1 Algebra matrica

1.1 Osnovni pojmovi

Definicija 1. *Neka su m i n prirodni brojevi. Niz elemenata*

$$(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}) \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$$

posloženih u pravokutnu shemu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

naziva se ***realna matrica tipa*** $m \times n$*. Uređene n-torke*

$$(a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n}), (a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots, a_{2n}), \ \ldots, (a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}, \ldots, a_{mn})$$

su ***retci*** *matrice A, dok uređene m-torke*

$$(a_{11}, a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{m1}), (a_{12}, a_{22}, a_{32}, \ldots, a_{m2}), \ \ldots, (a_{1n}, a_{2n}, a_{3n}, \ldots, a_{mn})$$

predstavljaju ***stupce*** *matrice A.*

Skup svih realnih matrica tipa $m \times n$ označava se s $\boldsymbol{M}_{mn}(\mathbb{R})$.

Matrice za koje je $m = n$ (broj stupaca jednak broju redaka) nazivaju se ***kvadratne matrice reda*** *n. Uređena n-torka elemenata kvadratne matrice $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ naziva se* ***dijagonala*** *(glavna dijagonala).*

Dakle, matrica tipa $m \times n$ je matrica koja se sastoji od m redaka i n stupaca. Uobičajeno je matrice označavati s velikim tiskanim slovima A, B, ..., a njihove elemente s malim a_{ij}, b_{ij}... Element a_{ij} se ponekad naziva *opći član* matrice A. Oznaka u njegovom indeksu govori nam da se nalazi na presjeku i-tog redka i j-tog stupca. Zbog praktičnosti matrice ćemo često kratko zapisivati kao $A = (a_{ij})$ ili $A = [a_{ij}]$.

Mi ćemo uglavnom proučavati matrice čiji su elementi realni brojevi, to jest realne matrice. No, elementi matrice mogu biti kompleksni brojevi pa se takve nazivaju kompleksnim matricama. Štoviše, na mjestu elemenata matrice mogu se naći različiti matematički objekti kao što su na primjer preslikavanja.

Primjer 1. *Zadane se sljedeće matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0.2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1+i & -2i \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \ S = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ R = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_\varphi = \begin{pmatrix} \sin\varphi & \cos\varphi \\ -\cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Opišimo ove matrice po 'obliku' i 'sadržaju'. A *je realna matrica tipa* 3×2, C *je kompleksna (kvadratna) matrica reda* 2. S *je realna matrica tipa* 3×1 *i nazivamo ju* ***stupčanom matricom*** *jer se sastoji od samo jednog stupca. Slično, matrica* R *je* ***retčana matrica*** *jer se sastoji od samo jednog retka, odnodno tipa je* 1×3. *Matrica* N *je tipa* 2×3 *i svi njeni elementi su jednaki* 0, *stoga ćemo ju nazivati* ***nulmatricom****. Uočimo da matrica* I *na dijagonali ima sve elemente jednake* 1, *a izvan jednake* 0. *Takva se matrica naziva* ***jedinična matrica*** *reda 3. Elementi kvadratne matrice* R_φ *su preslikavanja (funkcije).*

Definicija 2. *Dvije matrice* $A = (a_{ij})$ *i* $B = (b_{ij})$ *su* ***jednake*** *ako su istog tipa, na primjer tipa* $m \times n$ *i vrijedi da je* $a_{ij} = b_{ij}$ *za sve* $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

1.2 Zbrajanje matrica

Definicija 3. *Neka su* $A = (a_{ij})$ *i* $B = (b_{ij})$ *matrice istog tipa* $m \times n$. *Zbroj (suma) matrica* A *i* B *je matrica* $C = (c_{ij})$ *tipa* $m \times n$ *takva da je* $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ *za sve* $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Ukratko Definiciju 3 zapisujemo kao

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}),$$

i jednostavno možemo reći da matrice zbrajamo 'po elementima'.

Za zbrajanje matrice vrije svojsta posve analogna svojstima zbrajanja u skupu realnih brojeva.

Teorem 1.1. *Vrijede sljedeća svojstva:*

1. ***Asocijativnost zbrajanja*** -

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

za sve matrice $A, B, C \in \boldsymbol{M}_{mn}(\mathbb{R})$.

2. *Postojanje* ***neutralnog elementa*** *zbrajanja - matrice* $N \in \boldsymbol{M}_{mn}(\mathbb{R})$ *za koju je*

$$A + N = N + A = A,$$

za sve matrice $A \in \boldsymbol{M}_{mn}(\mathbb{R})$.

3. *Postojanje* ***suprotnog elementa*** *zbrajanja - za svaku matricu* $A \in \boldsymbol{M}_{mn}(\mathbb{R})$ *postoji* $B \in \boldsymbol{M}_{mn}(\mathbb{R})$ *takva da je*

$$A + B = B + A = N.$$

Suprotnu matricu označavamo s $B = -A$.

4. ***Komutativnost zbrajanja*** -

$$A + B = B + A,$$

za sve matrice $A, B \in \boldsymbol{M}_{mn}(\mathbb{R})$.

Dokaz. Sva ova svojstva su sasvim očekivana budući da se zbrajanje matrica definira po elementima, a elementi su realni brojevi za koje upravo i vrijede navedena svojstva. Ipak, pokažimo preciznije neka svojstva.

1. Neka su $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, $C = [c_{ij}]$. Vrijedi

$$\begin{aligned}(A+B)+C &= ([a_{ij}]+[b_{ij}])+[c_{ij}] = [a_{ij}+b_{ij}]+[c_{ij}] = [(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}] \\ &= \{\text{asocijativnost zbrajanja u } \mathbb{R}\} = [a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})] \\ &= [a_{ij}]+[b_{ij}+c_{ij}] = [a_{ij}]+([b_{ij}]+[c_{ij}]) = A+(B+C).\end{aligned}$$

2. Nulmatrica je očito neutralni element zbrajanja.

3. Matrica $B = (-a_{ij})$ očito ima traženo svojstvo.

4. Komutativnost se pokazuje na isti način kao i asocijativnost.

□

Svojstva iz Teorema 1.1 navedena su i prema sadržaju i prema redoslijedu s jednim bitnim razlogom. Naime, ako binarna operacija na nekom skupu zadovoljava ta svojstva onda se taj skup naziva ***Abelova*** ili ***komutativna grupa***, s svojstva 1. - 4. nazivaju se *aksiomima* Abelove grupe. Stoga kažemo da naš skup realnih matrica $\mathbf{M}_{mn}(\mathbb{R})$ ima strukturu *Abelove grupe* u odnosu na operaciju zbrajanja. Kraće, pišemo i kažemo da je $(\mathbf{M}_{mn}(\mathbb{R}), +)$ Abelova grupa.

1.3 Množenje matrica skalarom

Definicija 4. *Neka je* $A = (a_{ij})$ *matrica tipa* $m \times n$ *i* λ *realan broj. Tada je* ***produkt matrice*** A ***sa skalarom*** λ, *u oznaci* λA, *matrica tipa* $m \times n$ *čiji su elementi* λa_{ij}, *za* $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Teorem 1.2. *Neka su* $A, B \in \boldsymbol{M}_{mn}(\mathbb{R})$, *te* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. *Vrijede sljedeća svojstva:*

1. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ ***(distributivnost u odnosu na zbrajanje matrica)***,

2. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ ***(distributivnost u odnosu na zbrajanje skalara)***,

3. $(\lambda \cdot \mu)A = \lambda(\mu A)$ ***(kvaziasocijativnost)***

Dokaz. Sva svojstva se dokazuju 'po elementima'. Na primjer, pokažimo svojstvo distributivnost u odnosu na zbrajanje matrica. Neka je $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$. Vrijedi

$$\begin{aligned}\lambda(A+B) &= \lambda([a_{ij}]+[b_{ij}]) = \lambda[a_{ij}+b_{ij}] = [\lambda(a_{ij}+b_{ij})] \\ &= \{\text{distributivnost u } \mathbb{R}\} = [\lambda a_{ij} + \lambda b_{ij}] \\ &= [\lambda a_{ij}] + [\lambda b_{ij}] = \lambda[a_{ij}] + \lambda[b_{ij}] = \lambda A + \lambda B.\end{aligned}$$

□

Skupovi s operacijama koja zadovoljavaju svojstva Teorema 1.1 i 1.2 nazivaju se ***vektorski prostori*** nad poljem realnih brojeva. To znači da je skup realnih matrica jedan vektorski prostor. O vektorskim prostorima bit će još govora.

1.4 Množenje matrica

Množenje matrica će se bitno razlikovati od operacija koje smo upravo definirali - zbrajanja i monoženja skalarom. Množenje ne će biti definirano po analogiji, odnosno 'po elementima'. Za to postoje mnogi razlozi. Navesti ćemo jednu situaciju gdje će pokazati potreba da množenje definiramo na 'dugačiji' način.

Motivacija za definiciju množenja

Prepostavit ćemo da s jedne strane imamo jednu linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom, na primjer

$$2x = 3,$$

a s druge sustav od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice, na primjer

$$\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 2y & = & -1 \\ x & - & y & = & 2. \end{array}$$

Budući da opću linearnu jednadžbu zapisujemo kao

$$ax = b,$$

željeli bi na taj način zapisati i naš sustav linearnih jednadžbi. Sustav ima više koeficijenata, a njih bi željeli 'upakirati' tako da i dalje imamo 'strukturu' jednadžbe $ax = b$, odnosno

$$\begin{pmatrix} paket \\ koeficijenata \\ uz\ nepoznanice \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} paket \\ nepoznanica \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} paket \\ slobodnih \\ koeficijenata \end{pmatrix}.$$

Prirodno je za 'pakete' koristiti matrice. Dakle,

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ono što nam još preostaje jest operaciju '$\cdot$' definirati tako da bude

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+2y \\ x-y \end{pmatrix}.$$

Definicija 5. *Matrice A i B su* ***ulančane*** *ako je broj stupaca matrice A jednak broju redaka matrice B.*

Primjer 2. *Matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \\ 0 & -0.2 \end{pmatrix} \quad i \;\; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & 1.2 & 5 \end{pmatrix}$$

su ulančane jer je broj stupaca matrice A i broj redaka matrice B jednak 2. Uočimo da matrice B i A nisu ulančane, to jest da svojstvo 'biti ulanačan' nije simetrično.

Definicija 6. *Neka je $A = (a_{ij})$ matrica tipa $m \times n$ i $B = (b_{ij})$ matrica tipa $n \times r$.* ***Umnožak*** *ili* ***produkt matrica*** *je matrica $C = (c_{ij})$ tipa $m \times r$ takva da je*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj},$$

za $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, r$. Pišemo $C = A \cdot B$ ili samo $C = AB$.

Operacija množenja matrica se po svojoj definiciji bitno razlikuje od operacija koje smo do sada uveli, zbrajanja matrica i množenja matrica skalarom, koje su bile definirane 'po elementima'. Nadalje, zbrajali smo matrice *istog* tipa, dok se pomnožiti mogu samo dvije matrice koje su *ulančane*. Kraće, množenje matrica možemo opisati tako što kažemo da se (i, j)-ti element (- element na presjeku i-tog redka i j-tog stupca) umnoška matrica A i B dobiva tako što *skalarno* pomnožimo i-ti redak matrice A s j-tim stupcem matrice B. (O skalarnom produktu bit će riječi kasnije).

Primjer 3. *Pomnožimo matrice A i B iz Primjera 2,*

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + (-2)\cdot 2 & 1\cdot 0 + (-2)\cdot 6 & 1\cdot(-1) + (-2)\cdot 1.2 & 1\cdot 0 + (-2)\cdot 5 \\ 3\cdot 2 + 4\cdot 2 & 3\cdot 0 + 4\cdot 6 & 3\cdot(-1) + 4\cdot 1.2 & 3\cdot 0 + 4\cdot 5 \\ 0\cdot 2 + (-0.2)\cdot 2 & 0\cdot 0 + (-0.2)\cdot 6 & 0\cdot(-1) + (-0.2)\cdot 1.2 & 0\cdot 0 + (-0.2)\cdot 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -12 & -3.4 & -10 \\ 14 & 24 & 1.8 & 20 \\ -0.4 & -1.2 & -0.24 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Produkt $B \cdot A$ nije niti definiran jer matrice B i A nisu ulančane.

Primjer 4. *Izračunajmo produkte danih matrica.*

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$,

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -3 & -3 & -3 \\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

(b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Teorem 1.3. *Neka su A, B i C matrice odgovarajućeg tipa tako da sljedeći izrazu budu definirani. Vrijede svojstva:*

1. $A(BC) = (AB)C$ ***(asocijativnost)***
2. $A(B + C) = AB + AC$ ***(lijevi zakon distributivnosti)***
3. $(A + B)C = AC + BC$ ***(desni zakon distributivnosti)***
4. $(\lambda A) \cdot B = \lambda(A \cdot B) = A \cdot (\lambda B)$ ***(bilinearnost)***

Dokaz. Pokažimo drugu tvrdnju. Neka je $A = [a_{ij}]$ matrica tipa $m \times n$, a $B = [b_{ij}]$ i $C = [c_{ij}]$ matrice tipa $n \times r$. Vrijedi

$$\begin{aligned} A(B+C) &= [a_{ij}] \cdot ([b_{ij}] + [c_{ij}]) = [a_{ij}] \cdot [b_{ij} + c_{ij}] \\ &= [\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj})] = [\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj})] \\ &= [\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}] + [\sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}] = [a_{ij}][b_{ij}] + [a_{ij}][c_{ij}] = AB + AC \end{aligned}$$

Ostale tvrdnje se pokazuju slično. □

Na ovom mjestu možemo konačno objasniti naslov našeg poglavlja - algebra matrica. Jasno je da operacija množenja definirana na čitavom skupu $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, to jest na skupu kvadratnih matrica. Već smo prije ustanovili da skup matrica istog tipa čini vektorski prostor. Dakle, skup kvadratnih matrica je vektorski prostor na kojem imamo definiranu i binarnu operaciju množenja koja zadovoljava svojstva distributivnosti i bilinearnosti nazivamo. Takve strukture nazivamo ***algebrama***. Zbog svojstva asocijativnosti koje također vrijedi pridodaje se još i atribut asocijativna algebra.

Definicija 7. ***Jedinična matrica*** *reda* n *je matrica* $I_n = (\delta_{ij})$ *gdje je*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & \imath \neq j \end{cases}.$$

Simbol δ_{ij} *naziva se* ***Kroneckerov simbol****.*

Primjer 5. *Jedinična matrica reda 2 je* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *a reda 3 je* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Teorem 1.4. *Jedinična matrica* I_n *je neutralni element množenja u* $\boldsymbol{M}_n(\mathbb{R})$.

1.5 Transponiranje matrica

Definicija 8. *Neka je* $A = (a_{ij})$ *matrica tipa* $m \times n$. ***Transponirana matrica*** $B = (b_{ij})$ *matrice* A *je tipa* $n \times m$ *za koju vrijedi da je*

$$b_{ij} = a_{ji},$$

za sve $i = 1, 2, \dots m$, $j = 1, 2, \dots n$. *Transponiranu matricu matrice* A *označavamo s* A^t *ili* A^τ.

