatnost da iz špila s 52 karte izvućemo kralja?

Rješenje.

1 $\spadesuit$	2 $\spadesuit$	3 $\spadesuit$	4 $\spadesuit$	5 $\spadesuit$	6 $\spadesuit$	7 $\spadesuit$	8 $\spadesuit$	9 $\spadesuit$	10 $\spadesuit$	J $\spadesuit$	Q $\spadesuit$	**K** $\spadesuit$
1 $\diamondsuit$	2 $\diamondsuit$	3 $\diamondsuit$	4 $\diamondsuit$	5 $\diamondsuit$	6 $\diamondsuit$	7 $\diamondsuit$	8 $\diamondsuit$	9 $\diamondsuit$	10 $\diamondsuit$	J $\diamondsuit$	Q $\diamondsuit$	**K** $\diamondsuit$
1 $\heartsuit$	2 $\heartsuit$	3 $\heartsuit$	4 $\heartsuit$	5 $\heartsuit$	6 $\heartsuit$	7 $\heartsuit$	8 $\heartsuit$	9 $\heartsuit$	10 $\heartsuit$	J $\heartsuit$	Q $\heartsuit$	**K** $\heartsuit$
1 $\clubsuit$	2 $\clubsuit$	3 $\clubsuit$	4 $\clubsuit$	5 $\clubsuit$	6 $\clubsuit$	7 $\clubsuit$	8 $\clubsuit$	9 $\clubsuit$	10 $\clubsuit$	J $\clubsuit$	Q $\clubsuit$	**K** $\clubsuit$

Primjer. Kolika je vjerojatnost da iz špila s 52 karte izvućemo kralja?

Rješenje.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
1\spadesuit & 2\spadesuit & 3\spadesuit & 4\spadesuit & 5\spadesuit & 6\spadesuit & 7\spadesuit & 8\spadesuit & 9\spadesuit & 10\spadesuit & J\spadesuit & Q\spadesuit & \mathbf{K}\spadesuit \\
1\diamondsuit & 2\diamondsuit & 3\diamondsuit & 4\diamondsuit & 5\diamondsuit & 6\diamondsuit & 7\diamondsuit & 8\diamondsuit & 9\diamondsuit & 10\diamondsuit & J\diamondsuit & Q\diamondsuit & \mathbf{K}\diamondsuit \\
1\heartsuit & 2\heartsuit & 3\heartsuit & 4\heartsuit & 5\heartsuit & 6\heartsuit & 7\heartsuit & 8\heartsuit & 9\heartsuit & 10\heartsuit & J\heartsuit & Q\heartsuit & \mathbf{K}\heartsuit \\
1\clubsuit & 2\clubsuit & 3\clubsuit & 4\clubsuit & 5\clubsuit & 6\clubsuit & 7\clubsuit & 8\clubsuit & 9\clubsuit & 10\clubsuit & J\clubsuit & Q\clubsuit & \mathbf{K}\clubsuit
\end{array}
$$

$$P(E) = \frac{4}{52} = 0.0769$$

Primjer. Kolika je vjerojatnost da iz špila s 52 karte izvućemo 6 tref?

Primjer. Kolika je vjerojatnost da iz špila s 52 karte izvućemo 6 tref?

Rješenje.

1 ♠	2 ♠	3 ♠	4 ♠	5 ♠	6 ♠	7 ♠	8 ♠	9 ♠	10 ♠	J ♠	Q ♠	K ♠
1 ♢	2 ♢	3 ♢	4 ♢	5 ♢	6 ♢	7 ♢	8 ♢	9 ♢	10 ♢	J ♢	Q ♢	K ♢
1 ♡	2 ♡	3 ♡	4 ♡	5 ♡	6 ♡	7 ♡	8 ♡	9 ♡	10 ♡	J ♡	Q ♡	K ♡
1 ♣	2 ♣	3 ♣	4 ♣	5 ♣	**6 ♣**	7 ♣	8 ♣	9 ♣	10 ♣	J ♣	Q ♣	K ♣

Primjer. Kolika je vjerojatnost da iz špila s 52 karte izvućemo 6 tref?

Rješenje.

1 $\spadesuit$	2 $\spadesuit$	3 $\spadesuit$	4 $\spadesuit$	5 $\spadesuit$	6 $\spadesuit$	7 $\spadesuit$	8 $\spadesuit$	9 $\spadesuit$	10 $\spadesuit$	J $\spadesuit$	Q $\spadesuit$	K $\spadesuit$
1 $\diamondsuit$	2 $\diamondsuit$	3 $\diamondsuit$	4 $\diamondsuit$	5 $\diamondsuit$	6 $\diamondsuit$	7 $\diamondsuit$	8 $\diamondsuit$	9 $\diamondsuit$	10 $\diamondsuit$	J $\diamondsuit$	Q $\diamondsuit$	K $\diamondsuit$
1 $\heartsuit$	2 $\heartsuit$	3 $\heartsuit$	4 $\heartsuit$	5 $\heartsuit$	6 $\heartsuit$	7 $\heartsuit$	8 $\heartsuit$	9 $\heartsuit$	10 $\heartsuit$	J $\heartsuit$	Q $\heartsuit$	K $\heartsuit$
1 $\clubsuit$	2 $\clubsuit$	3 $\clubsuit$	4 $\clubsuit$	5 $\clubsuit$	**6 $\clubsuit$**	7 $\clubsuit$	8 $\clubsuit$	9 $\clubsuit$	10 $\clubsuit$	J $\clubsuit$	Q $\clubsuit$	K $\clubsuit$

$$P(E) = \frac{1}{52} = 0.00192$$

Vjerojatnost

Općenito, **vjerojatnost** definiramo kao funkciju **P** na skupu događaja koja zadovoljava:

Vjerojatnost

Općenito, **vjerojatnost** definiramo kao funkciju $\mathbf{P}$ na skupu događaja koja zadovoljava:

1. $0 \leqslant \mathbf{P}(A) \leqslant 1$, za svaki događaj A;

Vjerojatnost

Općenito, **vjerojatnost** definiramo kao funkciju $\mathbf{P}$ na skupu događaja koja zadovoljava:

1. $0 \leqslant \mathbf{P}(A) \leqslant 1$, za svaki događaj A;
2. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$, odnosno vjerojatnost da se dogodi neki od elementarnih događaja je 1;

Vjerojatnost

Općenito, **vjerojatnost** definiramo kao funkciju **P** na skupu događaja koja zadovoljava:

1. $0 \leqslant \mathbf{P}(A) \leqslant 1$, za svaki događaj A;
2. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$, odnosno vjerojatnost da se dogodi neki od elementarnih događaja je 1;
3. Ako se događaji $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ međusobno isključuju (tj. disjunktni su) onda vrijedi

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \mathbf{P}(A_i).$$

Vjerojatnost

Općenito, **vjerojatnost** definiramo kao funkciju $\mathbf{P}$ na skupu događaja koja zadovoljava:

1. $0 \leqslant \mathbf{P}(A) \leqslant 1$, za svaki događaj A;
2. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$, odnosno vjerojatnost da se dogodi neki od elementarnih događaja je 1;
3. Ako se događaji $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ međusobno isključuju (tj. disjunktni su) onda vrijedi

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \mathbf{P}(A_i).$$

Događaji A i B se međusobno isključuju ako $A \cap B = \emptyset$.

