Statistika

Vanja Wagner

5. Statistički testovi

Usporedba više očekivanja

Podsjetimo se, za testiranje hipoteze o jednakosti očekivanja dvije populacije:

$$H_0 : \quad \mu_X = \mu_Y$$

koristili smo t-test. Prirodno se postavlja pitanje možemo li usporediti očekivanja više populacija? Npr.

$$H_0 \quad \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \quad ?$$

Potreba za ovakvim testovima se često javlja u situaciji kada uspoređujemo više tretmana (metoda) i želimo ustanoviti jesu li one (u srednjem) različite.

Višestruko testiranje

Jedan naivni pristup za testiranje H_0 bi bio testirati redom niz hipoteza

$$\begin{aligned} H_{0,1}: &\quad \mu_1 = \mu_2 \\ H_{0,2}: &\quad \mu_1 = \mu_3 \\ H_{0,3}: &\quad \mu_2 = \mu_3 \end{aligned}$$

[1] Ove prilagodbe se nazivaju *korekcije* (Bonferronijeva, Šidakova, Holmova...).

Višestruko testiranje

Jedan naivni pristup za testiranje H_0 bi bio testirati redom niz hipoteza

$$\begin{aligned} H_{0,1}: &\quad \mu_1 = \mu_2 \\ H_{0,2}: &\quad \mu_1 = \mu_3 \\ H_{0,3}: &\quad \mu_2 = \mu_3 \end{aligned}$$

Recimo da gornje tri hipoteze nezavisno testiramo, jednu po jednu nezavisno od drugih (uzmemo 6 nezavisnih uzorka, po dva iz svake populacije). Zaključak formiramo tako da hipotezu H_0 odbacimo ako smo je odbacili u barem jednom pojedinačnom testiranju.

[1] Ove prilagodbe se nazivaju *korekcije* (Bonferronijeva, Šidakova, Holmova...).

Višestruko testiranje

Jedan naivni pristup za testiranje H_0 bi bio testirati redom niz hipoteza

$$\begin{aligned} H_{0,1}: &\quad \mu_1 = \mu_2 \\ H_{0,2}: &\quad \mu_1 = \mu_3 \\ H_{0,3}: &\quad \mu_2 = \mu_3 \end{aligned}$$

Recimo da gornje tri hipoteze nezavisno testiramo, jednu po jednu nezavisno od drugih (uzmemo 6 nezavisnih uzorka, po dva iz svake populacije). Zaključak formiramo tako da hipotezu H_0 odbacimo ako smo je odbacili u barem jednom pojedinačnom testiranju.

Kolika je vjerojatnost da ćemo nakon tih 3 testiranja odbaciti hipotezu H_0 ukoliko je ona istinita? Odnosno, kolika je pogreška I. vrste za test koji se sastoji od 3 pojedinačnih testiranja?

[1] Ove prilagodbe se nazivaju *korekcije* (Bonferronijeva, Šidakova, Holmova...).

Višestruko testiranje

Jedan naivni pristup za testiranje H_0 bi bio testirati redom niz hipoteza

$$\begin{aligned} H_{0,1}: &\quad \mu_1 = \mu_2 \\ H_{0,2}: &\quad \mu_1 = \mu_3 \\ H_{0,3}: &\quad \mu_2 = \mu_3 \end{aligned}$$

Recimo da gornje tri hipoteze nezavisno testiramo, jednu po jednu nezavisno od drugih (uzmemo 6 nezavisnih uzorka, po dva iz svake populacije). Zaključak formiramo tako da hipotezu H_0 odbacimo ako smo je odbacili u barem jednom pojedinačnom testiranju.

Kolika je vjerojatnost da ćemo nakon tih 3 testiranja odbaciti hipotezu H_0 ukoliko je ona istinita? Odnosno, kolika je pogreška I. vrste za test koji se sastoji od 3 pojedinačnih testiranja?

Neka je: $\bar{\alpha}$ - Razina značajnosti u pojedinom testiranju.

α - Razina značajnosti ukupnog testa.