Praktično se transponiranje matrica izvodi tako da redke matrice 'zamijenimo' stupcima.

Primjer 6. *Za* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ *je*

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Teorem 1.5. *Neka su* A *i* B *matrice odgovarajućih tipova i* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Vrijede svojstva:*

1. $(A^t)^t = A$,
2. $(\lambda A)^t = \lambda A^t$,
3. $(A + B)^t = A^t + B^t$,
4. $(AB)^t = B^t A^t$.

Dokaz. Prva tri svojstva očito vrijede pokažimo četvrto svojstvo. Naka je $A = [a_{ij}]$ matrica tipa $m \times n$, a $B = [b_{ij}]$ tipa $n \times p$. Tada je AB tipa $m \times p$, a $(AB)^t$ tipa $p \times m$. Matrica $B^t A^t$ je isto tipa $p \times m$, jer je B^t tipa $p \times n$, a A^t tipa $n \times m$. Dakle, matrica s lijeve strane istog je tipa kao matrice s desne strane. Sada pokažimo jednakost elemenata:

$$(AB)^t = C^t = [c_{ij}]^t = [c_{ji}] = [\sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki}] = [\sum_{k=1}^{n} a^t_{kj} b^t_{ik}] = [\sum_{k=1}^{n} b^t_{ik} a^t_{kj}] = B^t A^t.$$

□

Definicija 9. *Matrica A je* ***simetrična*** *ako je $A = A^t$. Matrica B je* ***antisimetrična*** *ako je $B = -B^t$.*

Uočimo, da iz same definicije slijedi da simetrična, odnosno antisimetrična matrica mora biti nužno kvadratna. Nadalje, matrica $A = (a_{ij})$ simetrična ako i samo ako je

$$a_{ij} = a_{ji},$$

za sve $i, j = 1, 2, \dots, n$, odnosno

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dakle, 'gornji trokut' matrice zrcalno je simetrčan 'donjem trokutu' u odnosu na dijagonalu. S druge strane, matrica $B = (b_{ij})$ antisimetrična ako i samo ako je

$$b_{ij} = -b_{ji},$$

za sve $i, j = 1, 2, \dots, n$. Specijalno, za dijagonalne elemente antisimetrične matrice vrijedi

$$b_{ii} = -b_{ii},$$

za $i = 1, 2, \dots, n$. To znači da su $b_{ii} = 0$ za sve $i = 1, 2, \dots, n$, odnosno svi elementi na dijagonali antisimetrične matrice su nužno jednaki nuli. Dakle,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ -b_{12} & 0 & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ -b_{13} & -b_{23} & 0 & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_{1n} & -b_{2n} & -b_{3n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Teorem 1.6. *Svaka k vadratna matrica može se jedinstveno prikazati kako zbroj simetrične i antisimetrične matrice.*

Dokaz. Neka je A kvadratna matrica. Vrijedi

$$A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t).$$

Matrica $\frac{1}{2}(A + A^t)$ je simetrična. Zaista,

$$\left(\frac{1}{2}(A + A^t)\right)^t = \frac{1}{2}(A^t + (A^t)^t) = \frac{1}{2}(A + A^t).$$

Matrica $\frac{1}{2}(A - A^t)$ je antisimetrična. Zaista,

$$\left(\frac{1}{2}(A - A^t)\right)^t = \frac{1}{2}(A^t - (A^t)^t) = \frac{1}{2}(A^t - A) = -\frac{1}{2}(A - A^t).$$

Sada pokažimo jedinstvenost rastava. Pretpostavimo da vrijedi rastav

$$A = X + Y = X_1 + Y_1,$$

gdje su X, X_1 simetrične matrice, a Y, Y_1 antisimetrične. Neka je

$$X - X_1 = Y_1 - Y = B.$$

Uočimo da je razlika dviju simetričnih matrica opet simetrična matrica jer

$$(X - X_1)^t = X^t - X_1^t = X - X_1.$$

Nadalje, razlika dviju antisimetričnih matrica opet antisimetrična matrica. Zaista,

$$(Y_1 - Y)^t = Y_1^t - Y^t = -Y_1 + Y = -(Y_1 - Y).$$

Dakle, matrica B je simetrična i antisimetrična. To je jedino moguće ako je B nulmatrica jer $B = B^t = -B$, tj. $2B = 0$. Sada je jasno $X = X_1$ i $Y_1 = Y$. $\square$

Definicija 10. *Kvadratna matrica $A = (a_{ij})$ reda n je*

- ***gornjetrokutasta*** *ako je $a_{ij} = 0$ za sve $1 \leq j < i \leq n$,*
- ***donjetrokutasta*** *ako je $a_{ij} = 0$ za sve $1 \leq i < j \leq n$,*
- ***dijagonalna*** *ako je $a_{ij} = 0$ za sve $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$.*

Primjer 7. *Matrica*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

je gornjetrokutasta, matrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

je donjetrokutasta, a matrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

je dijagonalna.

Uočimo da je produkt gornjetrokutastih matrica (odnosno donjetrokutastih, odnosno dijagonalnih) opet gornjetrokutasta matrica (odnosno donjetrokutasta, odnosno dijagonalna).

Neka je A kvadratna matrica reda n, te neka je $m \in \mathbb{N}$. Definiramo m-tu potenciju matrice A kao

$$A^m = A^{m-1} \cdot A,$$

pri čemu je

$$A^0 = I.$$

Dakle,

$$A^m = \underbrace{A \cdots A}_{m \text{ puta}}.$$

Neka je $p(x)$ polinom m-tog stupnja s realnim koeficijentima, to jest

$$p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

gdje je $a_m \neq 0$. Definiramo $p(A)$ kao

$$p(A) = a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \cdots + a_2 A^2 + a_1 A + a_0 I.$$

2 Linearni sustavi

2.1 Uvodni primjeri i osnovni pojmovi

Primjer 8. *Zadana su tri sustava od 2 linearne jednadžbe s 2 nepoznanice:*

$$(1)\ \left\{\begin{array}{rcrl} 2x & + & y & = 1 \\ -x & + & y & = 2 \end{array}\right., \quad (2)\ \left\{\begin{array}{rcrl} 2x & + & y & = 1 \\ 4x & + & 2y & = -5 \end{array}\right., \quad (3)\ \left\{\begin{array}{rcrl} 2x & + & y & = 1 \\ 4x & + & 2y & = 2 \end{array}\right..$$

Sustav (1) ima jedinstveno rješenje $(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$*, sustav (2) nema rješnja, a sustav (3) ima beskonačno rješenja,* $(t, -2t+1)$ *za sve* $t \in \mathbb{R}$*.*

Linearnu jednadžbu s dvije nepoznanice, $ax+by=c$, geometrijski interpretiramo kao pravac u ravnini. Stoga, geometrijska interpretacija sustava od 2 linearne jednadžbe s 2 nepoznanice jest presjek dvaju pravaca u ravnini. Stoga sustav (1) možemo interpretirati kao presjek pravaca $y=-2x+1$ i $y=x+2$. U slučaju sustava (2) lako se vidi da su pravci $y=-2x+1$ i $y=-2x-5/2$ paralelni, pa se stoga ne sijeku. Kod sustava (3) prva i druga jednadžba predstavljaju isti pravac $y=-2x+1$, odnosno kažemo da se pravci 'preklapaju'. Sva točke tog pravca su ujedno i rješenja sustava (3).

Primjer 9. *Zadan je sustav od 3 linearne jednadžbe s 3 nepoznanice:*

$$\begin{array}{rcrcrl} 2x & - & y & + & 3z & = 9 \\ 4x & + & 2y & + & z & = 9 \\ -6x & - & y & + & 2z & = 12 \end{array}.$$

Sustav možemo riješiti tako što, na primjer, iz prve jednadžbe izrazimo nepoznanicu y kao

$$y = 2x + 3z - 9,$$

i uvrstimo ju u drugu i treću jednadžbu,

$$\begin{array}{rcrcrl} 4x & + & 2(2x+3z-9) & + & z & = 9 \\ -6x & - & (2x+3z-9) & + & 2z & = 12 \end{array}.$$

Sređi vanjem dobivamo sustav od 2 linearne jednadžbe s 2 nepoznanice x i z:

$$\begin{array}{rcrl} 8x & + & 7z & = 27 \\ -8x & - & z & \ \ 3 \end{array}.$$

Primjenom metode suprotnih koeficijenata (ili jednostavno zbrajanjem ove dvije jednadžbe) dobivamo

$$6z = 30 \quad \Rightarrow \quad z = 5.$$

Dalje se dobiva $x=-1$ *i* $y=4$*. Dakle, početni sustav ima jedinstveno rješenje* $(-1, 4, 5)$*.*

Sutav od 3 linearne jednadžbe s 3 nepoznanice geometrijski možemo interpretirati kao presjek triju ravnina u prostoru.

Definicija 11. ***Linearni sustav*** *(ili sistem)* ***od*** m ***jednadžbi s*** n ***nepoznanica*** x_1, x_2, ... x_n *zapisujemo u obliku*

$$\begin{array}{ccccccccl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = b_m \end{array}, \tag{1}$$

gdje su $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ *i* $b_1, \ldots, b_m$ *zadani realni brojevi. Brojevi* $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ *nazivaju se* ***koeficijenti sustava****, a* $b_1, \ldots, b_m$ ***slobodni koeficijenti****. Linearni sustav je* ***kvadratni*** *ako je broj jednadžbi jednak broju nepoznanica, to jest* $m = n$.

Svaki linearni sustav kraće možemo zapisati u matričnom obliku

$$AX = B,$$

gdje je

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

matrica koeficijenata tipa $m \times n$, koja se još naziva **matrica sustava**, te

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Kasnije će nam trebati i tzv. **proširena matrica sustava**

$$A_p = \left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Matrica A_p je tipa $m \times (n+1)$, a crtice između koeficijenata a_{ij} i b_i su tu zbog razloga tehničke prirode koji će biti razjašnjen kasnije.

Definicija 12. ***Rješenje linearnog sustava*** *(1) je svaka uređena* n *torka* $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ *tako da uz supstituciju* $x_1 = \gamma_1$, $x_2 = \gamma_2$, $\ldots$, $x_n = \gamma_n$ *sustav (1) postaje niz od* m *numeričkih jednakosti (identiteta).*

Pitanja vezana uz rješivost linearnog sustava, broj rješenja, te zapisivanje samog rješenja obradit ćemo u sljedećim poglavljima. U tu svrhu trebat će nam specijalan sustav oblika

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = 0 \end{array}, \tag{2}$$

odnosno kraće $AX = 0$ (gdje 0 označava nulmatricu), naliza se **homogeni sustav**. Homogeni sustav je uvijek rješiv. Jasno je da je $(0, 0, \ldots, 0)$ rješenje sustava. To se rješnje naziva **trivijalno**.

2.2 Gaussova metoda eliminacije

Primjer 10. *Zadana su tri linearna sustava od 3 jednadžbe s 3 nepoznanice:*

$$(a)\ \left\{\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = 9 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = 9 \\ -6x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = 12 \end{array}\right. ,$$

$$(b)\ \left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = 8 \\ & & x_2 & - & x_3 & = -1 \\ & & & & x_3 & = 5 \end{array}\right. ,$$

$$(c)\ \left\{\begin{array}{cccc} x_1 & & & = -1 \\ & x_2 & & = 4 \\ & & x_3 & = 5 \end{array}\right. .$$

Već na prvi pogled nam je jasno da je u sustavu (c) trivijalno iščitati rješenje. Sustav (b) se isto može lako riješiti, dok bi nam za rješavanje sustava (a) trebalo najviše algebarskih operacija.

U prethodnom primjeru smo opazili da su sustavi 'trokutastog' ili 'dijagonalnog' oblika laki za rješanje. Kada bi proizvoljan sustav sveli na takve ili slične sustave rješenje bi se moglo lako 'iščitati'. Dakle, opisat ćemo metodu za rješavanje sustava koja početni sustav svodi na jednostavniji. Ono na što pri tome trebamo paziti jest da je skup rješenja početnog sustava jednak skupu rješenja krajnjeg sustava.

Definicija 13. *Kažemo da su dva linearna sustava* ***ekvivalentna*** *ako je svako rješenje jednog sustava ujedno i rješenje drugog i obrnuto.*

Gaussova metoda eliminacije je metoda rješavanja linearnih sustava koja se sastoji se od primjene takozvanih elementarnih transformacija. U **elementarne trasformacije** spadaju:

1. zamjena redoslijeda jednadžbi,

2. množenje jednadžbe skalarom različitim od nule,

3. pribrajanje jedne jednadžbe drugoj jednadžbi.

Teorem 2.1. *Primjenom konačno elementarnih transformacija linearni sustav prelazi u njemu ekvivalentan.*

Cilj Gaussove metode eliminacije jest sustav svesti na sustav iz kojeg odmah možemo iščitati rješenje. U slučaju kvadratnog sustava koji ima jedinstveno rješenje, moći ćemo ga svesti na dijagonalan sustav. U ostalim slučajevima to ne će biti moguće, ali će dobiveni sustav biti 'djelomično' dijagonalan. Metodu ćemo precizno ilustrirati kroz primjere. Zbog veće preglednosti i brzine rješavanja umjesto provođenja elementarnih transformacija nad jednadžbama provode se elementarne transformacije nad retcima proširene matrice sustava A_p. Konkretno vršimo sljedeće transformacije nad retcima proširene matrice:

1. zamjena mjesta dvaju redaka,
2. množenje retka skalarom različitim od nule,
3. pribrajanje jednog retka drugom retku.

U praksi najčešće obavljamo 2. i 3. transformaciju istovremeno pa kažemo da *pribrajamo jedan redak pomnožen skalarom nekom drugom retku.*

Primjer 11. *Gaussovom metodom eliminacije riješit ćemo sustav*

$$\begin{array}{ccccccl} x & + & y & + & 2z & = 2 & \\ x & - & y & - & 2z & = 0 & . \\ x & + & 2y & + & 2z & 1 & \end{array}$$

Proširena matrica ovog sustava glasi

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

U prvom koraku izabrat ćemo tzv. pivotni element iz matrice sustava (matrice koeficijenata) te vršiti one elementarne transformacije koje će poništiti sve elemente (osim pivotnog) iz stupca u kojem se nalazi pivotni element. Konkretno, neka je za pivotni element odabran element $a_{11} = 1$ onda biramo one transformacije koje će na mjestima elemenata a_{21} i a_{31} 'proizvesti' nule. To ćemo postići tako da prvi redak pomnožen s -1 pribrojimo drugom a zatim i trećem retku. Pišemo

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Za sljedeći pivotni element odabiremo element drugog ili trećeg retka (bez elemenata zadnjeg stupca) koji je različit od nule. Točnije biramo između elemenata $a_{22} = -2$, $a_{23} = -4$, $a_{32} = 1$. Zbog lakšeg računa obično odabiremo element koji je jednak 1 ili -1 ako je to moguće. Odaberimo za pivotni element $a_{32} = 1$. Da bismo dobili nule na *mjestima elemenata* a_{12} *i* a_{22}*, treći redak pomnožen s -1 pribrajamo prvom, a zatim treći redak pomnožen s 2 pribrajamo drugom. Pišemo*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Pomnožimo drugi redak s $-1/4$*,*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Sada biramo i posljednji pivotni element. Budući da smo u prva dva koraka birali pivotne elemente iz prvog i trećeg retka sada nam preostaje smo drugi redak, odnosno element $a_{23} = 1$*. Kako je* $a_{33} = 0$*, trebamo poništiti samo* $a_{13} = 2$ *pa stoga drugi redak pomnožen s -2 pribrojimo prvo. Dakle,*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Konačno zamjenom drugog i trećeg retka dobivamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Uočimo da je matrica novog sustava dijagonalna (jedinična). Sustav kojeg smo dobili glasi

$$\begin{array}{rcccl} x_1 & & & = & 1 \\ & x_2 & & = & -1 \\ & & x_3 & = & 1 \end{array}.$$

Stoga je sustav ima jedinstveno rješenje $(1, -1, 1)$.