Neki primjeri:

- Kod bacanja novčića su događaji da je palo pismo i da je pala glava međusobno isključivi.

Vjerojatnost

Općenito, **vjerojatnost** definiramo kao funkciju $\mathbf{P}$ na skupu događaja koja zadovoljava:

1. $0 \leqslant \mathbf{P}(A) \leqslant 1$, za svaki događaj A;
2. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$, odnosno vjerojatnost da se dogodi neki od elementarnih događaja je 1;
3. Ako se događaji $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ međusobno isključuju (tj. disjunktni su) onda vrijedi
$$\mathbf{P}\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \mathbf{P}(A_i).$$

Događaji A i B se međusobno isključuju ako $A \cap B = \emptyset$.

Neki primjeri:

- Kod bacanja novčića su događaji da je palo pismo i da je pala glava međusobno isključivi.
- Kod bacanja kocke su događaji pao je paran broj i pao je broj 2 međusobno isključivi.

Vjerojatnost

Općenito, **vjerojatnost** definiramo kao funkciju **P** na skupu događaja koja zadovoljava:

1. $0 \leqslant \mathbf{P}(A) \leqslant 1$, za svaki događaj A;
2. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$, odnosno vjerojatnost da se dogodi neki od elementarnih događaja je 1;
3. Ako se događaji $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ međusobno isključuju (tj. disjunktni su) onda vrijedi
$$\mathbf{P}\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \mathbf{P}(A_i).$$

Događaji A i B se međusobno isključuju ako $A \cap B = \emptyset$.

Neki primjeri:

- Kod bacanja novčića su događaji da je palo pismo i da je pala glava međusobno isključivi.
- Kod bacanja kocke su događaji pao je paran broj i pao je broj 2 međusobno isključivi.
- Kod bacanja kocke događaji pao je broj djeljiv s 3 i pao je neparan broj **nisu** međusobno isključivi.

Neka svojstva vjerojatnosti

- Kažemo da se događaj A ne može dogoditi (nemogući događaj) ako je $\mathbf{P}(A) = 0$.

Neka svojstva vjerojatnosti

- Kažemo da se događaj A ne može dogoditi (nemogući događaj) ako je $\mathbf{P}(A) = 0$.
- Kažemo da je događaj A siguran ako je $\mathbf{P}(A) = 1$.

Neka svojstva vjerojatnosti

- Kažemo da se događaj A ne može dogoditi (nemogući događaj) ako je $\mathbf{P}(A) = 0$.
- Kažemo da je događaj A siguran ako je $\mathbf{P}(A) = 1$.
- Zbroj vjerojatnosti svih elementarnih događaja je 1.

Neka svojstva vjerojatnosti

- Kažemo da se događaj A ne može dogoditi (nemogući događaj) ako je $\mathbf{P}(A) = 0$.
- Kažemo da je događaj A siguran ako je $\mathbf{P}(A) = 1$.
- Zbroj vjerojatnosti svih elementarnih događaja je 1.
- Prisjetimo se, s A^c označavamo događaj "inje se dogodio događaj A". Vrijedi

$$\mathbf{P}(A^c) = 1 - \mathbf{P}(A).$$

Neka svojstva vjerojatnosti

- Kažemo da se događaj A ne može dogoditi (nemogući događaj) ako je $\mathbf{P}(A) = 0$.
- Kažemo da je događaj A siguran ako je $\mathbf{P}(A) = 1$.
- Zbroj vjerojatnosti svih elementarnih događaja je 1.
- Prisjetimo se, s A^c označavamo događaj "inje se dogodio događaj A". Vrijedi

$$\mathbf{P}(A^c) = 1 - \mathbf{P}(A).$$

- Ako događaj A povlači događaj B, $A \subset B$, tada je

$$\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B).$$

Neka svojstva vjerojatnosti

- Kažemo da se događaj A ne može dogoditi (nemogući događaj) ako je $\mathbf{P}(A) = 0$.
- Kažemo da je događaj A siguran ako je $\mathbf{P}(A) = 1$.
- Zbroj vjerojatnosti svih elementarnih događaja je 1.
- Prisjetimo se, s A^c označavamo događaj "inje se dogodio događaj A". Vrijedi

$$\mathbf{P}(A^c) = 1 - \mathbf{P}(A).$$

- Ako događaj A povlači događaj B, $A \subset B$, tada je

$$\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B).$$

- Vjerojatnost da se dogodio događaj A ili događaj B jednaka je

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - P(A \cap B).$$

  Ako se A i B međusobno isključuju ($A \cap B = \emptyset$) onda je $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$. Razlog tome je što je $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$.

DZ. Odredite vjerojatnosti sljedećih događaja kod bacanja dvije kocke:

a) Zbroj je 6.

b) Par (dva ista broja).

c) Zbroj je 7 ili 11.

d) Zbroj je veći od 9.

e) Zbroj je manji ili jednak 4.

DZ. U kutiji se nalazi 5 crvenih, 2 bijele i 3 zelene kuglice. Ukoliko je kuglica izvučena slučajno, odredite vjerojatnost da je izvčena kuglica:

a) crvena
b) zelena
c) crvena ili bijela
d) nije zelena
e) nije crvena

DZ. U kutiji se nalazi 5 crvenih, 2 bijele i 3 zelene kuglice. Ukoliko je kuglica izvučena slučajno, odredite vjerojatnost da je izvčena kuglica:

a) crvena
b) zelena
c) crvena ili bijela
d) nije zelena
e) nije crvena

Rješenje.

a) $P(\text{crvena}) = \dfrac{5}{10} = 0.5$
b) $P(\text{zelena}) = \dfrac{3}{10} = 0.3$
c) $P(\text{crvena ili bijela}) = \dfrac{5+2}{10} = 0.7$
d) $P(\text{nije zelena}) = 1 - P(\text{zelena}) = 1 - 0.3 = 0.7$
e) $P(\text{nije crvena}) = 1 - P(\text{crvena}) = 1 - 0.5 = 0.5$

Primjer: Kolika je vjerojatnost da iz špila s 52 karte izvućemo 3 ili karo?

Primjer: Kolika je vjerojatnost da iz špila s 52 karte izvućemo 3 ili karo?

Rješenje.

Jedna je mogućnost da prebrojimo karte koju su ili karo ili srce:

1 ♠	2 ♠	**3 ♠**	4 ♠	5 ♠	6 ♠	7 ♠	8 ♠	9 ♠	10 ♠	J ♠	Q ♠	K ♠
1 ♢	**2 ♢**	**3 ♢**	**4 ♢**	**5 ♢**	**6 ♢**	**7 ♢**	**8 ♢**	**9 ♢**	**10 ♢**	**J ♢**	**Q ♢**	**K ♢**
1 ♡	2 ♡	**3 ♡**	4 ♡	5 ♡	6 ♡	7 ♡	8 ♡	9 ♡	10 ♡	J ♡	Q ♡	K ♡
1 ♣	2 ♣	**3 ♣**	4 ♣	5 ♣	6 ♣	7 ♣	8 ♣	9 ♣	10 ♣	J ♣	Q ♣	K ♣

Vrijedi da je

Primjer: Kolika je vjerojatnost da iz špila s 52 karte izvućemo 3 ili karo?

Rješenje.