Tada je

$$\alpha = 1 - (1-\bar{\alpha})^3, \text{ odnosno } \bar{\alpha} = 1 - \sqrt[3]{1-\alpha} \approx \frac{\alpha}{3}.$$ [1]

[1] Ove prilagodbe se nazivaju *korekcije* (Bonferronijeva, Šidakova, Holmova...).

Višestruko testiranje

Neki od problema ovog pristupa višestrukom testiranju

- Potreba za većim brojem uzoraka ili uključenjem zavisnosti pri računu stvarne pogreške I. vrste;
- Pojedinačni testovi se moraju provoditi uz jako male razine značajnosti, što povećava broj ne odbacivanja pojedinačnih nul hipoteza.
- Ovakvim uzastopnim testiranjem raste pogreška II. vrste, odnosno opada snaga (pojedinog) testa.

Postoje brojne druge metode koje omogućavaju zajedničko testiranje grupe hipoteza, ali se njima nećemo baviti u sklopu ovog kolegija (npr. FWER, FDR i vezani koncepti)

ANOVA test

Za usporedbu očekivanja više populacija standardno se provodi tzv. **analiza varijance** (ANOVA).

Za k **normalnih** populacija želimo provjerilti jesu li očekivanja promatranog obilježja u tim populacijama jednaka. Testiramo hipotezu

$$H_0 : \quad \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k.$$

uz pripadnu alternativnu hipotezu:

$$H_a : \quad \text{barem jedan par očekivanja je različit.}$$

ANOVA test

Za usporedbu očekivanja više populacija standardno se provodi tzv. **analiza varijance** (ANOVA).

Za k **normalnih** populacija želimo provjerilti jesu li očekivanja promatranog obilježja u tim populacijama jednaka. Testiramo hipotezu

$$H_0: \quad \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k.$$

uz pripadnu alternativnu hipotezu:

$$H_a: \quad \text{barem jedan par očekivanja je različit.}$$

Odabir uzorka i uvjeti testa:

- Biramo k uzoraka iz k populacija (pri čemu populacija može odgovarati pojedinom tretmanu, npr. uspoređujemo uspješnost k metoda liječenja neke bolesti na miševima);

ANOVA test

Za usporedbu očekivanja više populacija standardno se provodi tzv. **analiza varijance** (ANOVA).

Za k **normalnih** populacija želimo provjerilti jesu li očekivanja promatranog obilježja u tim populacijama jednaka. Testiramo hipotezu

$$H_0 : \quad \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k.$$

uz pripadnu alternativnu hipotezu:

$$H_a : \quad \text{barem jedan par očekivanja je različit.}$$

Odabir uzorka i uvjeti testa:

- Biramo k uzoraka iz k populacija (pri čemu populacija može odgovarati pojedinom tretmanu, npr. uspoređujemo uspješnost k metoda liječenja neke bolesti na miševima);
- Veličina uzoraka za svaku od populacija ne treba biti ista (radi jednostavnosti ćemo često pretpostaviti da su svi uzorci iste duljine n, pa imamo ukupno $k \cdot n$ podataka);

ANOVA test

Za usporedbu očekivanja više populacija standardno se provodi tzv. **analiza varijance** (ANOVA).

Za k **normalnih** populacija želimo provjerilti jesu li očekivanja promatranog obilježja u tim populacijama jednaka. Testiramo hipotezu

$$H_0 : \quad \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k.$$

uz pripadnu alternativnu hipotezu:

$$H_a : \quad \text{barem jedan par očekivanja je različit.}$$

Odabir uzorka i uvjeti testa:

- Biramo k uzoraka iz k populacija (pri čemu populacija može odgovarati pojedinom tretmanu, npr. uspoređujemo uspješnost k metoda liječenja neke bolesti na miševima);
- Veličina uzoraka za svaku od populacija ne treba biti ista (radi jednostavnosti ćemo često pretpostaviti da su svi uzorci iste duljine n, pa imamo ukupno $k \cdot n$ podataka);
- Pretpostavljamo da uzorci dolaze iz normalnih distribucija (odnosno da je promatrano obilježje normalno distribuirano u svakoj populaciji);

ANOVA test

Za usporedbu očekivanja više populacija standardno se provodi tzv. **analiza varijance** (ANOVA).