U prethodnom odsječku vidjeli jednostavne primjere sustava koji imaju jedinstveno rješenje, beskonačno rješenja i nemaju rješenje. To vrijedi i općenito. Ako linearni sustav ima rješenja onda ili ima jedinstveno rješenje ili ih ima beskonačno mnogo. Postavlja se pisati kako ćemo opisati beskonačan skup rješenja nekog linearnog sustava. Srećom, taj je skup "dobro" strukturiran pa se sva njegova rješenja mogu opisati kao zbroj jednog *partikularnog rješenja* i *općeg rješenja pripadnog homogenog sustava.* Naime, opće rješenja homogenog sustava ima tzv. strukturu *vektorskog prostora* o kojem će biti posvećeno jedno od sljedećih poglavlja. Za sada ćemo rješenja naučiti opisivati kroz primjere.

Uočimo sljedeća jednostavna svojstva. Ako je X_p neko rješenje sustava $AX = B$ i X_h rješenje homogenog sustava onda je

$$A(X_p + X_h) = AX_p + AX_h = B + 0 = B,$$

dakle i $X_p + X_h$ je rješenje sustava.

S druge strane, ako su X_1 i X_2 rješenja sustava $AX = B$, onda je njihova razlika $X_1 - X_2$ rješenje pripadnog homogenog sustava. Zaista, $A(X_1 - X_2) = AX_1 - AX_2 = 0$.

Propozicija 2.2. *Neka su X_1 i X_2 rješenja linearnog sustava $AX = B$, te $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je $\alpha + \beta = 1$. Tada je je i $\alpha X_1 + \beta X_2$ rješenje istog sustava.*

Dokaz. Vrijedi

$$A(\alpha X_1 + \beta X_2) = \alpha A X_1 + \beta A X_2 = \alpha B + \beta B = (\alpha + \beta) B = B.$$

□

Kroz nekoliko primjera opisat ćemo kako zapisujemo rješenje.

Primjer 12. *Gaussovom metodom eliminacije riješimo sustav*

$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = 2 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = -3 \\ -4x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = -11 \end{array}.$$

Vrijedi

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -3 \\ -4 & 1 & 3 & -11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{3} & 5 & -1 \\ 0 & 9 & 15 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Više nemamo mogućnosti birati pivotni element, jer su svi koeficijenti u trećem retku jednaki nuli. Nakon dijeljenja drugog retka s 3 dobivamo

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

to jest

$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & + & & - & \frac{1}{3}x_3 & = \frac{8}{3} \\ & & x_2 & + & \frac{5}{3}x_3 & = -\frac{1}{3} \end{array}.$$

Vidimo da ćemo za svaki $x_3 = t \in \mathbb{R}$ dobiti jedno rješenje početnog sustava. Dakle, sva rješnja su

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & = & \frac{8}{3} & + & \frac{1}{3}t \\ x_2 & = & -\frac{1}{3} & - & \frac{5}{3}t, \\ x_3 & = & & & t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Matrično se rješnje zapisuje kao

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = X_p + X_h.$$

X_p je jedno partikularnu rješnje. Zaista,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -11 \end{pmatrix},$$

a X_h je rješenje odgovarajućeg homogenog sustava (za svaki $t \in \mathbb{R}$) jer

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot (t \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix}) = t \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

U sljedećem primjeru riješit ćemo jedan homogen sustav. Homogen sustav ili ima jedinstveno rješenje (trivijalno $(0, \ldots, 0)$) ili ih ima beskonačno.

Primjer 13. *Gaussovom metodom eliminacije riješimo sustav*

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = 0 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & - & 6x_4 & = 0 \\ 5x_1 & + & 3x_2 & & & - & 5x_4 & = 0 \\ x_1 & & & + & 12x_3 & + & 8x_4 & = 0 \end{array}.$$

Umjesto proširene matrice sustava dovoljno je vršiti transformacije nad matricom sustava, jer su svi slobodni koeficijenti jednaki 0 i ne će se promijeniti prilikom provođenja elementarnih transformacija nad retcima. Stoga je

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & -6 \\ 5 & 3 & 0 & -5 \\ \boxed{1} & 0 & 12 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & -20 & -15 \\ 0 & 2 & -40 & -30 \\ 0 & 3 & -60 & -45 \\ 1 & 0 & 12 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -20 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

Sustav ekvivalentan početnom glasi

$$\begin{array}{rcrcrcrl} & & x_2 & - & 20x_3 & - & 15x_4 & = 0 \\ x_1 & & & + & 12x_3 & + & 8x_4 & = 0 \end{array}.$$

Stoga je

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & -12x_3 - 8x_4 \\ x_2 & = & 20x_3 + 15x_4 \end{array}.$$

Dakle, za svaki izbor $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ dobivamo jedno rješenje sustava. Zato stavljamo $x_3 = s$, $x_4 = t$ i zapisujemo sva rješenja kao

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & -12s - 8t \\ x_2 & = & 20s + 15t \\ x_3 & = & s \\ x_4 & = & t, \quad s, t, \in \mathbb{R} \end{array}.$$

Često kažemo da ovaj sustav ima **dvoparametarsko** *rješenje. Matrični zapis rješenja je*

$$X = s\begin{pmatrix} -12 \\ 20 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -8 \\ 15 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t, \in \mathbb{R}.$$

Primjer 14. *Gaussovom metodom eliminacije riješimo sustav*

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} 3x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & + & 2x_5 & = 7 \\ x_1 & & & - & 4x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = 0 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & & & + & 2x_4 & + & 5x_5 & = 4 \\ 5x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & & & + & 6x_5 & = 11 \end{array}.$$

Vršimo elementarne transformacije nad proširenom matricom sustava:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & \boxed{1} & 0 & -1 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 2 & 5 & 4 \\ 5 & -1 & 4 & 0 & 6 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & 1 & 0 & -1 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & -4 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 9 & 18 \\ 8 & 0 & 4 & -1 & 8 & 18 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 4 & 1 & -4 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 9 & 18 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 9 & 18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 4 & 1 & -4 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 1 & -4 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Uočimo da smo pivotne elemente birali redom iz prvog, drugog i trećeg retka. Više nemamo mogućnosti za odabir pivotnog elementa iz četvrtog retka jer su svi elementi tog retka jednaki nuli. Ekvivalentan sustav početnom glasi:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} & x_2 & - & 4x_3 & & & - & x_5 = -1 \\ & & - & 4x_3 & + & x_4 & & = -2 \\ x_1 & & & & & & + & x_5 = 2 \end{array}.$$

Za svki izbor $x_3 = s$, $x_5 = t$ iz $\mathbb{R}$ dobivamo jedno rješenje sustava koje možemo zapisati kao

$$\begin{array}{rcl} x_2 & = & -1 + 4x_3 + x_5 = -1 + 4s + t \\ x_4 & = & -2 + 4x_3 = -2 + 4s \\ x_1 & = & 2 - x_5 = 2 - t \end{array},$$

odnosno

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 2 - t \\ x_2 & = & -1 + 4s + t \\ x_3 & = & s \\ x_4 & = & -2 + 4s \\ x_5 & = & t \end{array}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Matrični zapis rješenja glasi

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jedno partikularno rješenje je

$$X_p = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

i zaista

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 2 & 5 \\ 5 & -1 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Sva rješenja pripadnog homogenog sustava su

$$X_h = s \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Vrijedi

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 2 & 5 \\ 5 & -1 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 2 & 5 \\ 5 & -1 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Za kraj uočimo još da postoji veza između odabira pivotnih elemenata i odabira onih nepoznanica koje ćemo 'proglasiti' slobodnim parametrima. Pivotne elemente smo ***nismo*** *birali iz trećeg i petog stupca, a stavili smo $x_3 = s$ i $x_5 = t$. Ovo opažanje se može pokazati i općenito.*

Primjer 15. *Gaussovom metodom eliminacije riješimo sustav*

$$\begin{array}{rcrcrcrl} -2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & = 2 \\ 3x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & = -2 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = 2 \\ -4x_1 & & & + & 2x_3 & + & 5x_4 & = 5 \end{array}.$$

Vršimo elementarne transformacije nad proširenom matricom sustava:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & \boxed{1} & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & 5 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & \boxed{1} & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 5 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -11 & 0 & 1 & 3 & 8 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ 0 & -6 & 0 & 5 & 1 \end{array}\right).$$

Treći redak dobivene matrice je istaknut jer on predstavlja jednadžbu

$$0 \cdot x_1 \ + \ 0 \cdot x_2 \ + \ 0 \cdot x_3 \ + \ 0 \cdot x_4 \ = 2 \ .$$

Dakle, $0 = 2$*, što je očita neistina. Rješavanjem sustava dobili smo nešto proturječno, to jest kontradikciju, pa zaključujemo da dani sustav* ***nema rješenja****.*

Ovo smo mogli zaključiti već iz druge matrice, jer drugi i treći redak predstavljaju jednadžbe

$$\begin{array}{rcrcl} 3x_1 & + & x_2 & - \ x_4 & = -2 \\ 3x_1 & + & x_2 & - \ x_4 & = 0 \end{array},$$

što je isto nemoguće.

Primjer 16. *Pretpostavimo da trebamo riješiti dva sustava*

$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = 3 \\ & & 2x_2 & + & 5x_3 & = -10 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = -5 \end{array},$$

i

$$\begin{array}{rcrcrl} y_1 & + & 2y_2 & - & y_3 & = 0 \\ & & 2y_2 & + & 5y_3 & = 12 \\ -y_1 & - & y_2 & + & 2y_3 & = 3 \end{array}.$$

Ta dva sustava posebna su po tome što imaju istu matricu sustava

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

pa ih stoga možemo rješavati istovremeno transformirajući sljedeću matricu

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} \boxed{1} & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -10 & 12 \\ -1 & -1 & 2 & -5 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -10 & 12 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -3 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & -6 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right).$$

Rješenje prvog sustava nalazi se u prvom stupcu $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, -2)$ *a drugog u drugom,* $(y_1, y_2, y_3) = (0, 1, 2)$*.*

S obzirom na prethodni primjer Gaussovu metodu eliminacije možemo primijeniti na rješavanje matričnih jednadžbi oblika $AX = B$ gdje je A matrica tipa $n \times n$, B matrica tipa $n \times k$, a X nepoznata matrica (tipa $n \times k$) tako što elementarne transformacije primijenimo na matricu $(A \mid B)$.

Primjer 17. *Riješimo matričnu jednadžbu $AX = B$ gdje je*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -11 & 13 \end{pmatrix}.$$

Sređujemo matricu

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & 2 & -3 & 9 \\ -3 & 4 & -11 & 13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -3 & 9 \\ 0 & 10 & -20 & 40 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -3 & 9 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right).$$

Znači rješenje je

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

2.3 Inverz matrice

Motivacija

Za svaki realan broj a koji je različit od nule postoji broj b za koji je $a \cdot b = b \cdot a = 1$. Jasno, $b = \frac{1}{a}$ ili $b = a^{-1}$. Za broj b reći ćemo da je multiplikativan inverz. Ako je broj a racionalan (tj. razlomak), onda je njemu multiplikativan inverz njemu recipročan broj. U onom što slijedi želimo ispitati ovo svojstvo na skupu, odnosno algebri, kvadratnih matrica.

Definicija 14. *Neka je A matrica iz $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Ako postoji matrica $B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ za koju je*

$$A \cdot B = B \cdot A = I,$$

*onda kažemo da je matrica A **invertibilna** ili **regularna**, a matrica B se naziva njenim **inverzom** i označava s $B = A^{-1}$. Ukoliko takva matrica B ne postoji, onda za matricu A kažemo da je **neinvertibilna** ili **singularna**.*

Primjer 18. *Neka je $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Vrijedi da je $AB = BA = I$. Dakle, $B = A^{-1}$, odnosno A je regularna matrica.*

Prije nego li što naučimo određivati inverz dane matrice navedimo neka svosjstva inverznih matrica.

Teorem 2.3. *Ako postoji inverz matrice, onda je on jedinstven.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoje dva različita inverza B i C zadane matrice A, to jest vrijedi

$$AB = BA = I, \quad AC = CA = I.$$

Tada je

$$C = C \cdot I = C(AB) = \{\text{asocijativnost množenja}\} = (CA)B = I \cdot B = B.$$

$\square$

Teorem 2.4. *Neka su A i B regularne kvadratne matrice i $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Vrijedi*

1. $(A^{-1})^{-1} = A$,
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,
3. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$,
4. $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

Dokaz.

1. $(A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^{-1} \cdot I = (A^{-1})^{-1}(A^{-1} \cdot A) = ((A^{-1})^{-1} \cdot A^{-1})A = I \cdot A = A$.
2. $B^{-1}A^{-1} = B^{-1}A^{-1}((AB) \cdot (AB)^{-1}) = B^{-1}(A^{-1}A)B(AB)^{-1} = (B^{-1}B)(AB)^{-1} = (AB)^{-1}$
3. $A^t(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = I$ i $(A^{-1})^tA^t = (AA^{-1})^t = I$.
   Zbog jedinstvenosti inverza slijedi $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
4. $(\lambda A)(\frac{1}{\lambda}A^{-1}) = \lambda\frac{1}{\lambda}(AA^{-1}))$ i $(\frac{1}{\lambda}A^{-1})(\lambda A) = I$.
   Zbog jedinstvenosti inverza slijedi tvrdnja.

$\square$

Sada ćemo opisati postupak pomoću kojeg ćemo naći inverz matrice. Jasno je da inverz od A zadovoljava matričnu jednadžbu

$$AX = I.$$

Ukoliko želimo odrediti inverz trebamo riješiti tu matričnu jednadžbu. U prethodnom odsječku naučili smo rješavati takve probleme Gaussovom metodom eliminacije

$$\left(\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{c|c} I & B \end{array}\right).$$

Pokazuje se da smo na taj način odredili $A^{-1} = B$.