Jedna je mogućnost da prebrojimo karte koju su ili karo ili srce:

1 ♠	2 ♠	**3 ♠**	4 ♠	5 ♠	6 ♠	7 ♠	8 ♠	9 ♠	10 ♠	J ♠	Q ♠	K ♠
1 ♢	**2 ♢**	**3 ♢**	**4 ♢**	**5 ♢**	**6 ♢**	**7 ♢**	**8 ♢**	**9 ♢**	**10 ♢**	**J ♢**	**Q ♢**	**K ♢**
1 ♡	2 ♡	**3 ♡**	4 ♡	5 ♡	6 ♡	7 ♡	8 ♡	9 ♡	10 ♡	J ♡	Q ♡	K ♡
1 ♣	2 ♣	**3 ♣**	4 ♣	5 ♣	6 ♣	7 ♣	8 ♣	9 ♣	10 ♣	J ♣	Q ♣	K ♣

Vrijedi da je

$$\mathbf{P}(E) = \frac{16}{52} = 0.3077.$$

Primjer: Kolika je vjerojatnost da iz špila s 52 karte izvućemo 3 ili karo?

Rješenje.

Jedna je mogućnost da prebrojimo karte koju su ili karo ili srce:

1 ♠	2 ♠	**3 ♠**	4 ♠	5 ♠	6 ♠	7 ♠	8 ♠	9 ♠	10 ♠	J ♠	Q ♠	K ♠
1 ♢	**2 ♢**	**3 ♢**	**4 ♢**	**5 ♢**	**6 ♢**	**7 ♢**	**8 ♢**	**9 ♢**	**10 ♢**	**J ♢**	**Q ♢**	**K ♢**
1 ♡	2 ♡	**3 ♡**	4 ♡	5 ♡	6 ♡	7 ♡	8 ♡	9 ♡	10 ♡	J ♡	Q ♡	K ♡
1 ♣	2 ♣	**3 ♣**	4 ♣	5 ♣	6 ♣	7 ♣	8 ♣	9 ♣	10 ♣	J ♣	Q ♣	K ♣

Vrijedi da je

$$\mathbf{P}(E) = \frac{16}{52} = 0.3077.$$

No uočimo da smo mogli događaj E zapisati kao uniju događaja A="izvukli smo 3" i B="izvukli smo karo". Tada je

$$\mathbf{P}(E) = \mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = 0.3077.$$

Uvjetna vjerojatnost

Recimo da nas zanima je li rezultat bacanja kocke broj 6. Znamo da (ako je kocka simetrična) je vjerojatnost tog ishoda $\frac{1}{6}$. No recimo da nam osoba koja je bacila kocku da dodatnu informaciju, da je rezultat na kocki paran broj. Uz tu dodatnu informaciju, kolika je vjerojatnost da je pao broj 6?

Uvjetna vjerojatnost

Recimo da nas zanima je li rezultat bacanja kocke broj 6. Znamo da (ako je kocka simetrična) je vjerojatnost tog ishoda $\frac{1}{6}$. No recimo da nam osoba koja je bacila kocku da dodatnu informaciju, da je rezultat na kocki paran broj. Uz tu dodatnu informaciju, kolika je vjerojatnost da je pao broj 6? $\longrightarrow \frac{1}{3}$.

Uvjetna vjerojatnost

Recimo da nas zanima je li rezultat bacanja kocke broj 6. Znamo da (ako je kocka simetrična) je vjerojatnost tog ishoda $\frac{1}{6}$. No recimo da nam osoba koja je bacila kocku da dodatnu informaciju, da je rezultat na kocki paran broj. Uz tu dodatnu informaciju, kolika je vjerojatnost da je pao broj 6? $\longrightarrow \frac{1}{3}$.

Uvjetna vjerojatnost događaja B u odnosu na (uz uvjet) događaj A je vjerojatnost da će se događaj B dogoditi ako znamo da se dogodio događaj A.

Oznaka: $\mathbf{P}(B|A)$.

Uvjetnu vjerojatnost često možemo direktno odrediti iz prirode problema, a općenita formula je:

$$\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Primjer. U kutiji se nalaze 3 crvene kuglice i 2 plave kuglice. Iz kutije slučajno izvlačimo jednu po jednu kuglicu i to tako da ih **ne vraćamo** nazad u kutiju. Odredite vjerojatnost da će u drugom izvlačenju biti izvučena crvena kuglica ako je prva izvučena kuglica bila plava.

Kolika bi bila ta vjerojatnost da je u prvom izvlačenju izvučena crvena kuglica?

Primjer. U kutiji se nalaze 3 crvene kuglice i 2 plave kuglice. Iz kutije slučajno izvlačimo jednu po jednu kuglicu i to tako da ih **ne vraćamo** nazad u kutiju. Odredite vjerojatnost da će u drugom izvlačenju biti izvučena crvena kuglica ako je prva izvučena kuglica bila plava.
Kolika bi bila ta vjerojatnost da je u prvom izvlačenju izvučena crvena kuglica?

Rješenje. Događaji:

A - u prvom izvlačenju je izvučena plava kuglica
B - u drugom izvlačenju je izvučena crvena kuglica

Primjer. U kutiji se nalaze 3 crvene kuglice i 2 plave kuglice. Iz kutije slučajno izvlačimo jednu po jednu kuglicu i to tako da ih **ne vraćamo** nazad u kutiju. Odredite vjerojatnost da će u drugom izvlačenju biti izvučena crvena kuglica ako je prva izvučena kuglica bila plava.
Kolika bi bila ta vjerojatnost da je u prvom izvlačenju izvučena crvena kuglica?

Rješenje. Događaji:

A - u prvom izvlačenju je izvučena plava kuglica
B - u drugom izvlačenju je izvučena crvena kuglica

Tražimo $P(B|A)$.

Primjer. U kutiji se nalaze 3 crvene kuglice i 2 plave kuglice. Iz kutije slučajno izvlačimo jednu po jednu kuglicu i to tako da ih **ne vraćamo** nazad u kutiju. Odredite vjerojatnost da će u drugom izvlačenju biti izvučena crvena kuglica ako je prva izvučena kuglica bila plava.
Kolika bi bila ta vjerojatnost da je u prvom izvlačenju izvučena crvena kuglica?

Rješenje. Događaji:

A - u prvom izvlačenju je izvučena plava kuglica
B - u drugom izvlačenju je izvučena crvena kuglica

Tražimo $P(B|A)$.

Ako je u 1. izvlačenju izvučena plava kuglica tada je u kutiji ostalo 3 crvene i jedna plava kuglica pa je

$$P(B|A) = P(2.\text{ crvena}|1.\text{ plava}) = \frac{3}{4}$$

Primjer. U kutiji se nalaze 3 crvene kuglice i 2 plave kuglice. Iz kutije slučajno izvlačimo jednu po jednu kuglicu i to tako da ih **ne vraćamo** nazad u kutiju. Odredite vjerojatnost da će u drugom izvlačenju biti izvučena crvena kuglica ako je prva izvučena kuglica bila plava.

Kolika bi bila ta vjerojatnost da je u prvom izvlačenju izvučena crvena kuglica?

Rješenje. Događaji:

C - u prvom izvlačenju je izvučena crvena kuglica
B - u drugom izvlačenju je izvučena crvena kuglica

Tražimo $P(B|C)$.