Za k **normalnih** populacija želimo provjerilti jesu li očekivanja promatranog obilježja u tim populacijama jednaka. Testiramo hipotezu

$$H_0 : \quad \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k.$$

uz pripadnu alternativnu hipotezu:

$$H_a : \quad \text{barem jedan par očekivanja je različit.}$$

Odabir uzorka i uvjeti testa:

- Biramo k uzoraka iz k populacija (pri čemu populacija može odgovarati pojedinom tretmanu, npr. uspoređujemo uspješnost k metoda liječenja neke bolesti na miševima);
- Veličina uzoraka za svaku od populacija ne treba biti ista (radi jednostavnosti ćemo često pretpostaviti da su svi uzorci iste duljine n, pa imamo ukupno $k \cdot n$ podataka);
- Pretpostavljamo da uzorci dolaze iz normalnih distribucija (odnosno da je promatrano obilježje normalno distribuirano u svakoj populaciji);
- Pretpostavljamo da su standardne devijacije (ili varijance) obilježja u svih k populacija iste.

ANOVA - opis procedure

Jednostavnosti radi, pretpostavimo da imamo k uzoraka iz k populacija **jednake** duljine n. U prvom koraku izračunamo srednje vrijednosti za svaki uzorak:

ANOVA - opis procedure

Jednostavnosti radi, pretpostavimo da imamo k uzoraka iz k populacija **jednake** duljine n. U prvom koraku izračunamo srednje vrijednosti za svaki uzorak:

Uzorak	**Slučajni uzorak**	**Sr. vr. uzorka**
Uzorak 1	X_{11} X_{12} X_{13} $\ldots$ X_{1j} $\ldots$ X_{1n}	$\bar{X}_1 = \frac{1}{n}\sum_j X_{1j}$
Uzorak 2	X_{21} X_{22} X_{23} $\ldots$ X_{2j} $\ldots$ X_{2n}	$\bar{X}_2 = \frac{1}{n}\sum_j X_{2j}$
$\vdots$	$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$	$\vdots$
Uzorak i	X_{i1} X_{i2} X_{i3} $\ldots$ X_{ij} $\ldots$ X_{in}	$\bar{X}_i = \frac{1}{n}\sum_j X_{ij}$
$\vdots$	$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$	$\vdots$
Uzorak k	X_{k1} X_{k2} X_{k3} $\ldots$ X_{kj} $\ldots$ X_{kn}	$\bar{X}_k = \frac{1}{n}\sum_j X_{kj}$

Zatim izračunamo i srednju vrijednost cijelog uzorka (svih $k \cdot n$ podataka):

$$\bar{X} = \frac{1}{k \cdot n}\sum_i \sum_j X_{ij} = \frac{1}{k}\sum_i \bar{X}_i.$$

ANOVA - opis procedure

Suma kvadrata (sum of squares)

ANOVA - opis procedure

Suma kvadrata (sum of squares)

Osnova ANOVA testa je usporedba različitih procjena varijance σ^2.

ANOVA - opis procedure

Suma kvadrata (sum of squares)

Osnova ANOVA testa je usporedba različitih procjena varijance σ^2.

Na osnovu svih uzoraka ($k \cdot n$ podataka), uz pretpostavku da su sve varijance jednakem možemo procijeniti varijancu s $S^2 = \frac{1}{k \cdot n - 1} SSU$, gdje je SSU **ukupna suma kvadrata** (*total sum of squares*) definirana s

$$SSU = \sum_i \sum_j \left(X_{ij} - \bar{X}\right)^2 .$$

ANOVA - opis procedure

Suma kvadrata (sum of squares)

Osnova ANOVA testa je usporedba različitih procjena varijance σ^2.