Primjer 19. *Odredimo inverz matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dakle, rješavamo matričnu jednadžbu $AX =$ kao u Primjeru 17.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & \boxed{-1} & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Tra zeni inverz je matrica

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Primjer 20. *Odredimo inverz matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Rj.

$$\begin{aligned} \left(A \mid I \right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \backsim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ &\backsim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \backsim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \\ &\backsim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right) = \left(I \mid A^{-1} \right) \end{aligned}$$

Primjer 21. *Odredimo inverz matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Rj.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Vidimo da nije moguće dobiti jediničnu matricu s lijeve strane. Odnosno ako problem pručimo pomoću matrične jednadžbe, nakon ove transformacije dobili smo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

a to očito ne može vrijediti (- iz drugog retka imamo $0 = 1$). Stoga zaključujemo da matrica A nema inverza, odnosno to je jedna singularna matrica.

U sljedećem poglavlju obradit ćemo determinante pomoću kojih ćemo karaterizirati regularnost matrice, te naučiti još jednu tehniku određivanja inverza.

3 Determinante

Savakoj kvadratnoj matrici se na jedinstven način može pridružiti skalar koji se naziva *determinanta.* Još donedavno izučavanje determinanti u sklopu linearne algebre predstavljalo je jednu od središnjih tema koja je uključivala glomaznu teoriju. To ne treba čuditi jer determinante imaju široku primjenu u matematici. (Mi ćemo ih koristiti za računanje inverza matrice, rješavanje linearnih sustava, ispitivanje linerne (ne)zavisnosti skupova vektora ...) Sama matematička definicija determinte je komplicirana (- uključuje razumijevanje pojma permutacije skupa) kao i razvoj same teorije vezane uz determinatu. No, jednom kad se teorija razvije, same tehnike računanje su jednostavne, a svojstva lako razumljiva. Stoga ćemo se u ovom poglavlju posvetiti klasičnim metodama za računanje determinanti, te pokazati neke njihove primjene. Započinjemo s determinatama reda 2 i 3 koje imaju najširu primjenu (na primjer u kalsičnoj algebri vektora, analitičkoj geometriji ravnine i prostora,...).

3.1 Determinante reda 2 i 3

Definicija 15. ***Determinanta reda*** *2 je preslikavanje det* : $\mathbf{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *koje svakoj matrici* $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ *pridružuje vrijednost* $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$. *Pišemo da je*

$$det\ A = det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}.$$

Kažemo još da determinantu reda 2 dobivamo tako što od umnoška elemenata na glavnoj dijagonali oduzmemo umnožak elemenata na sporednoj dijagonali.

Definicija 16. ***Determinanta reda*** *3 je preslikavanje det* : $\mathbf{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *koje matrici*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

pridružuje vrijednost

$$\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{21}\alpha_{32}\alpha_{13} - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} - \alpha_{21}\alpha_{12}\alpha_{33} - \alpha_{32}\alpha_{23}\alpha_{11}.$$

Pišemo

$$detA = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}.$$

Vrijednost determinante reda 3 lako se prati pomuću tzv. *Sarrusovog pravila* ili *sheme* koje se sastoji u tome da detrminanti reda 3 nadopišemo prva dva stupca, te zatim od zbroja umnožaka na 'glavnim' dijagonalama oduzmemo zbroj umnožaka na 'sporednim' dijagonalama.

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{matrix} =$$

$$= \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{21}\alpha_{32}\alpha_{13} - (\alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} + \alpha_{21}\alpha_{12}\alpha_{33} + \alpha_{32}\alpha_{23}\alpha_{11}).$$

Determinantu reda 3 možemo računati i pomoću *Laplaceovog razvoja.* Pokažimo Laplaceov razvoj determinante reda 3 po prvom retku:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{12} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{13} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix}$$

$$= \alpha_{11}(\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{32}) - \alpha_{12}(\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{31}) + \alpha_{13}(\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{31}\alpha_{22})$$

Općenito, Laplaceov razvoj možemo provoditi po bilo kojem retku ili stupcu determinante. Formula za *Laplaceov razvoj po i-tom retku* glasu

$$detA = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{i+j} \alpha_{ij} \Delta_{ij},$$

gdje je Δ_{ij} determinanta matrice reda 2 koju smo dobili tako što smo iz matrice A izbacili i-ti redak i j-ti stupac. Na isti način, formula za *Laplaceov razvoj po j-tom stupcu* glasu

$$detA = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+j} \alpha_{ij} \Delta_{ij}.$$

Ponekad se sam Laplaceov ravoj koristi i kao induktivna definicija determinante. Zaista, ako definiramo determinantu reda 1 kao

$$det(\alpha_{11}) = |\alpha_{11}| = \alpha_{11},$$

onda determinantu reda 2 možemo definirati pomoću Laplaceovog razvoja po npr. prvom retku

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \alpha_{11} |\alpha_{22}| + (-1)^{1+2} \alpha_{12} |\alpha_{21}|.$$

Vidimo da smo determinantu reda 2 prikazali kao linearnu kombinaciju determinanti reda 1. Analogno smo već pokazali da se determinanta reda 3 može prikazati kao linearna kombinacija determinanti reda 2. Ovu činjenicu ćemo iskoristiti za računanje determinanti višeg reda.

3.2 Determinante višeg reda

Kako smo u prethodnom odsječku naučili računati determinante reda 1, 2 i 3, sada ćemo pretpostaviti da je n prirodan broj veći od 3. **Determinantu reda** n računamo kao

$$D_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \alpha_{ij} \Delta_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \alpha_{ij} \Delta_{ij},$$

gdje je Δ_{ij} determinanta reda $n-1$ koju smo dobili tako što smo determinanti D_n izbacili i-redak i j-ti stupac. Na ovaj način problem računanja determinante višeg reda svodimo, u jednoj ili više iteracija, na računanje determinanti reda 2 ili 3 koje znamo odrediti.

Primjer 22. *Izračunajmo danu determinantu Laplaceovim razvojem po 4-tom stupcu:*

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^{2+4} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 4(0+1+0-(9-2+0)) - 3(-4+0+9-(0+24+1)) = 54$$

Izračunajte ovu determninatu Laplaceovim razvojem po nekom drugom retku ili stupcu. Što uočavate?

Uočimo da se predznaci, $(-1)^{i+j}$, u Laplaceovom razvoju ne trebaju svaki put računati jer oni alterniraju kao što je prikazano u 'matricama predznaka' za razvoj determinante reda 3, 4, ... :

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}, \ldots$$

U sljedećoj napomeni iznijet ćemo pravu matematičku definiciju determinante koja je složena jer u sebi sadrži više matematičkih pojmova pojmova o kojima do sada nije bilo riječi.

Napomena 3.1. *Determinante matrice $A = (\alpha_{ij})$ reda n definira se kao*

$$det\, A = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{sgn(\sigma)} \alpha_{1,\sigma(1)} \alpha_{2,\sigma(2)} \cdots \alpha_{n,\sigma(n)},$$

gdje je σ permutacija (bijekcija) skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, S_n skup svih permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, a $sgn(\sigma)$ broj inverzija permutacije σ.

3.3 Svojstva determinante

Propozicija 3.2. *Determinanta gornjetrokutaste (ili donjetrokutaste) matrice jednaka je produktu elemenata na glavnoj dijagonali.*

Dokaz. Laplaceovim razvojem determinante gornjetrokutaste matrice uvijek po prvom stupcu, dobit ćemo tvrdnju propozicije. □

Korolar 3.3. *Determinanta dijagonalne matrice jednaka je produktu elemenata na glavnoj dijagonali. Determinanta jedinične matrice jednaka je 1.*

Propozicija 3.4. *Determinanta koja ima nulredak ili nulstupac jednaka je 0.*

Propozicija 3.5. *Vrijedi da je $det\, A^t = det\, A$.*

Determinantna i elementarne transformacije

Elementarne transformacije nad retcima sustava linernih jednadžbi, odnosno nad recima pridružene matrice sustava, vršili smo u metodi Gaussovih eliminacija. U onom što slijedi vidjet ćemo kako elementarne transformacije nad retcima i stupcima utječu na vrijednost determinante.

Propozicija 3.6. *Ako je matrica B dobivena iz matrice A zamijenom u poretku dvaju redaka (ili stupaca), onda*

$$det\, B = -det\, A.$$

Korolar 3.7. *Determinanta koja ima dva ista retka (ili stupca) ima vrijednost jednaku nuli.*

Propozicija 3.8. *Ako je matrica B dobivena iz matrice A množenjem jednog retka (ili stupca) sa skalarom $\lambda \neq 0$, onda*

$$det\, B = \lambda \cdot det\, A.$$

Korolar 3.9. *Vrijedi*

$$det\,(\lambda A) = \lambda^n \cdot det\, A.$$

Propozicija 3.10. *Ako je matrica B dobivena iz matrice A dodavanjem jednog retka (ili stupca) pomnoženog sa skalarom λ, onda*

$$det\, B = det\, A.$$

Propozicije 3.6, 3.8 i 3.10 koriste se na način da determinantu svedemo na gornjetrokutastu (ili donjetrokutastu).

Primjer 23. *Izračunajmo danu determinantu svođenjem na gornjetrokutastu:*

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \{zamj.\ 1.\ i\ 4.\ retka\} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \ldots$$

4 Vektorski prostor $\mathbb{R}^n$

4.1 Definicija vektorskog prostora

Neka je n prirodan broj. Skup svih uređenih n-torki realnih brojeva označavat ćemo s $\mathbb{R}^n$. Dakle,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \ : \ x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Elemente od $\mathbb{R}^n$ kratko ćemo označiti s u, v, w,... Ako je $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, onda brojeve x_1, x_2, ..., x_n nazivamo *koordinatama* ili *komponentama* od v.

Skup $\mathbb{R}^n$ možemo shvatiti i kao Kartezijev produkt od n skupove R, to jest

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n-\text{puta}}.$$

Na skupu $\mathbb{R}^n$ prirodno uvodimo dvije operacije - zbrajanje i množenje skalarom (odnosno realnim brojem). Neka su $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $w = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. *Zbroj* $v + w$ definiramo kao

$$v + w = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

te kažemo da zbrajanje elemenata v i w vršimo po koordinatama. Slično, za $v \in \mathbb{R}^n$ definiramo *umnožak skalarom* α iz $\mathbb{R}$ kao

$$\alpha \cdot v = \alpha \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n).$$

Umjesto $\alpha \cdot v$ često pišemo samo αv.

Operacija zbrajanja i množenja skalarom zadovoljavaju mnoga svojstva. Navest ćemo ih u sljedećem teoremu.

Teorem 4.1. *Za operaciju zbrajanja te operaciju množenja skalarom na skupu $\mathbb{R}^n$ vrijede sljedeća svojstva:*

(A1) *Zbroj svaka dva elementa iz $\mathbb{R}^n$ je uvijek element iz $\mathbb{R}^n$, odnosno*

$$\text{za sve } v, w \in \mathbb{R}^n \quad \Rightarrow \quad v + w \in \mathbb{R}^n.$$

Ovo svojstvo naziva se ***zatvorenost na zbrajanje****.*

(A2) *Zbrajanje u $\mathbb{R}^n$ je* ***asocijativno****, to jest za sve $u, v, w, \in \mathbb{R}^n$ vrijedi da je*

$$(u + v) + w = u + (v + w).$$

(A3) *U $\mathbb{R}^n$ postoji* ***neutralni element*** *zbrajanja, $n = (0, \dots, 0)$ za koji vrijedi da je*

$$v + n = n + v = v,$$

za sve $v \in \mathbb{R}^n$.

(A4) *U* $\mathbb{R}^n$ *svaki element ima svoj* ***inverz****, odnosno za svaki* $v \in \mathbb{R}^n$ *postoji* $v' \in \mathbb{R}^n$ *za koji je*

$$v + v' = v' + v = n.$$

Ako je $v = (x_1, \ldots, x_n)$ *onda je* $v' = (-x_1, \ldots, -x_n)$*.*

(A5) *Zbrajanje u* $\mathbb{R}^n$ *je* ***komutativno****, to jest za sve* $v, w \in \mathbb{R}^n$ *vrijedi da je*

$$v + w = w + v.$$

(S1) *Umnožak skalara i elementa iz* $\mathbb{R}^n$ *je uvijek element iz* $\mathbb{R}^n$*, odnosno*

$$\text{za sve } v \in \mathbb{R}^n \text{ i } \alpha \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \alpha v \in \mathbb{R}^n.$$

Ovo svojstvo naziva se ***zatvorenost na množenje skalarom*** *.*

(S2) *Vrijedi* ***kvaziasocijatvnost*** *množenja skalarom, to jest*

$$\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v,$$

za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *i za sve* $v \in \mathbb{R}^n$*.*

(S3) *Za sve* $v \in \mathbb{R}^n$ *vrijedi da je* $1 \cdot v = v$*.*

(S4) *Vrijedi* ***distributivnost*** *u odnosu na zbrajanje u* $\mathbb{R}^n$*, odnosno*

$$\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w,$$

za sve $\alpha \in \mathbb{R}$ *i sve* $v, w \in \mathbb{R}^n$*.*

(S5) *Vrijedi* ***distributivnost*** *u odnosu na zbrajanje skalara u* $\mathbb{R}$*, odnosno*

$$(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v,$$

za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *i sve* $v \in \mathbb{R}^n$*.*

Dokaz. Sva svojstva direktnto proizlaze iz svojstava zbrajanja i množenja realnih brojeva jer je zbrajanje i množenje definirano po komponentama (to jest koordinatno). □

Definicija 17. *Svaki skup* V *na kojem je definirana operacija zbrajanja sa svojstvima (A1) do (A5), te operacija množenja skalarima iz* $\mathbb{R}$ *sa svojstvima (S1) do (S5) naziva se* ***realni vektorski prostor*** *(ili vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{R}$*). Elemente vektorskog prostora nazivamo* ***vektorima****.*

Skup na kojem je definirana samo jedna operacija koja za koju vrijede svojstva (A1) do (A5) naziva se ***Abelova grupa*** *ili* ***komutativna grupa****.*

Na temelju prethodne definicije možemo zaključiti da je skup $\mathbb{R}^n$ jedan *realni vektorski prostor* u odnosu na operaciju zbrajanja i množenja skalarom. Nadalje, $\mathbb{R}^n$ je i Abelova grupa u odnosu na zbrajanje.

Konkretno ćemo najviše raditi s vektorskim prostorima $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ koje geometrijski možemo interpretirati kako ravninu i prostor.

4.2 Vektorski potprostori

Primjer 24. *Zadan je skup S svih vektora iz $\mathbb{R}^3$ kojima je zadnja koordinata jednaka 0, odnosno*

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_3 = 0\} = \{(x_1, x_2, 0) \ : \ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Skup S realan vektorski prostor jer zadovoljava svih 10 svojstava iz Teorema 4.1. Skup

$$T = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_3 = 1\} = \{(x_1, x_2, 1) \ : \ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

nije vektorski prostor jer ne vrijedi svojstvo zatvorenosti na zbrajanje vektora (A1). Zaista, $(1, 2, 1) + (1, 1, 1) = (2, 3, 2) \notin T$. Napomenimo da ukoliko želimo pokazati da neko svojstvo ne vrijedi to možemo ustanoviti na nekom konkretnom slučaju.