Primjer. U kutiji se nalaze 3 crvene kuglice i 2 plave kuglice. Iz kutije slučajno izvlačimo jednu po jednu kuglicu i to tako da ih **ne vraćamo** nazad u kutiju. Odredite vjerojatnost da će u drugom izvlačenju biti izvučena crvena kuglica ako je prva izvučena kuglica bila plava.
Kolika bi bila ta vjerojatnost da je u prvom izvlačenju izvučena crvena kuglica?

Rješenje. Događaji:

C - u prvom izvlačenju je izvučena crvena kuglica
B - u drugom izvlačenju je izvučena crvena kuglica

Tražimo $P(B|C)$.

Ako je u 1. izvlačenju izvučena crvena kuglica tada je u kutiji ostalo 2 crvene i 2 plave kuglica pa je

$$P(B|C) = P(2.\text{ crvena}|1.\text{ crvena}) = \frac{2}{4}$$

Dva događaja A i B su **nezavisna** ako je

$$P(B|A) = P(B).$$

Dva događaja A i B su **nezavisna** ako je

$$P(B|A) = P(B).$$

Gornji uvjet je ekvivalentan uvjetu

$$P(A|B) = P(A).$$

Dva događaja A i B su **nezavisna** ako je

$$P(B|A) = P(B).$$

Gornji uvjet je ekvivalentan uvjetu

$$P(A|B) = P(A).$$

Događaji A i B su nezavisni ako pojavljivanje događaja A ne utječe na vjerojatnost događaja B. (I obratno.)

Primjer. Izvlačimo kartu iz špila s 52 karte. Događaji izvučen je tref i izvučen je as su nezavisni.

Primjer. Izvlačimo kartu iz špila s 52 karte. Događaji izvučen je tref i izvučen je as su nezavisni.

Događaji:
A - izvučen je tref
B - izvučen je as

Računamo:

$$P(B|A) = P(\text{ as } | \text{ tref }) =$$

Primjer. Izvlačimo kartu iz špila s 52 karte. Događaji izvučen je tref i izvučen je as su nezavisni.

Događaji:
A - izvučen je tref
B - izvučen je as

Računamo:

$$P(B|A) = P(\text{ as } | \text{ tref }) = \frac{1}{13}$$

Primjer. Izvlačimo kartu iz špila s 52 karte. Događaji izvučen je tref i izvučen je as su nezavisni.

Događaji:
A - izvučen je tref
B - izvučen je as

Računamo:

$$P(B|A) = P(\text{ as } | \text{ tref }) = \frac{1}{13}$$

Kako je

$$P(B) = P(\text{ as }) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

Primjer. Izvlačimo kartu iz špila s 52 karte. Događaji izvučen je tref i izvučen je as su nezavisni.

Događaji:
A - izvučen je tref
B - izvučen je as

Računamo:

$$P(B|A) = P(\text{ as } | \text{ tref }) = \frac{1}{13}$$

Kako je

$$P(B) = P(\text{ as }) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

slijedi

$$P(B|A) = P(B).$$

i događaji su nezavisni.

Pravilo množenja vjerojatnost

Za dva događaja A i B, vjerojatnost da se dogodi događaj A i B je

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B).$$

Pravilo množenja vjerojatnost

Za dva događaja A i B, vjerojatnost da se dogodi događaj A i B je

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B).$$

Ukoliko su događaji A i B **nezavisni**, tada je $P(B|A) = P(B)$ i

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Primjer. Pretpostavite da za neki gen u diploidnoj populaciji postoje dva oblika - alela: A i a. Neka su vjerojatnosti da je slučajno odabrani gen u populaciji prvi odn. drugi od njih p odn $q = 1 - p$. Tri su moguća genotipa za osobe u ovoj populaciji: AA, aa i Aa. Pretpostavite model slučajnog parenja (engl. random mating) odn. da su pateralni G_p i materalni gen G_m svake jedinke u novoj generaciji nezavisno izabrani. Odredite vjerojatnosti genotipova AA, aa i Aa

Primjer. Pretpostavite da za neki gen u diploidnoj populaciji postoje dva oblika - alela: A i a. Neka su vjerojatnosti da je slučajno odabrani gen u populaciji prvi odn. drugi od njih p odn $q = 1 - p$. Tri su moguća genotipa za osobe u ovoj populaciji: AA, aa i Aa. Pretpostavite model slučajnog parenja (engl. random mating) odn. da su pateralni G_p i materalni gen G_m svake jedinke u novoj generaciji nezavisno izabrani. Odredite vjerojatnosti genotipova AA, aa i Aa

Rješenje. Vrijedi

$$\mathbf{P}(AA) = \mathbf{P}(G_p = A \text{ i } G_m = A) = \mathbf{P}(G_p = A) \cdot \mathbf{P}(G_m = A) = p \cdot p = p^2.$$

Analogno bi pokazali $\mathbf{P}(aa) = q^2$. S druge strane genotip Aa odgovara događaju

$$G_p = A \text{ i } G_m = a \qquad \text{ili} \qquad G_p = a \text{ i } G_m = A.$$

Kako su događaji "$G_p = A$ i $G_m = a$" i "$G_p = a$ i $G_m = A$" međusobno isključivi, vrijedi da je

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Aa) &= \mathbf{P}(G_p = A \text{ i } G_m = a) + \mathbf{P}(G_p = a \text{ i } G_m = A)\\ &= \mathbf{P}(G_p = A)\mathbf{P}(G_m = a) + \mathbf{P}(G_p = a)\mathbf{P}(G_m = A) = pq + qp = 2pq.\end{aligned}$$

DZ U kutiji se nalaze 3 crvene kuglice, 4 plave i 2 bijele. Redom izvlačimo jednu po jednu kuglicu i to tako da nakon svakog izvlačenja izvučenu kuglicu vratimo u kutiju. Kolika je vjerojatnost da ćemo:

a) u dva izvlačenja izvući dvije crvene kuglice?

b) u dva izvlačenja izvući redom crvenu pa plavu kuglicu?

c) u tri izvlačenja izvući redom bijelu pa plavu pa crvenu kuglicu?

Primjer. U kutiji se nalaze 3 crvene kuglice, 4 plave i 2 bijele. Redom izvlačimo jednu po jednu kuglicu i to tako da nakon svakog izvlačenja izvučenu kuglicu **NE** vratimo u kutiju. Kolika je vjerojatnost da ćemo:

a) u dva izvlačenja izvući dvije crvene kuglice?

b) u dva izvlačenja izvući redom crvenu pa plavu kuglicu?

c) u tri izvlačenja izvući redom bijelu pa plavu pa crvenu kuglicu?

Slučajna varijabla

Promotrimo slučajni pokus gdje izvlačimo jednu kuglicu na slučajan način iz kutije s 6 crvenih i 4 crne kuglice.

Slučajna varijabla

Promotrimo slučajni pokus gdje izvlačimo jednu kuglicu na slučajan način iz kutije s 6 crvenih i 4 crne kuglice.

Uočimo da je boja kuglice jedno obilježje, odnosno varijabla.

Slučajna varijabla

Promotrimo slučajni pokus gdje izvlačimo jednu kuglicu na slučajan način iz kutije s 6 crvenih i 4 crne kuglice.

Uočimo da je boja kuglice jedno obilježje, odnosno varijabla.