Na osnovu svih uzoraka ($k \cdot n$ podataka), uz pretpostavku da su sve varijance jednakem možemo procijeniti varijancu s $S^2 = \frac{1}{k \cdot n - 1} SSU$, gdje je SSU **ukupna suma kvadrata** (*total sum of squares*) definirana s

$$SSU = \sum_i \sum_j (X_{ij} - \bar{X})^2 .$$

Ukupna suma kvadrata se može rastaviti na dva dijela:

$$SS = SSE + SST,$$

gdje je SSE **suma kvadrata za pogreške** (*sum of squares for errors*) dana s

$$SSE = \sum_i \sum_j (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 ,$$

ANOVA - opis procedure

Suma kvadrata (sum of squares)

Osnova ANOVA testa je usporedba različitih procjena varijance σ^2.

Na osnovu svih uzoraka ($k \cdot n$ podataka), uz pretpostavku da su sve varijance jednakem možemo procijeniti varijancu s $S^2 = \frac{1}{k \cdot n - 1} SSU$, gdje je SSU **ukupna suma kvadrata** (*total sum of squares*) definirana s

$$SSU = \sum_i \sum_j \left(X_{ij} - \bar{X}\right)^2 .$$

Ukupna suma kvadrata se može rastaviti na dva dijela:

$$SS = SSE + SST,$$

gdje je SSE **suma kvadrata za pogreške** (*sum of squares for errors*) dana s

$$SSE = \sum_i \sum_j \left(X_{ij} - \bar{X}_i\right)^2 ,$$

a SST **suma kvadrata za tretmane (faktore)**

$$SST = \sum_i n \left(\bar{X}_i - \bar{X}\right)^2 .$$

ANOVA - opis procedure

Na osnovu ovih veličina definiramo i pripadna srednjekvadratna odstupanja:

- MST (*mean square for tretments*) $MST = \frac{SST}{k-1}$;
- MSE (*mean square for error*) $MSE = \frac{SSE}{k \cdot n - k}$ (ovdje je $k \cdot n$ ukupan broj podataka).

ANOVA - opis procedure

Na osnovu ovih veličina definiramo i pripadna srednjekvadratna odstupanja:

- MST (*mean square for tretments*) $MST = \frac{SST}{k-1}$;
- MSE (*mean square for error*) $MSE = \frac{SSE}{k \cdot n - k}$ (ovdje je $k \cdot n$ ukupan broj podataka).

Uočimo

- MST je varijanca uzorka srednjih vrijednosti $\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_k$ (gdje se svaka srednja vrijednost poljavljuje u uzorku onoliko puta kolika je duljina uzorka za taj tretman);
- MSE je prosjek uzoračkih varijanci pojedine populacije, tj. $MSE = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} S_i^2$ (ovdje je S_i^2 varijanca i-tog uzorka).

ANOVA - opis procedure

Na osnovu ovih veličina definiramo i pripadna srednjekvadratna odstupanja:

- MST (*mean square for tretments*) $MST = \frac{SST}{k-1}$;
- MSE (*mean square for error*) $MSE = \frac{SSE}{k \cdot n - k}$ (ovdje je $k \cdot n$ ukupan broj podataka).

Uočimo

- MST je varijanca uzorka srednjih vrijednosti $\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_k$ (gdje se svaka srednja vrijednost poljavljuje u uzorku onoliko puta kolika je duljina uzorka za taj tretman);
- MSE je prosjek uzoračkih varijanci pojedine populacije, tj. $MSE = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} S_i^2$ (ovdje je S_i^2 varijanca i-tog uzorka).

Promatramo statistiku

$$F = \frac{MST}{MSE}.$$

Intuitivno je jasno da ako se značajan dio varijabilnosti može objasniti različitim tretmanima (npr. ako su efekti tretmana uistinu različiti) tada očekujemo da je MST značajno veća od MSE. To znači da će velike vrijednosti statistike F ukazivati na moguće odbacivanje nulte hipoteze H_0. Kritično područje za razinu značajnosti α je

ANOVA - provođenje testa

Rezultati se obično prikazuju pomoću tablice:

Izvor varijacije	Suma kvadrata	Stupanj slobode	Srednja vr. sume kvadrata	Statistika F
Tretman	SST	$k-1$	$MST = \dfrac{SST}{k-1}$	$\dfrac{MST}{MSE}$
Pogreška	SSE	$k \cdot n - k$	$MSE = \dfrac{SSE}{k \cdot n - k}$	
Ukupno	SSU	$k \cdot n - 1$		

ANOVA - provođenje testa

Rezultati se obično prikazuju pomoću tablice:

Izvor varijacije	Suma kvadrata	Stupanj slobode	Srednja vr. sume kvadrata	Statistika F
Tretman	SST	$k-1$	$MST = \frac{SST}{k-1}$	$\frac{MST}{MSE}$
Pogreška	SSE	$k \cdot n - k$	$MSE = \frac{SSE}{k \cdot n - k}$	
Ukupno	SSU	$k \cdot n - 1$		

Može se pokazati da:

- su SSE i SST nezavisne s odgovarajućim χ^2 distribucijama (stupnjevi slobode iz tablice);
- uz pretpostavku da je H_0 točna, $F \sim F(k-1, nk-k)$ (Fisherova distribucija).

ANOVA - provođenje testa

Rezultati se obično prikazuju pomoću tablice:

Izvor varijacije	Suma kvadrata	Stupanj slobode	Srednja vr. sume kvadrata	Statistika F
Tretman	SST	$k-1$	$MST = \dfrac{SST}{k-1}$	$\dfrac{MST}{MSE}$
Pogreška	SSE	$k \cdot n - k$	$MSE = \dfrac{SSE}{k \cdot n - k}$	
Ukupno	SSU	$k \cdot n - 1$		

Može se pokazati da:

- su SSE i SST nezavisne s odgovarajućim χ^2 distribucijama (stupnjevi slobode iz tablice);
- uz pretpostavku da je H_0 točna, $F \sim F(k-1, nk-k)$ (Fisherova distribucija).

Uz danu razinu značajnosti α, kritično područje je dano s

$$[F_{1-\alpha}(k-1, k \cdot n - k), \infty\rangle,$$

odnosno odbacujemo H_0 za vrijednost statistike F vrijedi

$$F \geqslant F_{1-\alpha}(k-1, k \cdot n - k).$$

Primjer. Trener želi usporediti tri različite metode treninga. Svaku od metoda primijenio je na po $n = 4$ studenta. Nakon 30 dana ocijenjena je uspješnost i ocjene su prikazane u tablici

Metoda	**Observacije**			
Metoda 1	3	6	4	7
Metoda 2	11	8	10	7
Metoda 3	6	9	5	8

Jesu li sve tri metode jednako uspješne? Hipotezu testirajte uz razinu značajnosti $\alpha = 0.05$.

ANOVA u Excelu

Anova: Single Factor

SUMMARY

Groups	*Count*	*Sum*	*Average*	*Variance*
Metoda 1	4	20	5	3.333333
Metoda 2	4	36	9	3.333333
Metoda 3	4	28	7	3.333333

ANOVA

Source of Variation	*SS*	*df*	*MS*	*F*	*P-value*	*F crit*
Between Groups	32	2	16	4.8	0.038131	4.256495
Within Groups	30	9	3.333333			
Total	62	11				

ANOVA - pretpostavke i daljnje analize

ANOVA test nam je pokazao da su srednje vrijednosti različite, tj. da se metode razlikuju. Koje od tih tri metoda se razlikuju? Za odgovor na ovo pitanje treba napraviti međusobnu usporedbu svih metoda $\rightarrow$ višestruka usporedba (npr. Duncanov test, Tukeyev test, Dunnettov test)

ANOVA - pretpostavke i daljnje analize

ANOVA test nam je pokazao da su srednje vrijednosti različite, tj. da se metode razlikuju. Koje od tih tri metoda se razlikuju? Za odgovor na ovo pitanje treba napraviti međusobnu usporedbu svih metoda $\rightarrow$ višestruka usporedba (npr. Duncanov test, Tukeyev test, Dunnettov test)

ANOVA i spomenuti 'post hoc' testovi pretpostavlja da

- uzorci su nezavisni;
- uzorci su iz normalne populacije;
- Standardna devijacija populacija je jednaka (ova pretpostavka se u slučaju dvije populacije testira F-testom, a u slučaju više populacija Levene-ovim testom).