Definicija 18. *Podsdkup S vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ koji je i sam vektorski prostor u odnosu na iste operacije naziva se* ***vektorski potprostor*** *od $\mathbb{R}^n$.*

Teorem 4.2. *Podsdkup S vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ je vektorski potprostor od $\mathbb{R}^n$ ako i samo ako su u S zadovoljena svojstva (A1) i (S1), odnosno ako i samo ako je*

$$\alpha x + \beta y \in S,$$

za sve x, y iz S i sve α, β iz $\mathbb{R}$.

4.3 Linearne kombinacije vektora

Definicija 19. *Vektor $w \in \mathbb{R}^n$ je* ***linearna kombinacija vektora*** *v_1, v_2, ..., v_k iz $\mathbb{R}^n$ ako postoje skalari λ_1, λ_2, ..., λ_k iz $\mathbb{R}$ takvi da je*

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k.$$

Definicija 20. *Neka je $S = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ podskup u $\mathbb{R}^n$. Skup svih linearnih kombinacija vektora skupa S naziva se* ***linearna ljuska skupa*** *S. Označava se sa $[S]$ ili sa $span(S)$.*

Teorem 4.3. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Tada je linearna ljuska $[S]$ vektorski potprostor od $\mathbb{R}^n$.*

Dokaz. Neka su v i w vektori iz linearne ljuske $[S]$, te α, β skalari (realni brojevi). Prema definiciji je v i w su linearne kombinacije vektora iz skupa S, pa je jasno da je i vektor $\alpha v + \beta w$ isto linearna kombinacija vektora iz skupa S. Stoga je prema Teoremu 4.2 skup $[S]$ jedan vektorski potprostor. $\square$

Primjer 25. *Prikažite vektor $v = (1, 5, -3)$ kao linearnu kombinaciju vektora*

(a) $a = (1, 2, -1)$, $b = (1, 0, 1)$, $c = (0, 1, 0)$,

(b) $a = (1, 2, -1)$, $b = (1, 0, 1)$, $d = (1, 1, 0)$,

(c) $a = (1, 2, -1)$, $e = (-1, 1, -1)$, $f = (0, 3, -2)$

(a) *Tražimo skalare $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ za koje je*

$$v = \alpha a + \beta b + \gamma c.$$

Odnosno,

$$(x_1, x_2, x_3) = \alpha(1,2,-1) + \beta(1,0,1) + \gamma(0,1,0).$$

Otududa dobivamo sljedeći sustav u nepoznanicama α, β, γ:

$$\begin{array}{rcrcrl} \alpha & + & \beta & & & = 1 \\ 2\alpha & & & + & \gamma & = 5 \\ -\alpha & + & \beta & & & = -3 \end{array}.$$

Proširena matrica ovog sustava glasi

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc|c} a & b & c & v \end{array} \end{array}$$

Opazimo da se vektori a, b i c nalaze u stupcima matrice sustava, a stupac slobodnih koeficijenata je upravo v. Rješavanjem ovog sustava dobiva se da je $\alpha = 2$, $\beta = -1$ i $\gamma = 1$, odnosno da je

$$v = 2a - b + c.$$

Uočimo još, da je sustav koji smo rješavali imao jedinstveno rješenje, te stoga kažemo da se v prikazuje kao ***jedinstvena*** *linearna kombinacija vektora a, b i c.*

(b) *Postavivši problem kao u prethodnom slučaju rješavamo sljedeći sustav:*

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & \boxed{1} & 5 \\ -1 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right).$$

Ovaj sustav očito nema rješenja, stoga zaključujemo da se vektor v ***ne može*** *prikazati kao kao linearna kombinacija vektora a, b i d.*

(c) *Rješavamo sljedeći sustav:*

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ovaj sustav očito ima beskonačno rješenja i sva rješnja su

$$\alpha = 1 + t \ \beta = t, \ \gamma = -1 + t, \ t \in \mathbb{R}.$$

Stoga vektor v možemo prikazati za svaku vrijednost parametra t kao

$$v = (1+t)a + te + (-1+t)f.$$

Konkretno za $t = 0$ imamo $v = a - f$, za $t = 1$ imamo $v = 2a + e$, ... U ovom slučaju zaključujemo da smo vektor v mogli prikazati kao linearnu kombinaciju vektora a, e i f na ***beskonačno*** *puno načina, odnosno nejedinstveno.*

4.4 Linearna nezavisnost

Definicija 21. *Skup vektora* $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ *je* ***linearno zavisan*** *ako je postoje skalari* α_1, α_2, ..., α_k *iz* $\mathbb{R}$ *koji nisu svi jednaki nuli i takvi da je*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k = 0. \tag{3}$$

U suprotnom kažemo da je skup vektora $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ ***linearno nezavisan***

Često umjesto da kažemo da je skup vektora linearno (ne)zavisan, kraće samo kažemo da su vektori v_1, v_2, ..., v_k linearno (ne)zavisni. Nadalje, linerarnu nezavisnost vektora v_1, v_2, ..., v_k kokretno provjeravamo tako što ustanovimo da jednadžba (3) ima samo trivijalno rješenje $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_k = 0$.

Linearnu nezavisnost od točno dva vektora uvijek možemo lako ustanoviti. Naime, ako su $v = (x_1, \ldots, x_n)$ i $w = (y_1, \ldots, y_n)$ linearno zavisni vektori iz $\mathbb{R}^n$ onda postoje skalari α i β koji nisu oba jednaki nuli i takvi da je

$$\alpha v + \beta w = 0,$$

odnosno

$$(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) = (-\beta y_1, \ldots, -\beta y_n).$$

Ako je na primjer $\alpha \neq 0$ (jer ne mogu biti oba jednaka nuli) onda je

$$x_1 = -\frac{\beta}{\alpha} y_1, \ldots,\ x_n = -\frac{\beta}{\alpha} y_n,$$

odnosno za sve koordinate vektora v i w vrijedi da je $x_i = k y_i$. Dakle, ako su vektori v i w linearno zavisni onda su im koordinate proporcionalne. Jasno, je da vrijedi i obrat. Ako je $x_i = k y_i$ za sve $i = 1, \ldots, n$ onda je

$$v - kw = 0,$$

što upravo kazuje da su vektori v i w linearno zavisni.

Lako se pokazuju i tvrdnje u sljedećoj propoziciji:

Propozicija 4.4. *Vrijedi:*

1. *Svaki skup koji sadrži nulvektor je linearno zavisan.*
2. *Svaki podskup linearno nezavisnog skupa je linearno nezavisan.*
3. *Svaki nadskup linearno zavisnog skupa je linearno zavisan.*

Primjer 26. *Skupovi* $\{(1, 2, 3), (1, 1, 0), (0, 0, 0)\}$ *i* $\{(1, 2, 3), (2, 4, 6), (1, 0, 1)\}$ *su linearno zavisni.*

4.5 Baza i dimenzija

Sve definicije i tvrdnje iz prethodnih poglavlja mogle su se formulirati i općenito za neki apstraktan vektorski prostor V. Pojam baze i dimenzije vektorkog prostora definirat ćemo za jedan takav opći vektorski prostor V.

Definicija 22. *Neka je V vektorski prostor i B podskup od V. Ako je B linearno nezavisan skup i $V = [B]$, onda kažemo da je skup B* ***baza*** *vektorskog prostora V.*

Ako je $V = [B]$, kao u Definiciji 22, onda kažemo da je prostor V *generiran* ili *razapet* skupom B. Još se može reći da je B *skup izvodnica* ili *skup generatora* za V. Konkretno taj uvjet provjeramo tako da ustanovimo da je svaki vektor iz V linearna kombinacija vektora iz skupa B. Nadalje, kod nas će skup generatora B biti konačan skup, na primjer $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Za vektorske prostore kojima je skup generatora konačan kažemo da su *konačnogenerirani.*

Važna je činjenica da svaki vektorski prostor ima bazu i da su svake dvije baze ekvipotentne (jednakobrojne). Te činjenice nisu nimalo jednostavne za pokazati, ali su nam važne zbog sljedeće definicije.

Definicija 23. ***Dimenzija*** *vektorskog prostora V je broj elemenata baze B. Pišemo, $\dim V = \operatorname{card} B$.*

Primjer 27. *Skup $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ gdje je $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ i $e_3 = (0, 0, 1)$ je baza za $\mathbb{R}^3$. Lako možemo ustanoviti da je B linearno nezavisan skup. Nadalje, za vektor $v = (x_1, x_2, x_3)$ iz $\mathbb{R}^3$ vrijedi*

$$v = x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1) = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3,$$

što znači da B razapinje prostor $\mathbb{R}^3$. Nadalje, pokazali smo da je $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Ova se baza naziva ***kanonska*** *ili* ***standardna*** *baza. Osim te baze u $\mathbb{R}^3$ postoji beskonačno mnogo drugih baza.*

Općenito, skup $\{e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)\}$ je kanonska baza za $\mathbb{R}^n$ i $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Primjer 28. *Zadan je potprostor u $\mathbb{R}^3$:*

$$L = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x_1 + x_2 = 0\}.$$

Treba mu odrediti bazu i dimenziju. Ustanovimo da je vektor $v = (x_1, x_2, x_3)$ iz L ako i samo ako je $x_2 = -x_1$. Dakle,

$$v = (x_1, -x_1, x_3) = x_1(1, -1, 0) + x_3(0, 0, 1).$$

Vidimo da smo proizvoljan vektor iz L prikazali kao linearnu kombinaciju vektora $(1, -1, 0)$ i $(0, 0, 1)$. Dakle, skup $\{(1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$ razapinje potprostor L. Lako je za vidjeti da je taj skup i linearno nezavisan (jer koordinate ova dva vektorra nisu proporcionalne). Stoga je $\{(1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$ jedna baza za L i $\dim L = 2$.

Propozicija 4.5. *Neka je V n-dimenzionalni vektorski prostor. Vrijedi:*

1. *Ako su vektori v_1, v_2, ..., v_n linearno nezavisni, onda oni čine bazu za V.*
2. *Ako vektori v_1, v_2, ..., v_n razapinju V, onda oni čine bazu za V.*

Primjer 29. *Provjerite da je skup $S = \{(2,0,-1),(0,3,2),(4,1,-1)\}$ baza prostora $\mathbb{R}^3$. Kako je skup S tročlan, a prostor $\mathbb{R}^3$ ima dimenziju 3, dovoljno je prema Propoziciji 4.5 provjeriti da je skup S linearno nezavisan. Stoga rješavamo jednadžbu*

$$\alpha(2,0,-1) + \beta(0,3,2) + \gamma(4,1,-1) = (0,0,0),$$

u nepoznanicama α, β i γ. Prehodnu jednadžbu zapisujemo kao homogen linearan sustav čija je matrica

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Determinanta ove matrice jednaka je 2, to jest različita je od nul, pa je stoga je rješenje sustava, odnosno jednadžbe jedinstveno $\alpha = \beta = \gamma = 0$, odnosno vektori su linearno nezavisni.

4.6 Primjeri još nekih vektorskih prostora

4.6.1 Matrice

Na skup realnih matrica tipa $m \times n$, $\mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ uveli smo operacije zbrajanja i množenja skalarom. Kako su te operacije definirane po elementima, a elementi su realni brojevi, lako se može ustanoviti da su zadovoljena svojstva Teorema 4.1. Znači, skup $\mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ predstavlja jedan realni vektorski prostor.

Sada postavljamo pitanje dimenzije prostora $\mathbf{M}_{mn}(\mathbb{R})$. Za $i \in \{1,\ldots,m\}$ i $j \in \{1,\ldots,n\}$ definiramo matrice E_{ij} čiji je element na mjestu (i,j) (- na presjeku i-tog retka i j-tog stupca) jednak 1, a na svim ostalim mjestima elementi su jednaki 0. Jasno je da za matricu $A = (\alpha_{ij}) \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ vrijedi

$$A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} E_{ij},$$

pa skup $\{E_{ij} : 1 \leq i \leq m,\, 1 \leq j \leq n\}$ predstavlja skup izvodnica za $\mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, odnosno generira ga. Lako se može ustanoviti da je taj skup i linearno nezavisan. Stoga on predstavlja i jednu bazu za $\mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, i to je tzv. kanonska ili standarna baza. Broj elemenata baze je $m \cdot n$, te smo upravo pokazali da je

$$dim\, \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{R}) = m \cdot n.$$

Primjer 30. *Skup svih simetričnih matrica reda n, $\mathcal{S}$ je vektorski potprostor od $\boldsymbol{M}_n(\mathbb{R})$. Skup svih antisimetričnih matrica reda n, $\mathcal{A}$ je isto vektorski potprostor od $\boldsymbol{M}_n(\mathbb{R})$. Zaista, ako su $A, B \in \mathcal{S}$, te $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$(\alpha A + \beta B)^t = \alpha A^t + \beta B^t = \alpha A + \beta B.$$

Dakle, $\alpha A + \beta B \in \mathcal{S}$, *pa prema Teoremu 4.2 vrijedi* $\mathcal{S} < \boldsymbol{M}_n(\mathbb{R})$. *Na isti, način za* $C, D \in \mathcal{A}$ *se lako provjeri da je* $\alpha C + \beta D$ *antisimetrična matrica;*

$$(\alpha C + \beta D)^t = \alpha C^t + \beta D^t = \alpha(-C) + \beta(-D) = -(\alpha C + \beta D).$$

Sada možemo postaviti pitanje dimenzije ovih potrostora. Neka je $A \in \mathcal{S}$. *Pokazali da općento vrijedi*

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} E_{ij},$$

no kako je za simetričnu matricu imamo da je $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, *to je*

$$A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} E_{ii} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij}(E_{ij} + E_{ji}),$$

Ustanovimo da su sve matrice E_{ii}, $i = 1, \ldots, n$, *te* $E_{ij} + E_{ji}$, $1 \leq i < j \leq n$, *linearno nezavisne i razapinju potprostor* $\mathcal{S}$. *Stoga one predstavljaju bazu za* $\mathcal{S}$. *da bismo odredili dimenziju trebamo ih samo prebrojati;*

$$n + (n - 1 + n - 2 + \cdots 1) = n + \frac{1}{2}(n-1)n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Baza za potprostor antisimetričnih matrica $\mathcal{A}$ *se dobije na ličan način. Samo je potrebno podsjetiti se da za elemente antisimetrične matrice* B *vrijedi* $\beta_{ii} = 0$, *te* $\beta_{ij} = -\beta_{ji}$. *Stoga vrijedi*

$$B = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij}(E_{ij} - E_{ji}),$$

odnosno matrice $E_{ij} - E_{ji}$, $1 \leq i < j \leq n$, *čine bazu za* $\mathcal{A}$. *Dimenzija od* $\mathcal{A}$ *je očito jednaka*

$$n - 1 + n - 2 + \cdots 1 = \frac{1}{2}(n-1)n.$$

4.6.2 Polinomi

Polinom jedne varijable je realna funkcija realnog argumenta koju zapisujemo u obliku

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

gdje je $n \in \mathbb{N}_0$ i gdje su koeficijenti $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ realni brojevi. Ako je *vodeći* koeficijent a_n različit od 0, onda kažemo da je p polinom stupnja n. Na skupu svih (realnih) polinoma $\mathcal{P}$ imamo operacije zbrajanja i množenja skalarom. Polinome zbrajamo tako da im zbrojimo koeficijente uz iste potencije, a množimo skalarom tako da pomnožimo koeficijente skalarom. Lako se može ustanoviti da je i skup $\mathcal{P}$ jedan realni vektorski prostor. Za razliku od svi dosadašnjih primjera, ovaj vektorski prostor je beskonačno dimenzionalan. Zaista, kanonska baza za $\mathcal{P}$ sastoji se od polinoma x^k, za sve nenegativne cijele brojeve k ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Umjesto cijelog skupa $\mathcal{P}$ često promatramo njegov podskup

$$\mathcal{P}_n = \{p \in \mathcal{P} \,:\, \text{stupanj od } p \text{ je manji ili jednak } n\}.$$

Baza za $\mathcal{P}_n$ je
$$\{1, x, x^2, \dots, x^n\},$$
što znači da je $dim\, \mathcal{P}_n = n + 1$.