Tada boju slučajno odabrane kuglice možemo doživjeti kao jednu **slučajnu varijablu**.

Slučajna varijabla

Promotrimo slučajni pokus gdje izvlačimo jednu kuglicu na slučajan način iz kutije s 6 crvenih i 4 crne kuglice.

Uočimo da je boja kuglice jedno obilježje, odnosno varijabla.

Tada boju slučajno odabrane kuglice možemo doživjeti kao jednu **slučajnu varijablu**.

Uočimo da slučajna vrijabla "boja izvučene kuglice" može poprimiti vrijednosti "crvena" ili "crna". Kolike su vjerojatnosti da slučajna varijabla poprimi svaku od tih vrijednosti (distribucija slučajne varijable)?

Slučajna varijabla

Promotrimo slučajni pokus gdje izvlačimo jednu kuglicu na slučajan način iz kutije s 6 crvenih i 4 crne kuglice.

Uočimo da je boja kuglice jedno obilježje, odnosno varijabla.

Tada boju slučajno odabrane kuglice možemo doživjeti kao jednu **slučajnu varijablu**.

Uočimo da slučajna vrijabla "boja izvučene kuglice" može poprimiti vrijednosti "crvena" ili "crna". Kolike su vjerojatnosti da slučajna varijabla poprimi svaku od tih vrijednosti (distribucija slučajne varijable)?

Vrijednost	p_i
Crvena	0.6
Crna	0.4
Ukupno	1

Očekivanje slučajne varijable

Ukoliko slučajna varijabla X poprima vrijednosti $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, \ldots$, s pripadnim vjerojatnostima $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k, \ldots$. Njenu distribuciju često označavamo preko tablice distribucije:

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_k & \ldots \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_k & \ldots \end{pmatrix}.$$

Očekivanje slučajne varijable

Ukoliko slučajna varijabla X poprima vrijednosti $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, \ldots$, s pripadnim vjerojatnostima $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k, \ldots$. Njenu distribuciju često označavamo preko tablice distribucije:

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_k & \ldots \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_k & \ldots \end{pmatrix}.$$

Očekivanje slučajne varijable X je ponderirani prosjek vrijednosti koje X može poprimiti (gdje su koeficijenti, odnosno ponderi, pripadne vjerojatnosti tih vrijednosti):

$$\mathbf{E}(X) = \sum_i p_i x_i.$$

Ova vrijednost može biti i beskonačna (ili divergirati), ako imamo beskonačno mnogo mogućih vrijednosti za X.

Očekivanje slučajne varijable i srednja vrijednost varijable - usporedba

Usporedimo formulu za očekivanje slučajne varijable s izrazom za srednju vrijednost varijable.

Očekivanje slučajne varijable i srednja vrijednost varijable - usporedba

Usporedimo formulu za očekivanje slučajne varijable s izrazom za srednju vrijednost varijable.

Neka je dana varijabla koja poprima vrijednosti $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$. Dan nam je skup podataka koji mjeri tu varijablu gdje se pripadne vrijednosti pojavljuju s relativnim frekvencijama $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_k$. Podsjetimo se, tada je srednja vrijednost $\overline{x}$ dana s

$$\overline{x} = \sum_i r_i x_i.$$

Primjer. Ukoliko kod bacanja novčića pismo označimo s 1 a glavu s 0, izračunajte očekivanje za slučajnu varijablu X definiranu kao ishod bacanja novčića.

Primjer. Ukoliko kod bacanja novčića pismo označimo s 1 a glavu s 0, izračunajte očekivanje za slučajnu varijablu X definiranu kao ishod bacanja novčića.

Rješenje. Moguće vrijednosti su 0 i 1, a pripadna distribucija vjerojatnosti jednaka je

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Primjer. Ukoliko kod bacanja novčića pismo označimo s 1 a glavu s 0, izračunajte očekivanje za slučajnu varijablu X definiranu kao ishod bacanja novčića.

Rješenje. Moguće vrijednosti su 0 i 1, a pripadna distribucija vjerojatnosti jednaka je

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{E}(X) = \sum_i p_i x_i = 0.5 \cdot 1 + 0.5 \cdot 0 = 0.5.$$

Primjer. Izračunajte očekivanje za slučajnu varijablu X definiranu kao ishod bacanja igraće kocke.

Primjer. Izračunajte očekivanje za slučajnu varijablu X definiranu kao ishod bacanja igraće kocke.

Rješenje. Moguće vrijednosti su 1, 2, 3, 4, 5 i 6, a distribucija vjerojatnosti je

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Primjer. Izračunajte očekivanje za slučajnu varijablu X definiranu kao ishod bacanja igraće kocke.

Rješenje. Moguće vrijednosti su 1, 2, 3, 4, 5 i 6, a distribucija vjerojatnosti je

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X) &= \sum_i p_i x_i = \\ &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \\ &= \frac{21}{6} = 3.5. \end{aligned}$$

Svojstva očekivanja

Uočite:

- Očekivanje ne treba biti jednako niti jednoj mogućoj vrijednosti slučajne varijable.

Svojstva očekivanja

Uočite:

- Očekivanje ne treba biti jednako niti jednoj mogućoj vrijednosti slučajne varijable.
- Očekivanje nije (ne treba biti) jednako najvjerojatnijoj vrijednosti.

Svojstva očekivanja

Uočite:

- Očekivanje ne treba biti jednako niti jednoj mogućoj vrijednosti slučajne varijable.
- Očekivanje nije (ne treba biti) jednako najvjerojatnijoj vrijednosti.

Ako su X i Y dvije slučajne varijable, onda je i $X+Y$ također slučajna varijabla. Njeno očekivanje je

$$\mathbf{E}(X+Y)=\mathbf{E}(X)+\mathbf{E}(Y).$$

Svojstva očekivanja

Uočite:

- Očekivanje ne treba biti jednako niti jednoj mogućoj vrijednosti slučajne varijable.
- Očekivanje nije (ne treba biti) jednako najvjerojatnijoj vrijednosti.

Ako su X i Y dvije slučajne varijable, onda je i $X + Y$ također slučajna varijabla. Njeno očekivanje je

$$\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y).$$

Neka je c proizvoljna konstanta. Tada je i cX slučajna varijabla. Njeno očekivanje je

$$\mathbf{E}(cX) = c\mathbf{E}(X).$$

Svojstva očekivanja

Uočite:

- Očekivanje ne treba biti jednako niti jednoj mogućoj vrijednosti slučajne varijable.
- Očekivanje nije (ne treba biti) jednako najvjerojatnijoj vrijednosti.

Ako su X i Y dvije slučajne varijable, onda je i $X + Y$ također slučajna varijabla. Njeno očekivanje je

$$\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y).$$

Neka je c proizvoljna konstanta. Tada je i cX slučajna varijabla. Njeno očekivanje je

$$\mathbf{E}(cX) = c\mathbf{E}(X).$$

Uočite da je onda i $aX + b$ slučajna varijabla, za konstante a i b (podsjetimo se linearne transformacije podataka!). Njeno očekivanje je

$$\mathbf{E}(aX + b) = a\mathbf{E}(X) + b.$$

Primjer. U kutiji se nalazi deset novčanica od 10 €, pet od 20 €, tri od 50 €, jedna od 100 €i jedna od 1000€. Igra se sastoji od toga da igrač za ulog od 200 €ima pravo slučajno izvući jednu novčanicu. Izračunajte očekivanje dobitka. Da li je igra pravedna?