Pripadnosti normalnoj distribuciji

Prethodnih smo tjedana vidjeli nekoliko statističkih testova i procedura gdje je osnovna pretpostavka bila da slučajni uzorak dolazi iz neke normalne razdiobe. Prisjetimo se, to je bila ključna pretpostavka u slučaju kada promatramo uzorke malih duljina.

Provjera pretpostavke o normalnosti uzorka:

1. prvo napravimo grafičku (deskriptivnu) analizu;
2. zatim provedemo adekvatni statistički test.

Grafička analiza pripadnosti distribuciji - histogram

Neka su $x_1, \ldots, x_n$ podaci dobiveni nekim mjerenjem. Grafički provjerimo jesu li podaci realizacija nekog normalno distribuiranog slučajnog uzorka (normalnost podataka). Za primjer ćemo uzeti podatke o izmjerenom krvnom tlaku prije davanja stimulansa s prošlog predavanja (kod testa usporedbe očekivanja dvaju populacija).

1. Nacrtamo histogram **relativnih** frekvencija za podatke $x_1, \ldots, x_n$ (grafička aproksimacija površine ispod krivulje funkcije gustoće);

Grafička analiza pripadnosti distribuciji - histogram

Neka su $x_1, \ldots, x_n$ podaci dobiveni nekim mjerenjem. Grafički provjerimo jesu li podaci realizacija nekog normalno distribuiranog slučajnog uzorka (normalnost podataka). Za primjer ćemo uzeti podatke o izmjerenom krvnom tlaku prije davanja stimulansa s prošlog predavanja (kod testa usporedbe očekivanja dvaju populacija).

1. Nacrtamo histogram **relativnih** frekvencija za podatke $x_1, \ldots, x_n$ (grafička aproksimacija površine ispod krivulje funkcije gustoće);

2. Procijenimo parametre distribucije kojoj provjeravamo pripadnost (za normalnu razdiobu to su μ i σ):

Grafička analiza pripadnosti distribuciji - histogram

Neka su $x_1, \ldots, x_n$ podaci dobiveni nekim mjerenjem. Grafički provjerimo jesu li podaci realizacija nekog normalno distribuiranog slučajnog uzorka (normalnost podataka). Za primjer ćemo uzeti podatke o izmjerenom krvnom tlaku prije davanja stimulansa s prošlog predavanja (kod testa usporedbe očekivanja dvaju populacija).

1. Nacrtamo histogram **relativnih** frekvencija za podatke $x_1, \ldots, x_n$ (grafička aproksimacija površine ispod krivulje funkcije gustoće);
2. Procijenimo parametre distribucije kojoj provjeravamo pripadnost (za normalnu razdiobu to su μ i σ):

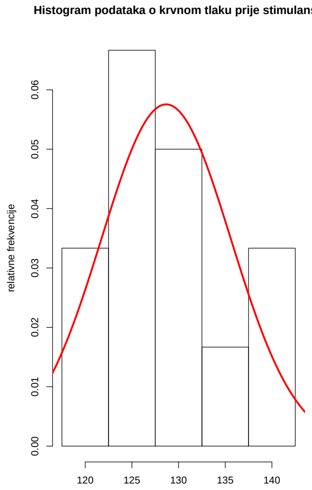
$$\hat{\mu} = \overline{x} = 128.6667, \qquad \hat{\sigma} = s = 6.932576;$$

Grafička analiza pripadnosti distribuciji - histogram

Neka su $x_1, \ldots, x_n$ podaci dobiveni nekim mjerenjem. Grafički provjerimo jesu li podaci realizacija nekog normalno distribuiranog slučajnog uzorka (normalnost podataka). Za primjer ćemo uzeti podatke o izmjerenom krvnom tlaku prije davanja stimulansa s prošlog predavanja (kod testa usporedbe očekivanja dvaju populacija).