Primjer 31. *Neka je $\mathcal{Q}$ skup svih polinoma stupnja manjeg ili jednakog 2 koji imaju nultočku u 1. To možemo zaisati kao*

$$\mathcal{Q} = \{p \in \mathcal{P}_2 \,:\, p(1) = 0\}.$$

Prvo ćemo ustanoviti da je $\mathcal{Q}$ vektorski potprostor od $\mathcal{P}_2$. Ako su $p, q \in \mathcal{Q}$, onda je i $p + q \in \mathcal{Q}$ jer je to polinom stupnja najviše 2 i $(p + q)(1) = p(1) + q(1) = 0$. Na isti način, vidimo da je i $\alpha p \in \mathcal{Q}$ za proizvoljan skalar $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sada potprostoru $\mathcal{Q}$ odredimo jednu bazu. Za $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ iz $\mathcal{Q}$ vrijedi da je
$$p(1) = a_2 + a_1 + a_0 = 0.$$
Otuda je $a_0 = -a_2 - a_1$ pa je
$$p(x) = a_2x^2 + a_1x - a_2 - a_1 = a_2(x^2 - 1) + a_1(x - 1).$$
Polinomi $x^2 - 1$ i $x - 1$ razapinju prostor $\mathcal{Q}$ i očito su linerno nezavisni (- različitih su stupnjeva), pa oni predstavljaju bazu. Stoga je $\dim \mathcal{Q} = 2$.

4.6.3 Nizovi

Niz (realan) je svako preslikavanje sa skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ u polje $\mathbb{R}$. Dakle, $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je jedan niz. Uobičajeno je niz a zapisati kao $(a_1, a_2, a_3, \dots)$, odnosno kraće $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdje je $a_n = a(n)$. Brojeve a_1, a_2, ... nazivamo *članovima* ili *elementima niza*. Nizovi se zbrajaju i množe skalarom po elementima, pa je lako ustanoviti da je skup svih realnih nizova isto jedan vektorski potprostor, i to beskonačnodimenzionalan.

Primjer 32. *Pokažimo da je skup aritmetičkih nizova $\mathbb{A}$ vektorski potprostor. Svaki aritmetički niz određen je početnim elementom a_1 i razlikom d. Vrijedi da je*

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

za sve n. Ako imamo zadana dva aritmetički niza jedan s početnim elementom a_1 i razlikom d, a drugi s početnim elementom b_1 i razlikom δ, onda je jasno da je zbroj ta dva niza upravo aritmetički niz s početnim elementom a_1+b_1 i razlikom $d+\delta$. Analogno, ako aritmetički niz s početnim elementom a_1 i razlikom d pomnožimo sa skalarom λ dobit ćemo aritmetički niz s početnim elementom λa_1 i razlikom λd. Stoga je skup aritmetičkih nizova $\mathbb{A}$ vektorski potprostor prostora svih nizova.

Odredimu mu bazu i dimenziju. Tipični aritmetički niz oblika

$$(a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \dots) = a_1(1, 1, 1, 1, \dots) + d(0, 1, 2, 3, \dots),$$

Nizovi $(1, 1, 1, 1, \dots)$ i $(0, 1, 2, 3, , \dots)$ očito razapinju potprostor $\mathbb{A}$. Ustanovimo da su linearno nezavisni - odgovarajući elementi nisu proporcionalni. Dakle, ova dva niza predstavlju bazu za $\mathbb{A}$, a dimenzija je očito jednaka 2.

4.7 Rang matrice

Definicija 24. ***Rang matrice*** *$A \in \boldsymbol{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ je broj linearno nezavisnih stupaca te matrice. Oznaka je $r(A)$*

Primjer 33. *Rang matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ je jednak 2, rang matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ je isto jednak 2, jer je treći stupac jednak zbroju prvog i drugog stupca. Rang jedinične matrice reda 3 je 3.*

Uočimo da je za svaku matricu A tipa $m \times n$ vrijedi da je

$$r(A) \leq \min\{m, n\}.$$

Zaista, ako matrica ima n stupaca onda je $r(A) \leq n$. S druge strane svaki stupac matrice tipa $m \times n$ možemo shvatiti i kao uređenu m-torku, to jest kao vektor iz m-dimenzionalnog prostora, a u njemu je maksimalan broj linearno nezavisnih vektora jednak m. Dakle, pokazali smo da je i $r(A) \leq m$

Teorem 4.6. *Broj linearno nezavisnih stupaca neke matrice jednak je broju linearno nezavisnih redaka te iste matrice.*

Prethodni teorem se može opisno izreći na način: *rang matrice po retcima jednak je rangu matrice po stupcima.*

Sljedeći teorem će nam pomoći u tome kako efikasno odrediti rang neke matrice.

Teorem 4.7. *Rang matrice se ne mijenja ukoliko nad retcima i/ili stupcima vršimo elementarne transformacije.*

5 Linearni operatori

5.1 Definicija i osnovna svojstva

Definicija 25. *Neka su V i W vektorski prostori. Preslikavanje $F : V \to W$ sa svojstvima*

- $F(v + w) = F(v) + F(w)$ *(aditivnost),*
- $F(\alpha\, v) = \alpha\, F(v)$ *(homogenost),*

*za sve vektore v, w iz V i svaki skalar α, zove se **linearan operator**.*

Dva svojstva linearnog operatora mogu se kraće obuhvatiti jednim svojstvom. To jest, $F : V \to W$ je linearan operator ako i samo ako je

$$F(\alpha\, v + \beta\, w) = \alpha\, F(v) + \beta\, F(w),$$

za vektore v, w iz V i sve skalare α i β.

Teorem 5.1. *Neka je $F : V \to W$ lineran operator. Tada F preslikava nulvektor iz V u nulvektor iz W.*

Dokaz. Označimo s θ_V nulvektor iz V, a s θ_W nulvektor iz W. Vrijedi

$$F(\theta_V) = F(v + (-v)) = F(v) + F(-v) = F(v) + (-1)F(v) = F(v) + (-F(v)) = \theta_W.$$

□

Teorem 5.2. *Linearni operator je jedinstveno određen svojim djelovanjem na bazi prostora.*

Dokaz. Neka je $F : V \to W$ linearan operator i neka je $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ baza prostora V. Za svaki vektor v iz prostora V postoje jedinstveni skalari α_1, α_2, ..., α_n takvi da je $v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots \alpha_n b_n$. Tada je

$$F(v) = F(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots \alpha_n b_n) = \alpha_1 F(b_1) + \alpha_2 F(b_2) + \cdots \alpha_n F(b_n).$$

Stoga je F jedinstveno određen vektorima $F(b_1)$, $F(b_2)$, ..., $F(b_n)$ iz W. □

Primjer 34. *Sljedeća preslikavanja su linearni operatori:*

(a) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (x - y, 2x)$,

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $T(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 - 3x_3$,

(c) $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $P(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_1 - x_2 - x_3)$, Pokažimo da je operator F iz prethodnog primjera linearan. Prvo ćemo pokazati da je zadovoljeno svojstvo aditivnosti. Neka su $v_1 = (x_1, y_1)$ i $v_2 = (x_2, y_2)$ proizvoljni vektori iz $\mathbb{R}^2$. Tada je

$$\begin{aligned}
F(v_1 + v_2) &= F((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = F(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \{\text{propis preslikavanja}\} = \\
&= (x_1 + x_2 - (y_1 + y_2), 2(y_1 + y_2)) = ((x_1 - y_1) + (x_2 - y_2), 2y_1 + 2y_2) = \\
&= (x_1 - y_1, 2y_1) + (x_2 - y_2, 2y_2) = F(x_1, y_1) + F(x_2, y_2) = F(v_1) + F(v_2).
\end{aligned}$$

Sada provjerimo da F ispunjava i svojstvo homogenosti. Za proizvoljan vektor $v = (x, y)$ iz $\mathbb{R}^2$ i skalar α iz $\mathbb{R}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
F(\alpha v) &= F(\alpha(x, y)) = F(\alpha x, \alpha y) = \{\text{propis preslikavanja}\} = \\
&= (\alpha x - \alpha y, 2(\alpha x)) = (\alpha(x - y), \alpha(2x)) = \alpha(x - y, 2x) = \\
&= \alpha F(v).
\end{aligned}$$

Umjesto pokazivanja ova dva svojstva - aditivnosti i homogenosti - mogli smo to i dokazivanjem aditivnosti na sljedeći način. Za skalare $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ i vektore $v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ vrijedi

$$\begin{aligned}
F(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) &= F(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \\
&= (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 - (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2), 2(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)),
\end{aligned}$$

te

$$\begin{aligned}
\alpha_1 F(v_1) + \alpha_2 F(v_2) &= \alpha_1(x_1 - y_1, 2x_1) + \alpha_2(x_2 - y_2, 2x_2) = \\
&= (\alpha_1 x_1 - \alpha_1 y_1 + \alpha_2 x_2 - \alpha_2 y_2, \alpha_1(2x_1) + \alpha_2(2x_2)) = \\
&= (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 - (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2), 2(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)).
\end{aligned}$$

Stoga smo pokazali da je $F(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 F(v_1) + \alpha_2 F(v_2)$ za sve $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ i $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$.

Primjer 35. *Sljedeća preslikavanja* nisu *linearni operatori:*

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = |x| + |y|$,

(b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2 + x_3)$,

(c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $h(x, y) = (\sin x, y)$,

(d) $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $k(x, y) = (x + 1, x + y)$.

Samo ćemo ukratko komentirati zašto preslikavanja iz prethodnog primjera nisu linearni operatori. Naime, ako ustanovimo na barem jednom primjeru da nije zadovoljeno svojstvo aditivnosti ili homogenosti tada navedeno preslikavanje ne može biti linearn oparator. Na primjer za $\alpha = -1$ i $v = (1, 2)$ imamo da je

$$\alpha f(x, y) = -(1 + 2) = -3,$$

dok je

$$f(\alpha(x,y)) = f(-1,-2) = |-1| + |-2| = 3.$$

Dakle, preslikavanje f ne zadovoljava svojstvo homogenosti. Slično, bi se ustanovilo i za preslikavanja g i h (- kvadratna funkcija nije linearna, a niti funkcija sinus!). U posljednjem primjeru možemo jednostavno ustanoviti da je $k(0,0) = (1,0)$, što znači da k ne može biti linearni operator jer je osnovno svojstvo svakog linearnog operatora da nulvektor preslikava u nulvektor (Teorem 5.1).

Konačno, zanimljivo je ustanoviti kao izgledaju linearni operatori s $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$. Oni su oblika $f(x) = ax$, za neku konstantu $a \in \mathbb{R}$. Zanimljivo je da se svi linearni operatori s $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}^m$ mogu (uz određeni dogovor) prikazati u obliku 'ax' samo što će ulogu koeficijenta a imati tablica - matrica koeficijenata A. O tome upravo govori sljedeće poglavlje.

5.2 Matrični zapis linearnog operatora

Pretpostavimo da je V n-dimenzionalan vektorski prostor, W m-dimenzionalan vektorski prostor, a $F : V \to W$ linearan operator. U predhodnom potpoglavlju uočili smo da je svaki linearni operator je jedinstveno određen svojim djelovanjem na bazi prostora (Teorem 5.2). Kokretno, F je potpuno određen vektorima $F(b_1)$, $F(b_2)$, ..., $F(b_n)$ iz W, gdje je $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ baza prostora V. Ako je $\{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ baza prostora W, onda svaki od vektora $F(b_1)$, $F(b_2)$, ..., $F(b_n)$ možemo jedinstveno prikazati u toj bazi. Dakle, postoje skalari α_{ij}, za $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ takvi da je

$$\begin{aligned}
F(b_1) &= \alpha_{11}c_1 + \alpha_{21}c_2 + \cdots + \alpha_{m1}c_m,\\
F(b_2) &= \alpha_{12}c_1 + \alpha_{22}c_2 + \cdots + \alpha_{m2}c_m,\\
&\ \vdots\\
F(b_n) &= \alpha_{1n}c_1 + \alpha_{2n}c_2 + \cdots + \alpha_{mn}c_m.
\end{aligned}$$

Sada vidimo da je operator F potpuno određen s $m \cdot n$ skalara α_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Matricu koja se sastoji od skalara dobivenih na opisani način, to jest

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

nazivamo **matricom linearnog operatora** s obzirom na baze $\{b_1, \ldots, b_n\}$ i $\{c_1, \ldots, c_m\}$. Kraće, možemo zapamtiti da matricu operatora možemo dobiti tako što u stupce zapisujemo koordinate slika vektora baze.

Budući da znamo da svaki vektorski prostor može imati više baza, prirodno je pitati se ovisi li matrica operatora o izboru baze. Odgovor je potvrdan - *matrica operatora ovisi o izboru baze*. Za odabir različitih baza dobit ćemo različite matrice. No, pokazuje se da bitna svojstva operatora ne će ovisiti o matričnom prikazu.

Kako se mi konkretno najviše bavimo operatorima $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, njih prikazivati s obzirom na kanonske baze prostora $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$. Dakle, određivat ćemo matrični prikaz

$$A = (F(e_1) \;\; F(e_2) \;\; \cdots \;\; F(e_n)) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix},$$

gdje su $F(e_1) = (\alpha_{11}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{m1})$, $F(e_2) = (\alpha_{12}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{m2})$, ..., $F(e_n) = (\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \ldots, \alpha_{mn})$.