Primjer. U kutiji se nalazi deset novčanica od 10 €, pet od 20 €, tri od 50 €, jedna od 100 €i jedna od 1000€. Igra se sastoji od toga da igrač za ulog od 200 €ima pravo slučajno izvući jednu novčanicu. Izračunajte očekivanje dobitka. Da li je igra pravedna?

Napomena. Igra je pravedna ukoliko je očekivanje dobitka 0. Ukoliko je očekivanje dobitka pozitivno, tada je igra u korist igrača, a ukoliko je očekivanje dobitka negativno tada je igra u korist organizatora (kuće).

Primjer. U kutiji se nalazi deset novčanica od 10 €, pet od 20 €, tri od 50 €, jedna od 100 €i jedna od 1000€. Igra se sastoji od toga da igrač za ulog od 200 €ima pravo slučajno izvući jednu novčanicu. Izračunajte očekivanje dobitka. Da li je igra pravedna?

Napomena. Igra je pravedna ukoliko je očekivanje dobitka 0. Ukoliko je očekivanje dobitka pozitivno, tada je igra u korist igrača, a ukoliko je očekivanje dobitka negativno tada je igra u korist organizatora (kuće).

Rješenje. Za iznos slučajno izvučene novčnice (slučajna varijabla X) distribucija vjerojatnosti je dana u tablici:

Novčanica (x_i)	10	20	50	100	1000
f_i	10	5	3	1	1
p_i	0.50	0.25	0.15	0.05	0.05

Označimo iznos slučajno izvučene novčanice s X (slučajna varijabla).

$$X \sim \begin{pmatrix} 10 & 20 & 50 & 100 & 1000 \\ 0.5 & 0.25 & 0.15 & 0.05 & 0.05 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X) &= \sum_i p_i x_i = \\ &= 0.50 \cdot 10 + 0.25 \cdot 20 + 0.15 \cdot 50 + 0.05 \cdot 100 + 0.05 \cdot 1000 = \\ &= 72.50 \end{aligned}$$

Označimo iznos slučajno izvučene novčanice s X (slučajna varijabla).

$$X \sim \begin{pmatrix} 10 & 20 & 50 & 100 & 1000 \\ 0.5 & 0.25 & 0.15 & 0.05 & 0.05 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X) &= \sum_i p_i x_i = \\ &= 0.50 \cdot 10 + 0.25 \cdot 20 + 0.15 \cdot 50 + 0.05 \cdot 100 + 0.05 \cdot 1000 = \\ &= 72.50 \end{aligned}$$

Budući da je dobitak (označimo ga kao slučajna varijabla Y) jednak iznosu izvučene novčanice umanjenom za ulog (200 €):

$$Y = X - 200,$$

Označimo iznos slučajno izvučene novčanice s X (slučajna varijabla).

$$X \sim \begin{pmatrix} 10 & 20 & 50 & 100 & 1000 \\ 0.5 & 0.25 & 0.15 & 0.05 & 0.05 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X) &= \sum_i p_i x_i = \\ &= 0.50 \cdot 10 + 0.25 \cdot 20 + 0.15 \cdot 50 + 0.05 \cdot 100 + 0.05 \cdot 1000 = \\ &= {\color{red}72.50} \end{aligned}$$

Budući da je dobitak (označimo ga kao slučajna varijabla Y) jednak iznosu izvučene novčanice umanjenom za ulog (200 €):

$$Y = X - 200,$$

vrijedi

$$\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(X) - 200 =$$

Označimo iznos slučajno izvučene novčanice s X (slučajna varijabla).

$$X \sim \begin{pmatrix} 10 & 20 & 50 & 100 & 1000 \\ 0.5 & 0.25 & 0.15 & 0.05 & 0.05 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X) &= \sum_i p_i x_i = \\ &= 0.50 \cdot 10 + 0.25 \cdot 20 + 0.15 \cdot 50 + 0.05 \cdot 100 + 0.05 \cdot 1000 = \\ &= 72.50 \end{aligned}$$

Budući da je dobitak (označimo ga kao slučajna varijabla Y) jednak iznosu izvučene novčanice umanjenom za ulog (200 €):

$$Y = X - 200,$$

vrijedi

$$\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(X) - 200 = 72.50 - 200 = -127.50.$$

Dakle, igra nije pravedna, već je u korist kuće.

Varijanca slučajne varijable

Ukoliko slučajna varijabla X poprima vrijednosti $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$, s pripadnim vjerojatnostima $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$, **varijanca** slučajne varijable X je

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_i p_i (x_i - \mathbf{E}(X))^2$$

Varijanca slučajne varijable

Ukoliko slučajna varijabla X poprima vrijednosti $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$, s pripadnim vjerojatnostima $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$, **varijanca** slučajne varijable X je

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_i p_i (x_i - \mathbf{E}(X))^2$$

Alternativna formula za varijancu

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_i p_i x_i^2 - [\mathbf{E}(X)]^2$$

Varijanca slučajne varijable

Ukoliko slučajna varijabla X poprima vrijednosti $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$, s pripadnim vjerojatnostima $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$, **varijanca** slučajne varijable X je

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_i p_i (x_i - \mathbf{E}(X))^2$$

Alternativna formula za varijancu

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_i p_i x_i^2 - [\mathbf{E}(X)]^2$$

ili

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}\left[(X - \mathbf{E}(X))^2\right] = \mathbf{E}(X^2) - [\mathbf{E}(X)]^2$$

Standardna devijacija

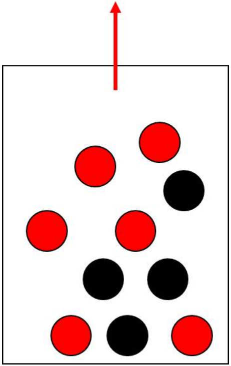
Standardna devijacija:

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

Standardna devijacija

Standardna devijacija:

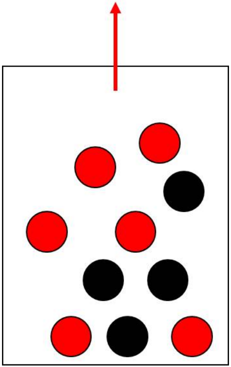
$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{\sum_i p_i (x_i - \mathbf{E}(X))^2}$$



Primjer. Izračunajte varijancu za slučajnu varijablu X definiranu s

1 - ako je izvučena crvena kuglica,

0 - ako nije izvučena crvena kuglica.



Primjer. Izračunajte varijancu za slučajnu varijablu X definiranu s

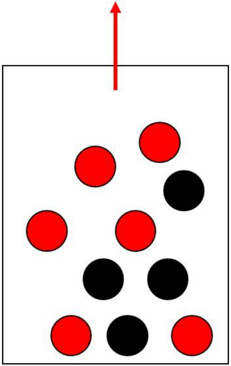
1 - ako je izvučena crvena kuglica,

0 - ako nije izvučena crvena kuglica.