1. Nacrtamo histogram **relativnih** frekvencija za podatke $x_1, \ldots, x_n$ (grafička aproksimacija površine ispod krivulje funkcije gustoće);
2. Procijenimo parametre distribucije kojoj provjeravamo pripadnost (za normalnu razdiobu to su μ i σ):
$$\hat{\mu} = \overline{x} = 128.6667, \qquad \hat{\sigma} = s = 6.932576;$$
3. Na histogram dodamo graf funkcije gustoće promatrane (u našem slučaju, normalne) razdiobe s procijenjenim parametrima - odnosno graf funkcije
$$f(x) = \frac{1}{\hat{\sigma}\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\hat{\mu})^2}{2\hat{\sigma}^2}}.$$

Grafička analiza pripadnosti distribuciji - histogram



Crvena linija predstavlja graf funkcije gustoće normalne razdiobe s procijenjenim parametrima.

Grafička analiza pripadnosti distribuciji - normalni vjerojatnosni graf

Usporedba distribucije s normalnom distribucijom preko **normalnog vjerojatnosnog grafa**: nacrtamo točke $(q_i, x_{(i)})$, gdje je

1. $x_{(i)}$ i-ti podatak iz uređenog uzorka, odnosno i/n-ti kvantil uzorka;
2. q_i je i/n-ti kvantil jedinične normalne razdiobe, tj. $z_{i/n}$.

Grafička analiza pripadnosti distribuciji - normalni vjerojatnosni graf

Usporedba distribucije s normalnom distribucijom preko **normalnog vjerojatnosnog grafa**: nacrtamo točke $(q_i, x_{(i)})$, gdje je

1. $x_{(i)}$ i-ti podatak iz uređenog uzorka, odnosno i/n-ti kvantil uzorka;
2. q_i je i/n-ti kvantil jedinične normalne razdiobe, tj. $z_{i/n}$.

Ako točke približno slijede pravac, možemo naslutiti da podaci dolaze iz neke normalne razdiobe.

Grafička analiza pripadnosti distribuciji - normalni vjerojatnosni graf

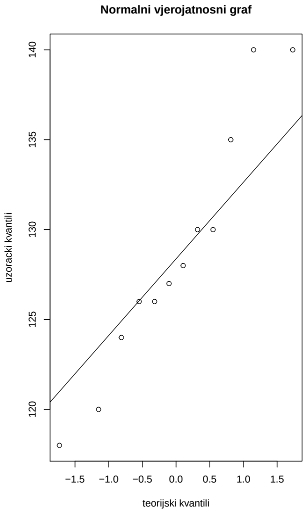
Usporedba distribucije s normalnom distribucijom preko **normalnog vjerojatnosnog grafa**: nacrtamo točke $(q_i, x_{(i)})$, gdje je

1. $x_{(i)}$ i-ti podatak iz uređenog uzorka, odnosno i/n-ti kvantil uzorka;
2. q_i je i/n-ti kvantil jedinične normalne razdiobe, tj. $z_{i/n}$.

Ako točke približno slijede pravac, možemo naslutiti da podaci dolaze iz neke normalne razdiobe.

Treba posebnu pozornost obratiti na **repove** grafa.

Grafička analiza pripadnosti distribuciji - normalni vjerojatnosni graf



Ostale deskriptivne analize pripadnosti normalnoj distribuciji

Zakošenost normalne distribucije je 0 (simetrija!). Možemo procijeniti zakošenost našeg uzorka:

- mala zakošenost: -0.5 do 0.5
- srednja zakošenost: između -1 i -0.5 te između 0.5 i 1
- velika zakošenost: manja od -1 ili veća od 1

Ostale deskriptivne analize pripadnosti normalnoj distribuciji

Zakošenost normalne distribucije je 0 (simetrija!). Možemo procijeniti zakošenost našeg uzorka:

- mala zakošenost: -0.5 do 0.5
- srednja zakošenost: između -1 i -0.5 te između 0.5 i 1
- velika zakošenost: manja od -1 ili veća od 1

Spljoštenost normalne distribucije je 3 (korigirani koeficijent spljoštenosti $= 0$).