Primjer 36. *Prikažimo matrično operator $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y, z) = (x-2y, 3x+y-z)$ s obzirom na kanonske baze.*

Vrijedi

$$F(e_1) = F(1, 0, 0) = (1, 3), \;\; F(e_2) = F(0, 1, 0) = (-2, 1), \;\; F(e_3) = F(0, 0, 1) = (0, -1).$$

Stoga je matrični prikaz operatora F jednak

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Uočimo

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y \\ 3x + y - z \end{pmatrix}.$$

U prethodnom primjeru smo uočili da djelovanje operatora na vektoru upravo odgovara množenju matrice operatora i tog vektora. To se uz malo raspisivanja može pokazati i sasvim općenito. Stoga su svi linearni operatori s $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$ zapravo preslikavanja koja možemo zapisivati kao $A \cdot X$, gdje je A matrice operatora, a X proizvoljan vektor iz $\mathbb{R}^n$ zapisan kao stupčasta matrica iz $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

Primjer 37. *Odredit ćemo matricu linearnog operatora $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2x - y, -x + y)$ u kanonskoj bazi, te u bazi $\{b_1 = (1, 1), b_2 = (-1, 2)\}$.*

U kanonskoj bazi matricu lako 'iščitamo'

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Određivanje matice u bazi $\{b_1, b_2\}$ zahtijeva nešto više posla. Najprije, odredimo slike vektora baze b_1 i b_2:

$$\begin{aligned} F(b_1) &= F(1, 1) = (1, 0), \\ F(b_2) &= F(-1, 2) = (-4, 3). \end{aligned}$$

Koeficijente matrice operatora F u bazi $\{b_1, b_2\}$ zadovoljavaju sljedeće

$$F(b_1) = \beta_{11}b_1 + \beta_{21}b_2,\ F(b_2) = \beta_{12}b_1 + \beta_{22}b_2.$$

Uvrštavanjem konkretnih vrijednosti dobivamo

$$(1,0) = \beta_{11}(1,1) + \beta_{21}(-1,2),\ (-4,3) = \beta_{12}(1,1) + \beta_{22}(-1,2).$$

To znači da β_{11} i β_{21} dobivamo kao rješenje sustava

$$\begin{array}{rcrcr} \beta_{11} & - & \beta_{21} & = & 1 \\ \beta_{11} & + & 2\beta_{21} & = & 0 \end{array},$$

a β_{12} i β_{22} kao rješenje sustava

$$\begin{array}{rcrcr} \beta_{12} & - & \beta_{22} & = & -4 \\ \beta_{12} & + & 2\beta_{22} & = & 3 \end{array}.$$

Budući da su to sustavi s istom matricom sustava možemo ih pomoću Gaussove metode eliminacije rješavati istovremeno (kao u Primjeru 16),

$$\left(\begin{array}{rr|rr} \boxed{1} & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & \boxed{3} & -1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \end{array}\right)$$

Rješenja prvog sustava su $\beta_{11} = \frac{2}{3}$, $\beta_{21} = -\frac{1}{3}$, a drugog $\beta_{12} = -\frac{5}{3}$, $\beta_{22} = \frac{7}{3}$. Stoga je matrica operatora F u bazi $\{b_1, b_2\}$ jednaka

$$\left(\begin{array}{rr} \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \end{array}\right).$$

5.3 Jezgra i slika linearnog operatora

Definicija 26. *Neka je $F : V \to W$ lineran operator. Skup svih vektora koji se preslikaju u nulvektor iz prostora W naziva se **jezgra linearnog operatora** F. Pišemo*

$$Ker\ F = \{v \in V : F(v) = \theta_W\}.$$

Slika linearnog operatora *F je skup svih vektora iz W oblika $F(v)$ za $v \in V$. Pišemo*

$$Im\ F = \{F(v)\ :\ v \in V\}.$$

Teorem 5.3. *Neka je $F : V \to W$ linearan operator. Jezgra operatora F je potprostor od V, a slika je potprostor od W.*

Dokaz. Prvo pokažimo da je jezgra potprostor. Neka su v i w vektori iz $Ker\ F$. Tada je $F(v) = \theta$ i $F(w) = \theta$. Vrijedi

$$F(v + w) = F(v) + F(w) = \theta + \theta = \theta.$$

Dakle, $v + w \in Ker\ F$. I $\alpha\, v$ je iz $Ker\ F$ jer je

$$F(\alpha\, v) = \alpha\, F(v) = \alpha\, \theta = \theta.$$

Stoga je $Ker\ F$ potprostor vektorskog prostora V prema Teoremu 4.2.

Sada pokažimo da je slika potprostor. Neka su a i b vektori iz $Im\ F$. Tada postoje vektori v i w iz V takvi da je $F(v) = a$ i $F(w) = b$. Vrijedi da je

$$a + b = F(v) + F(w) = F(v + w),$$

pa je i $a + b$ iz $Im\ F$. Nadalje,

$$\alpha\, a = \alpha F(v) = F(\alpha\, v),$$

te je i $\alpha\, a$ iz $Im\ F$. Prema Teoremu 4.2 slijedi da je $Im\ F$ potprostor od W. □

Zbog prethodnog teorema ima smisla definirati sljedeće pojmove.

Definicija 27. *Dimenzija jezgre linearnog operatora zove se* ***defekt****, dimenzija slike linearnog operatora zove se* ***rang****. Defekt inearnog operatora F označavamo s $d(F)$, a rang s $r(F)$.*

Napomenimo da ćemo dimenziju trivijalnog potprostora koji se sastoji samo od nulvektora, to jesti potprostora $\{\theta\}$, označavati s 0. Dakle, ako je, na primjer, $Ker\ F = \{\theta\}$, onda je defekt operatora F nula, $d(F) = 0$.

Ako je F injektivan operator, to jest operator koji različite vektore preslikava u različite vektore (odnosno, $v \neq w \Rightarrow F(v) \neq F(w)$), tada je njegova jegra očito trivijalan potprostor koji se sastoji samo od nulvektora. Vrijedi i obratno, ako je $Ker\ F = \{\theta\}$, onda je operator F injektivan. Zaista, ako je $F(v) = F(w)$, onda je $F(v - w) = \theta$, pa je $v - w = \theta$, jer je jezgra trivijalna. Dakle, $v = w$ pa je F injektivan operator. Napomenimo još da se injektivan linearan operator joňaziva *monomorfizam*.

U slučaju da je F surjektivan operator, vrijedi da je $Im\ F = W$, to jest da je $r(F) = dim\, W$. Vrijedi i obrat, iz činjenice da je $r(F) = dim\, W$ slijedi da je F surjektivan. Operator koji je surjektivan se još naziva *epimorfizam*.

Konačno, ako je F bijektivan operator, onda je on i injekcija i surjekcija. Dakle, $d(F) = 0$ (jer je $Ker\ F = \{\theta\}$) i $r(F) = dim\, W$. Za bijektivan operator još kažemo da je *izomorfizam*.

Ustanovili smo sljedeće:

Propozicija 5.4. *Neka je $F : V \to W$ lineran operator. F je*

- *monomorfizam ako i samo je $d(F) = 0$,*
- *epimorfizam ako i samo je $r(F) = dim\, W$.*

Sljedeća tvrdnja je u linearnoj algebri poznata pod nazivom ***Teorem o rangu i defektu***.

Teorem 5.5. *Neka je $F : V \to W$ lineran operator. Zbroj ranga i defekta jednak je dimenziji prostora V, odnosno*

$$r(F) + d(F) = dim\ V.$$

Primjer 38. *Linearnim operatorima*

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x, x + 2y)$,

(b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z) = (x - z, 2x + y)$,

(c) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $h(x, y, z) = (x - z, x + y, y + z)$,

odredit ćemo po jednu bazu za jezgru i sliku, te rang i defekt.

(a) *Najprije odredimo jezgru operatora f - to je skup svi on ih vektora iz $\mathbb{R}^2$ koji se preslikavaju u nulvektor $(0, 0)$. To jest, određujemo sve $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ za koje je $f(x, y) = (x, x + 2y) = (0, 0)$. Otuda dobivamo homogen linearan sustav*

$$\begin{array}{ccccc} x & & & = & 0 \\ x & + & 2y & = & 0 \end{array},$$

čije je rješenje jedinstveno $(x, y) = (0, 0)$. Dakle, jezgra je trivijalna, $Ker\ f = \{(0, 0)\}$ (- baza se ovom slučaju ne određuje!) i defekt je nula, $d(f) = 0$.

Sada trebamo odrediti sliku operatora f. Prema Teoremu o rangu i defektu *(5.5) je*

$$r(f) = dim\ \mathbb{R}^2 - d(f) = 2.$$

To znači da je slika upravo jednaka prostoru $\mathbb{R}^2$. Zaista, $Im\ f$ je potprostor od $\mathbb{R}^2$ i ustanovili smo da je $r(f) = dim\,(Im\ f) = 2$, pa to znači da je $Im\ f = \mathbb{R}^2$.

(b) *Jezgra operatora g je skup svih $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ za koje je*

$$g(x, y, z) = (x - z, 2x + y) = (0, 0),$$

odnosno koji zadovoljavaju sljedeći homogen sustav

$$\begin{array}{cccccc} x & & & - & z & = & 0 \\ 2x & + & y & & & = & 0. \end{array}$$

Rješenje sustava je očito jednoparametarsko $x = t$, $y = -2t$, $z = t$, $t \in \mathbb{R}$. Dakle,

$$Ker\ g = \{(t, -2t, t) \,:\, t \in \mathbb{R}\} = \{t(1, -2, 1) \,:\, t \in \mathbb{R}\} = [\{(1, -2, 1)\}].$$

Znači jezgra od g je linearna ljuska razapeta vektorom $(1, -2, 1)$. Kako trebamo odrediti bazu za $Ker\ g$, to je upravo $\{(1, -2, 1)\}$, te je jasno da je $d(g) = 1$. Prema Teoremu o rangu i defektu *(5.5) je*

$$r(g) = dim\ \mathbb{R}^3 - d(f) = 3 - 1 = 2.$$

Kao i u slučaju (a), i ovdje imamo da je $Im\ g$ potprostor od $\mathbb{R}^2$, a kako smo ustanovili da joj je dimenzija 2, to je jedino moguće za $Im\ g = \mathbb{R}^2$

(c) *Jezgru operatora h odredimo rješavanjem homogenog sustava*

$$\begin{array}{ccccccc} x & & & - & z & = & 0 \\ x & + & y & & & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0. \end{array}$$

Sređivanjem matrice sustava

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{-1} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dobivamo jednoparametarsko rješenje $x = t$, $y = -t$, $z = t$, $t \in \mathbb{R}$. *Stoga je jegra od h jednodimenzionalan potprostor:*

$$Ker\ h = \{(t, -t, t) \,:\, t \in \mathbb{R}\} = \{t(1, -1, 1) \,:\, t \in \mathbb{R}\} = [\{(1, -1, 1)\}].$$

Baza za $Ker\ h$ *je* $\{(1, -1, 1)\}$ *i* $d(h) = 1$. *Prema* Teoremu o rangu i defektu *(5.5) je*

$$r(g) = dim\ \mathbb{R}^3 - d(f) = 3 - 1 = 2.$$

No, sada je slika od h dvodimenzionalan potprostor od $\mathbb{R}^3$. *Prisjetimo se da je svaki linearan operator potpuno određen svojim djelovanjem na bazi prostora (Teorem 5.2). Ako za bazu prostora* $\mathbb{R}^3$ *uzmemo kanonsku bazu* $\{e_1, e_2, e_3\}$, *tada će skup*

$$\{h(e_1) = (1, 1, 0), h(e_2) = (0, 1, 1), h(e_3) = (-1, 0, 1)\}$$

razapinjati sliku. Znamo da baza za sliku sadrži dva vektora. Prema definiciji baze nekog vektorskog prostora (- skup linearno neazavisnih vektora koji razapinju taj prostor), slijedi da iz prethodnog skupa vektora moramo uzeti neka dva linearno nezavisna. Stoga, na primjer skup $\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ *predstavlja jednu bazu za* $Im\ h$. *(Mogli smo izabrati bilo koja dva vektora od tri. U ovom slučaju lako možemo i provjeriti da je treći vektor linearno zavisan s prethodna dva vektora,* $(-1, 0, 1) = -(1, 1, 0) + (0, 1, 1)$.*)*

5.4 Spektar linearnog operatora

Definicija 28. *Neka je* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *linearan operator. Skalar* $\lambda \in \mathbb{R}^n$ *za koji postoji vektor* $v \in \mathbb{R}^n$ *različit od nulvektora za koji je*

$$f(v) = \lambda v,$$

zaziva se ***svojstvena vrijednost*** *operatora* f. *Vektor* v *se naziva svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti* λ. *Skup svih svojstvenih vrijednosti danog operatora naziva se spektar i označava sa* $\sigma(f)$.

Ako je A matrica linearnog operatora f, onda jednakost $f(v) = \lambda v$ možemo zapisati kao

$$A \cdot X = \lambda X,$$

gdje je X predstavlja vektor v zapisan stupčastu matricu iz $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Odnosno, vrijedi

$$(A - \lambda I) \cdot X = 0,$$

gdje je I jedinična matrica reda n. Prema definiciji svojstvene vrijednosti λ je $X \neq 0$, pa je jasno da matrica $A - \lambda I$ ne može biti regularna. Znači da je

$$det(A - \lambda I) = 0.$$

Definiramo preslikavanje $k_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ili $k_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$),

$$k_f(\lambda) = det(A - \lambda I).$$

Raspisivanjem se može pokazati da je k_f polinom stupnja n. Stoga ga nazivamo **karakterističnim polinom** operatora f (odnosno matrice A).

Propozicija 5.6. *Svojstvene vrijednosti operatora f su nultočke karakterističnog polinoma k_f.*

Svojstvene vrijednosti, λ_i nekog operatora, ili matrice, određivat ćemo kao nultočke karakterističnog polinoma, a pripadne svojstvene vektore kao netrivijalna rješenja matrične jednadžbe $(A - \lambda_i I) \cdot X = 0$.

Primjer 39. *Sljedećim linearnim operatorima s $\mathbb{R}^2$ na $\mathbb{R}^2$ odredit ćemo spektar, te za svojstveni vektor za svaku svojstvenu vrijednost.*

(a) $f(x, y) = (-5x - 4y, -3x - 4y)$,

(b) $f(x, y) = (3x + 2y, -x + y)$,

(c) $f(x, y) = (-x + y, -2x + 2y)$,

(d) $f(x, y) = (2x, 2y)$,

(e) $f(x, y) = (2x + y, 2y)$.

Prije svega uvijek moramo odrediti matricu operatora. To ćemo zbog jednostavnosti učiniti u kanonskoj bazi $\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$.

(a) *Matrica operatora je* $A = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$, *a karakteristični polinom je*

$$k_f(\lambda) = det\,(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & -4 \\ -3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (-5-\lambda)(-4-\lambda)-(-4)(-3) = \lambda^2+9\lambda+8.$$

Nultočke polinoma $k_f(\lambda)$, *odnosno rješenja kvadratne jednadžbe* $\lambda^2+9\lambda+8=0$ *su* $\lambda_1=-8$ *i* $\lambda_2=-1$. *Dakle, spektar je*

$$\sigma(f)=\{-8,-1\}.$$

Sada ćemo za svakoj svojstvenoj vrijednosti odrediti po jedan svojstveni vektor. Svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1=-8$ *je neko netrivijalno rješenje homogene matrične jednadžbe (ili sustava)*

$$(A-\lambda_1 I)X=0 \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dakle, $3x-4y=0$, *pa su sva rješenja matričnom obliku*

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}t,\ t\in\mathbb{R}.$$

Budući da za svojstveni vektor možemo odabrati bilo koje rješenje različito od nul-vektora $(0,0)$, *možemo odabtrati vektor* $v_1=(4,3)$ *(sa cjelobrojnim koordinatama, koji smo dobili za vrijednost parametra* $t=4$. *)*

Na isti način, svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2=-1$ *je neko netrivijalno rješenje homogene matriyne jednadžbe (ili sustava)*

$$\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

na primjer $v_2=(-1,1)$.