Rješenje. Distribucija vjerojatnosti:

x_i	p_i
1	**0.6**
0	**0.4**

$\mathbf{E}(X) = 0.6$



Primjer. Izračunajte varijancu za slučajnu varijablu X definiranu s

1 - ako je izvučena crvena kuglica,

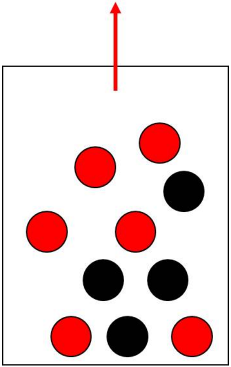
0 - ako nije izvučena crvena kuglica.

Rješenje. Distribucija vjerojatnosti:

x_i	p_i
1	**0.6**
0	**0.4**

$\mathbf{E}(X) = 0.6$

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_i p_i (x_i - \mathbf{E}(X))^2 =$$



Primjer. Izračunajte varijancu za slučajnu varijablu X definiranu s

1 - ako je izvučena crvena kuglica,

0 - ako nije izvučena crvena kuglica.

Rješenje. Distribucija vjerojatnosti:

x_i	p_i
1	**0.6**
0	**0.4**

$\mathbf{E}(X) = 0.6$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \sum_i p_i (x_i - \mathbf{E}(X))^2 = \\
&= 0.6 \cdot (1 - 0.6)^2 + 0.4 \cdot (0 - 0.6)^2 = \\
&= 0.6 \cdot 0.4^2 + 0.4 \cdot 0.4^2 = 0.24
\end{aligned}
$$

Primjer. Ukoliko kod bacanja novčića pismo označimo s 1 a glavu s 0, izračunajte varijancu za slučajnu varijablu X definiranu kao ishod bacanja novčića.

Primjer. Ukoliko kod bacanja novčića pismo označimo s 1 a glavu s 0, izračunajte varijancu za slučajnu varijablu X definiranu kao ishod bacanja novčića.

Rješenje. Moguće vrijednosti su 0 i 1.
Distribucija vjerojatnosti:

x_i	p_i
1	0.5
0	0.5

$$\mathbf{E}(X) = 0.5$$

Primjer. Ukoliko kod bacanja novčića pismo označimo s 1 a glavu s 0, izračunajte varijancu za slučajnu varijablu X definiranu kao ishod bacanja novčića.

Rješenje. Moguće vrijednosti su 0 i 1.
Distribucija vjerojatnosti:

x_i	p_i
1	0.5
0	0.5

$$\mathbf{E}(X) = 0.5$$

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_i p_i(x_i - \mathbf{E}(X))^2 =$$

Primjer. Ukoliko kod bacanja novčića pismo označimo s 1 a glavu s 0, izračunajte varijancu za slučajnu varijablu X definiranu kao ishod bacanja novčića.

Rješenje. Moguće vrijednosti su 0 i 1.
Distribucija vjerojatnosti:

x_i	p_i
1	0.5
0	0.5

$$\mathbf{E}(X) = 0.5$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \sum_i p_i (x_i - \mathbf{E}(X))^2 = \\
&= 0.5 \cdot (1 - 0.5)^2 + 0.5 \cdot (0 - 0.5)^2 = \\
&= 0.5 \cdot 0.5^2 + 0.5 \cdot 0.5^2 = 0.25
\end{aligned}$$

Primjer. Izračunajte varijancu za slučajnu varijablu X definiranu kao ishod bacanja igraće kocke.

Primjer. Izračunajte varijancu za slučajnu varijablu X definiranu kao ishod bacanja igraće kocke.

Rješenje. Moguće vrijednosti su 1, 2, 3, 4, 5 i 6.
Distribucija vjerojatnosti:

x_i	p_i
1	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{6}$

Primjer. Izračunajte varijancu za slučajnu varijablu X definiranu kao ishod bacanja igraće kocke.

Rješenje. Moguće vrijednosti su 1, 2, 3, 4, 5 i 6.
Distribucija vjerojatnosti:

x_i	p_i
1	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{6}$

$$\mathbf{E}(X) = 3.5$$

Primjer. Izračunajte varijancu za slučajnu varijablu X definiranu kao ishod bacanja igraće kocke.

Rješenje. Moguće vrijednosti su 1, 2, 3, 4, 5 i 6.
Distribucija vjerojatnosti:

x_i	p_i
1	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{6}$

$$\mathbf{E}(X) = 3.5$$

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_i p_i(x_i - \mathbf{E}(X))^2 =$$

Primjer. Izračunajte varijancu za slučajnu varijablu X definiranu kao ishod bacanja igraće kocke.

Rješenje. Moguće vrijednosti su 1, 2, 3, 4, 5 i 6.
Distribucija vjerojatnosti:

x_i	p_i
1	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{6}$

$\mathbf{E}(X) = 3.5$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \sum_i p_i(x_i - \mathbf{E}(X))^2 = \\ &= \frac{1}{6}\cdot(1-3.5)^2 + \frac{1}{6}\cdot(2-3.5)^2 + \frac{1}{6}\cdot(3-3.5)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{6}\cdot(4-3.5)^2 + \frac{1}{6}\cdot(5-3.5)^2 + \frac{1}{6}\cdot(6-3.5)^2 =\end{aligned}$$

Primjer. Izračunajte varijancu za slučajnu varijablu X definiranu kao ishod bacanja igraće kocke.

Rješenje. Moguće vrijednosti su 1, 2, 3, 4, 5 i 6.
Distribucija vjerojatnosti:

x_i	p_i
1	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{6}$

$\mathbf{E}(X) = 3.5$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \sum_i p_i (x_i - \mathbf{E}(X))^2 = \\
&= \frac{1}{6} \cdot (1-3.5)^2 + \frac{1}{6} \cdot (2-3.5)^2 + \frac{1}{6} \cdot (3-3.5)^2 + \\
&\quad + \frac{1}{6} \cdot (4-3.5)^2 + \frac{1}{6} \cdot (5-3.5)^2 + \frac{1}{6} \cdot (6-3.5)^2 = \\
&= \frac{17.5}{6} = 2.92.
\end{aligned}$$

Primjer. Distribucija vjerojatnosti za broj jednodnevnih izleta gorskog vodiča tijekom tjedna prikazana je u tablici. Izračunajte očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju.

Broj izleta (x_i)	2	3	4	5	6
p_i	0.30	0.40	0.20	0.05	0.05

Primjer. Distribucija vjerojatnosti za broj jednodnevnih izleta gorskog vodiča tijekom tjedna prikazana je u tablici. Izračunajte očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju.

Broj izleta (x_i)	2	3	4	5	6
p_i	0.30	0.40	0.20	0.05	0.05

Rješenje.

$$\mathbf{E}(X) = \sum_i p_i x_i =$$

Primjer. Distribucija vjerojatnosti za broj jednodnevnih izleta gorskog vodiča tijekom tjedna prikazana je u tablici. Izračunajte očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju.

Broj izleta (x_i)	2	3	4	5	6
p_i	0.30	0.40	0.20	0.05	0.05

Rješenje.

$$\mathbf{E}(X) = \sum_i p_i x_i = 0.30 \cdot 2 + 0.40 \cdot 3 + 0.20 \cdot 4 + 0.05 \cdot 5 + 0.05 \cdot 6 = 3.15$$

Primjer. Distribucija vjerojatnosti za broj jednodnevnih izleta gorskog vodiča tijekom tjedna prikazana je u tablici. Izračunajte očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju.