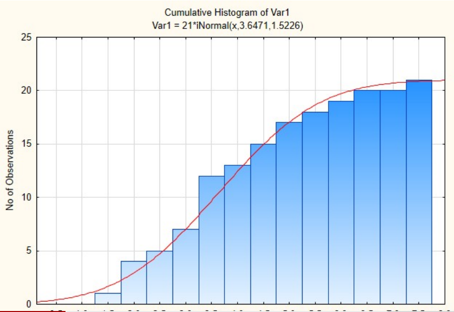
$kurt(X) = 4.31$	$kurt(X) = 3$	$kurt(X) = 2.13$
$kurt(X) > 3$	$kurt(X) = 3$	$kurt(X) < 3$
Leptokurtična (izbočena) distribucija	Mezokurtična distribucija	Platikurtična (spljoštena) distribucija

Testiranje hipoteze o normalnosti

Statistički testovi za provjeru pripadnosti uzorka nekoj neprekidnoj distribuciji baziraju se na **empirijskoj funkciji distribucije** (kumulativne relativne frekvencije) uzorka $(X_1, \ldots, X_n)$:

$$\hat{F}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i \leqslant x\}}.$$

Osnovna ideja tih testova je usporedba empirijske funkcije distribucije $\hat{F}$ s testnom (teorijskom) funkcijom distribucije F. U slučaju normalne razdiobe, usporedili bi $\hat{F}$ s funkcijom distribucije normalne razdiobe $N(\mu, \sigma^2)$ ili $N(\bar{X}, S^2)$ (pritom smo procijenili parametre normalne distribucije na tremelju našeg uzorka).



Kolmogorov-Smirnovljev test

Kolmogorov-Smirnovljev test koristi statistiku D koja je jednaka najvećem odstupanju empirijske funkcije distribucije $\hat{F}$ od testirane (u našem slučaju, određene specifične normalne) funkcije distribucije:

$$D = \max_{x} |\hat{F}(x) - F(x)|.$$

Kolmogorov-Smirnovljev test

Kolmogorov-Smirnovljev test koristi statistiku D koja je jednaka najvećem odstupanju empirijske funkcije distribucije $\hat{F}$ od testirane (u našem slučaju, određene specifične normalne) funkcije distribucije:

$$D = \max_{x} |\hat{F}(x) - F(x)|.$$

Velike vrijednosti ove statistike ukazuju na odstupanje podataka od teorijske (testne) distribucije. Kritične vrijednosti su dane tablično - za danu razinu značajnosti, duljinu uzorka i broj procijenjenih parametara očitamo kritičnu vrijednost d i odbacimo nul hipotezu

$$H_0 : \text{ podaci dolaze iz razdiobe } F$$

ako je

$$D > d.$$

Prednosti KS testa i alternative

Kolmogorov-Smirnov test se može koristiti za proizvoljnu neprekidnu razdiobu.
Alternativno, za testiranje hipoteze o normalnosti možemo koristiti **Shapiro-Wilkov test**.

Prednosti KS testa i alternative

Kolmogorov-Smirnov test se može koristiti za proizvoljnu neprekidnu razdiobu. Alternativno, za testiranje hipoteze o normalnosti možemo koristiti **Shapiro-Wilkov test**.

KS test se može koristiti samo kad su parametri testne distibucije unaprijed određeni (nezavisno od naših podataka). Snaga Shapiro-Wilkovog testa je tako veća (za normalnu distribuciju) nego kod Kolmogorov-Smirnov testa.

Prednosti KS testa i alternative

Kolmogorov-Smirnov test se može koristiti za proizvoljnu neprekidnu razdiobu. Alternativno, za testiranje hipoteze o normalnosti možemo koristiti **Shapiro-Wilkov test**.

KS test se može koristiti samo kad su parametri testne distibucije unaprijed određeni (nezavisno od naših podataka). Snaga Shapiro-Wilkovog testa je tako veća (za normalnu distribuciju) nego kod Kolmogorov-Smirnov testa.

Neke alternative: Lillieforseov test, Anderson-Darling test, Cramer Von-Mises test, ...