Broj izleta (x_i)	2	3	4	5	6
p_i	0.30	0.40	0.20	0.05	0.05

Rješenje.

$$\mathbf{E}(X) = \sum_i p_i x_i = 0.30 \cdot 2 + 0.40 \cdot 3 + 0.20 \cdot 4 + 0.05 \cdot 5 + 0.05 \cdot 6 = 3.15$$

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_i p_i (x_i - \mathbf{E}(X))^2 =$$

Primjer. Distribucija vjerojatnosti za broj jednodnevnih izleta gorskog vodiča tijekom tjedna prikazana je u tablici. Izračunajte očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju.

Broj izleta (x_i)	2	3	4	5	6
p_i	0.30	0.40	0.20	0.05	0.05

Rješenje.

$$\mathbf{E}(X) = \sum_i p_i x_i = 0.30 \cdot 2 + 0.40 \cdot 3 + 0.20 \cdot 4 + 0.05 \cdot 5 + 0.05 \cdot 6 = 3.15$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \sum_i p_i (x_i - \mathbf{E}(X))^2 = \\ &= 0.30 \cdot (2 - 3.15)^2 + 0.40 \cdot (3 - 3.15)^2 + 0.20 \cdot (4 - 3.15)^2 + \\ &\quad + 0.05 \cdot (5 - 3.15)^2 + 0.05 \cdot (6 - 3.15)^2 = 1.13 \end{aligned}$$

Primjer. Distribucija vjerojatnosti za broj jednodnevnih izleta gorskog vodiča tijekom tjedna prikazana je u tablici. Izračunajte očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju.

Broj izleta (x_i)	2	3	4	5	6
p_i	0.30	0.40	0.20	0.05	0.05

Rješenje.

$$\mathbf{E}(X) = \sum_i p_i x_i = 0.30 \cdot 2 + 0.40 \cdot 3 + 0.20 \cdot 4 + 0.05 \cdot 5 + 0.05 \cdot 6 = 3.15$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \sum_i p_i (x_i - \mathbf{E}(X))^2 = \\ &= 0.30 \cdot (2-3.15)^2 + 0.40 \cdot (3-3.15)^2 + 0.20 \cdot (4-3.15)^2 + \\ &\quad + 0.05 \cdot (5-3.15)^2 + 0.05 \cdot (6-3.15)^2 = 1.13 \\ \sigma(X) &= \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{1.13} = 1.06 \end{aligned}$$

Linearna transformacija slučajne varijable

Neka je varijabla Y dana s:

$$Y = a\,X + b.$$

Tada je

$$\begin{aligned} \mathbf{E}Y &= a\,\mathbf{E}X + b \\ \mathrm{Var}\,Y &= a^2\mathrm{Var}X \\ \sigma(Y) &= |a|\,\sigma(X) \end{aligned}$$

Primjer. Ukoliko kod bacanja novčića pojavljivanje pisma označimo s 2 a pojavljivanje glave s 1, odredite očekivanje i varijancu ovako definirane slučajne varijable.

Primjer. Ukoliko kod bacanja novčića pojavljivanje pisma označimo s 2 a pojavljivanje glave s 1, odredite očekivanje i varijancu ovako definirane slučajne varijable.

Rješenje. U prijašnjem primjeru smo pokazali da za slučajnu varijablu (X) dobivenu tako da smo pismo označili s 1 a glavu s 0 vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{E}X &= 0.5 \\ \mathrm{Var}X &= 0.25 \end{aligned}$$

Primjer. Ukoliko kod bacanja novčića pojavljivanje pisma označimo s 2 a pojavljivanje glave s 1, odredite očekivanje i varijancu ovako definirane slučajne varijable.

Rješenje. U prijašnjem primjeru smo pokazali da za slučajnu varijablu (X) dobivenu tako da smo pismo označili s 1 a glavu s 0 vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{E}X &= 0.5 \\ \mathrm{Var}X &= 0.25 \end{aligned}$$

Ukoliko slučajnu varijablu iz zadatka označimo s Y, tada je

$$Y = X + 1.$$

Primjer. Ukoliko kod bacanja novčića pojavljivanje pisma označimo s 2 a pojavljivanje glave s 1, odredite očekivanje i varijancu ovako definirane slučajne varijable.

Rješenje. U prijašnjem primjeru smo pokazali da za slučajnu varijablu (X) dobivenu tako da smo pismo označili s 1 a glavu s 0 vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{E}X &= 0.5 \\ \mathrm{Var}X &= 0.25 \end{aligned}$$

Ukoliko slučajnu varijablu iz zadatka označimo s Y, tada je

$$Y = X + 1.$$

Tada je

$$\mathbf{E}Y = \mathbf{E}X + 1 =$$

Primjer. Ukoliko kod bacanja novčića pojavljivanje pisma označimo s 2 a pojavljivanje glave s 1, odredite očekivanje i varijancu ovako definirane slučajne varijable.

Rješenje. U prijašnjem primjeru smo pokazali da za slučajnu varijablu (X) dobivenu tako da smo pismo označili s 1 a glavu s 0 vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{E}X &= 0.5 \\ \mathrm{Var}X &= 0.25 \end{aligned}$$

Ukoliko slučajnu varijablu iz zadatka označimo s Y, tada je

$$Y = X + 1.$$

Tada je

$$\begin{aligned} \mathbf{E}Y &= \mathbf{E}X + 1 = 0.5 + 1 = 1.5 \\ \mathrm{Var}Y &= \mathrm{Var}X \end{aligned}$$

Primjer. Ukoliko kod bacanja novčića pojavljivanje pisma označimo s 2 a pojavljivanje glave s 1, odredite očekivanje i varijancu ovako definirane slučajne varijable.

Rješenje. U prijašnjem primjeru smo pokazali da za slučajnu varijablu (X) dobivenu tako da smo pismo označili s 1 a glavu s 0 vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{E}X &= 0.5 \\ \mathrm{Var}X &= 0.25 \end{aligned}$$

Ukoliko slučajnu varijablu iz zadatka označimo s Y, tada je

$$Y = X + 1.$$

Tada je

$$\begin{aligned} \mathbf{E}Y &= \mathbf{E}X + 1 = 0.5 + 1 = 1.5 \\ \mathrm{Var}Y &= \mathrm{Var}X = 0.25 \\ \sigma(Y) &= \sqrt{\mathrm{Var}Y} = \end{aligned}$$

Primjer. Ukoliko kod bacanja novčića pojavljivanje pisma označimo s 2 a pojavljivanje glave s 1, odredite očekivanje i varijancu ovako definirane slučajne varijable.

Rješenje. U prijašnjem primjeru smo pokazali da za slučajnu varijablu (X) dobivenu tako da smo pismo označili s 1 a glavu s 0 vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{E}X &= 0.5 \\ \mathrm{Var}X &= 0.25 \end{aligned}$$

Ukoliko slučajnu varijablu iz zadatka označimo s Y, tada je

$$Y = X + 1.$$

Tada je

$$\begin{aligned} \mathbf{E}Y &= \mathbf{E}X + 1 = 0.5 + 1 = 1.5 \\ \mathrm{Var}Y &= \mathrm{Var}X = 0.25 \\ \sigma(Y) &= \sqrt{\mathrm{Var}Y} = \sqrt{0.25} = 0.5 \end{aligned}$$