(b) *Matrica operatora je* $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, *a karakteristični polinom je*

$$k_f(\lambda)=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda+5.$$

Rješenja kvadratne jednadžbe $\lambda^2-4\lambda+5=0$ *su kompleksna pa je stoga* $\sigma(f)=\emptyset$.

(c) *Matrica operatora je* $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, *a karakteristični polinom je*

$$k_f(\lambda)=\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda.$$

Stoga je $\sigma(f)=\{0,1\}$. *Svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti* $\lambda_1=0$ *je* $v_1=(1,1)$, *a svojstvenoj vrijednosti* $\lambda_2=0$ *je* $v_2=(1,2)$.

(d) *Matrica operatora je* $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, *a karakteristični polinom je*

$$k_f(\lambda)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda-2)^2.$$

U ovom slučaju je $\sigma(f) = \{2\}$. Svojsveni vektori se određuju iz jednadžbe

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

koju očito zadovoljavaju svi vektori iz $\mathbb{R}^2$ - rješenje je dakle dvoparametarsko,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} s, \ t, s \in \mathbb{R}.$$

U ovom slučaju svojstvenoj vrijednosti $\lambda = 2$ pripadaju dva linearno nezavisna svojstvena vektora $v_1 = (1, 0)$ i $v_2 = (0, 1)$.

(e) *Matrica operatora je $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, a karakteristični polinom je*

$$k_f(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2.$$

I u ovom slučaju je $\sigma(f) = \{2\}$. Svojstveni vektori se određuju iz jednadžbe

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

to jest $y = 0$, pa su sva rješenja dana s $(t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$. Svojstvenoj vrijednosti $\lambda = 2$ pripada svojstveni vektor $v_1 = (1, 0)$.

Pretpostavimo da je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linearan operator čiji je karakteristični polinom oblika

$$k_f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_1} (\lambda_2 - \lambda)^{n_2} \cdots (\lambda_s - \lambda)^{n_s},$$

gdje su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{R}$. Stoga je

$$\sigma(f) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s\}.$$

Brojevi $n_1, n_2, \ldots, n_s \in \mathbb{N}$ se nazivaju **algebarske kratnosti** svojstvenih vrijednosti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ i predstavljaju njihove kratnosti kao nultočkaka karakterističnog polinoma k_f. Kako je stupanj polinoma k_f jednak n jasno je da je

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n.$$

Nadalje, svakoj svojstvenoj vrijednosti λ_i možemo pridružiti i njenu **geometrijsku kratnost**. Da bismo ju definirali, najprije proučimo skup

$$V_{\lambda_i} = \{v \in \mathbb{R}^n \ : \ f(v) = \lambda_i v\}.$$

Skup V_{λ_i} predstavlja skup svih svojstvenih vektora pridruženih svojstvenoj vrijednosti λ_i, te se u njemu nalazi i nulvektor (jer on trivijalno zadovoljava jednakost $f(v) = \lambda_i v$). Naziva se **svojstveni potprostor** pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_i. Sljedeća propozicija 'opravdava' nazivanje skupa V_{λ_i} potprostorom.

Propozicija 5.7. *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linearan operator, te $\lambda_i \in \mathbb{R}$ neka svojstvena vrijednost operatora f. Tada je skup*

$$V_{\lambda_i} = \{v \in \mathbb{R}^n \,:\, f(v) = \lambda_i v\}$$

vektorski potprostor od $\mathbb{R}^n$.

Dokaz. Prema Teoremu 4.2 treba provjeriti da je skup V_{λ_i} zatvoren na zbrajanje i množenje skalarom. Neka su $v, w \in V_{\lambda_i}$, te $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tada je

$$f(\alpha v + \beta w) = \{f \text{ je lin. op.}\} = \alpha f(v) + \beta f(w) = \alpha(\lambda_i v) + \beta(\lambda_i w) = \lambda_i(\alpha v + \beta w).$$

Stoga je i $\alpha v + \beta w$ vektor skupa V_{λ_i}. □

Sada kada smo se uvjerili da je V_{λ_i} vektorski potprostor, možemo mu odrediti i dimenziju. Dimenzija svojstvenog potprostora V_{λ_i} se naziva *geometrijska kratnost* svojstvene vrijednosti λ_i. Geometrijska kratnost obično označavamo s g_i. Dakle,

$$g_i = dim\ V_{\lambda_i}.$$

Konačno, ako je n_i, odnosno g_i pripadna algebarska, odnosno geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti λ_i tada se može pokazati da je

$$1 \leq g_i \leq n_i,$$

za sve $i = 1, 2 \ldots, s$. Dakle, geometrijska kratnost je uvijek manja od geometrijske kratnosti određene svojstvene vrijednosti.

Ovo sve što smo upravo definirali prokomentirat ćemo na linearnim operatorima iz Primjera 39. U **(a)** smo dobili da je $\sigma(f) = \{\lambda_1 = -8, \lambda_2 = -1\}$, te da su pripadni svojstveni potprostori

$$V_1 = [\{(4, 3)\}],\ V_2 = [\{(-1, 1)\}].$$

(Sva rješenja odgovarajuće matrične jednadžbe $(A - \lambda_i)X = 0$ nam upravo predstavljaju svojstveni potprostor.) Znači, algebrarska i geometrijska kratnost za obje svojstvene vrijednosti jednake 1.

U primjeru **(c)** dobili smo analogan rezultat; $\sigma(f) = \{\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1\}$, a pripadni svojstveni potrostori su

$$V_1 = [\{(1, 1)\}],\ V_2 = [\{(1, 2)\}].$$

Dakle i ovdje je $n_1 = g_1 = 1$ i $n_2 = g_2 = 1$.

U primjeru **(d)** dobili smo da je $\sigma(f) = \{\lambda_1 = 2\}$, pri čemu je pripadni karakteristični polinom bio $k_f(\lambda) = (\lambda - 2)^2$. Stoga je algebarska kratnost ove svojstvene vrijednosti $n_1 = 2$. Nadalje, dobili smo da je $V_1 = \mathbb{R}^2$, pa je i geometrijska kratnost $g_1 = 2$.

U posljednjem slučaju **(e)**, pripadni karakteristični polinom je isto bio $k_f(\lambda) = (\lambda - 2)^2$, pa je algebarska kratnost svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = 2$ jednaka $n_1 = 2$. No, za razliku od prethodnog primjera je pripadni svojstveni potrostor jednak

$$V_1 = [\{(1, 0)\}],$$

pa je geometrijska kratnost $g_1 = 1$ i vrijedi $g_1 < n_1$.

Uočit ćemo još neka zanimljiva svojstva na istim primjerima. Za linearni operator iz primjera **(a)** vrijedi da je

$$f(v_1) = -8v_1,\ f(v_2) = -v_2,$$

za $v_1 = (4, 3)$ i $v_2 = (-1, 1)$. Očito, su vektori i v_1 i v_2 linearno nezavisni, pa stoga predstavlju i jednu bazu za $\mathbb{R}^2$ - *bazu svojstvenih vektora.* Matrica ovog operatora u bazi $\{v_1, v_2\}$ je

$$\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

dakle *dijagonalna*! Isto možemo uočiti i u primjerima **(c)** i **(d)**, i za te operatore postoji baza koja se sastoji od svojsvenih vektora u kojima ti linearni operatori imaju matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Za razliku od ovih primjera, u slučaju operatora iz **(e)**, vidimo da svojstvena vrijednosti $\lambda_1 = 2$ algebarske kratnosti 2, ima svojstveni potprostor dimenzije 1 zbog čega nije moguće dobiti bazu koja se sastoji od svojstvenih vektora. Ovo je primjer operatora koji u niti jednoj bazi nema dijagonalnu matricu.

Propozicija 5.8. *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linearan operator, te $\lambda_i, \lambda_j \in \mathbb{R}$ dvije međusobno različite svojstvene vrijednosti operatora f s pridruženim svojstvenim vektorima v_i i v_j. Tada su v_i i v_j linearno nezavisni vektori.*

Dokaz. Pretpostaviom *suprotno*, to jest da su vektori v_i i v_j linearno zavisni. Stoga postoji skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ za koji je

$$v_i = \alpha v_j.$$

Otuda je i

$$f(v_i) = f(\alpha v_j) = \alpha f(v_j) = \alpha(\lambda_j v_j) = \lambda_j(\alpha v_j) = \lambda_j v_i.$$

S druge strane je

$$f(v_i) = \lambda_i v_i,$$

pa je

$$\lambda_j v_i = \lambda_i v_i,$$

odnosno

$$(\lambda_j - \lambda_i)v_i = \theta.$$

Prethodna jednakost nije moguća, jer je $\lambda_j - \lambda_i \neq 0$ i $v_i \neq \theta$ (- prema definiciji svojstvenog vektora), pa je stoga naša pretpostavka da su v_i i v_j linearno zavisni kriva. Dakle, v_i i v_j su linearno nezavisni. □

Korolar 5.9. *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linearan operator koji ima n međusobno različitih svojstvenih vrijednosti λ_1, ..., λ_n. Tada postoji baza u kojoj operator f ima dijagonalnu matricu*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Dokaz. Prema Propoziciji 5.8 svojstveni vektori v_1, ..., v_n pridruženi svojstvenim vrijednostima λ_1, ..., λ_n su linearno nezavisni, a n linearno nezavisnih vektora u $\mathbb{R}^n$ čini bazu za $\mathbb{R}^n$. U toj bazi koja se sastoji od svojstvenih vektora operator f upravo ima gornju dijagonalnu matricu (jer je prema definiciji $f(v_i) = \lambda_i v_i$). $\square$

Općenito, ako za neki linearan operator postoji baza vektora u kojoj je njegova matrica dijagonalna, onda kažemo da se takav operator **može dijagonalizirati** ili da je **dijagonalizabilan**. Prethodna tvrdnja nam je pokazala su oni operatori koji imaju točno n različitih svojstvenih vrijednosti (to jest svojstvene vrijednosti čije je algebarska kratnost jednaka 1) - dijagonalizabilni.

6 Produkti

6.1 Norma

Definicija 29. *Na vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$ definiramo* ***normu*** *ili* ***duljinu vektora*** *$v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kao*

$$\|v\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

U prostorima $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ pomoću Pitagorinog teorema možemo provjeriti da se ovako definirana vektora zaista podudara s duljinom vektora.

U sljedećoj propoziciji navedena su najbitnija svojstva norme.

Propozicija 6.1. *Vrijedi*

1. $\|v\| \geq 0$, *za sve* $v \in \mathbb{R}^n$,
2. $\|v\| = 0$ *ako i samo ako je* $v = \theta$,
3. $\|\alpha \cdot v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$ *za sve* $v \in \mathbb{R}^n$ *i* $\alpha \in \mathbb{R}$,
4. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ *za sve* $v, w \in \mathbb{R}^n$.

6.2 Skalarni produkt

Definicija 30. *Na vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$ definiramo* ***skalarno množenje*** *ili* ***skalarni produkt*** *vektora $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $w = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ iz $\mathbb{R}^n$ kao*

$$(v|w) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

U sljedećoj propoziciji navedena su svojstva skalarnog produkta.

Propozicija 6.2. *Vrijedi*

1. $(v|v) \geq 0$, *za sve* $v \in \mathbb{R}^n$,
2. $(v|v) = 0$ *ako i samo ako je* $v = 0$,
3. $(v|w) = (w, v)$ *za sve* $v, w \in \mathbb{R}^n$
4. $(\alpha\, v, w) = \alpha(v|w)$ *za sve* $v, w \in \mathbb{R}^n$ *i* $\alpha \in \mathbb{R}$,
5. $(u + v|w) = (u|w) = +(v|w) =$ *za sve* $u, v, w \in \mathbb{R}^n$.

Kao posljedicu prethodne propozicije imamo sljedeće.

Korolar 6.3. *Vrijedi*

1. $(v, w) = \alpha(v|\alpha\, w)$ *za sve* $v, w \in \mathbb{R}^n$ *i* $\alpha \in \mathbb{R}$,
2. $(u|v + w) = (u|v) = +(u|w) =$ *za sve* $u, v, w \in \mathbb{R}^n$.

Definicija 31. *Za vektore v i w iz $\mathbb{R}^n$ kažemo da su* ***okomiti*** *ili* ***ortogonalni*** *ako je $(v|w) = 0$. Pišemo $v \perp w$.*

Uočimo da je prema definiciji nulvektor θ ortogonalan na sve vektore. Odnosno, ako je $(v|w) = 0$ za sve vektore w iz $\mathbb{R}^n$ onda je $v = \theta$.

Veza između skalarnog produkta i norme dana je s ovim teoremom:

Teorem 6.4. *Vrijedi*

$$\|v\| = \sqrt{(v|v)},$$

za sve $v \in \mathbb{R}^n$

Teorem 6.5 (Relacija paralelograma)**.** *Vrijedi*

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + \|w\|^2,$$

za sve $v, w \in \mathbb{R}^n$

Prethodna tvrdnja nosi naziv relacija paralelograma jer se vektori $v+w$ i $v-w$ interpretiraju kao dijagonale paralelograma čije su stranice vektori v i w, a u paralelogramu je zbroj kvadrata duljina dijagonala jednak zbroju kvadrata duljina stranica.

Dokaz. Raspisivanjem dobivamo da je

$$\|v + w\|^2 = (v + w|v + w) = (v|v + w) + (w|v + w) = (v|v) + (v|w) + (w|v) + (w|w),$$

dakle

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + 2(v|w) + \|w\|^2.$$

Na isti način je

$$\|v - w\|^2 = \|v\|^2 - 2(v|w) + \|w\|^2,$$

pa zbrajanjem posljednje dvije relacije dobivamo traženu relaciju paralelograma. □

Oduzimanjem relacija

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + 2(v|w) + \|w\|^2$$

i

$$\|v - w\|^2 = \|v\|^2 - 2(v|w) + \|w\|^2,$$

dobivamo teorem:

Teorem 6.6. *Vrijedi*

$$(v|w) = \frac{1}{4}(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2),$$

za sve $v, w \in \mathbb{R}^n$

Teorem 6.7 (Cauchy-Schwarzova nejednakost)**.** *Vrijedi*

$$|(v|w)| \leq \|v\| \cdot \|w\|,$$

za sve $v, w \in \mathbb{R}^n$

Prema Cauchy-Schwarzovovoj nejednakosti vidimo da za $v, w \in \mathbb{R}^n \backslash \{\theta\}$ (to jest ako je $\|v\| \neq 0$ i $\|w\| \neq 0$) vrijedi

$$\frac{|(v|w)|}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1,$$

odnosno

$$-1 \leq \frac{(v|w)}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1.$$

Stoga ima smisla definirati pojam *kuta među vektorima* $v, w \in \mathbb{R}^n \backslash \{\theta\}$, $\angle(v, w) = \varphi$:

$$\cos \varphi = \frac{(v|w)}{\|v\| \cdot \|w\|}.$$

Ovako definiran kut potpuno se uklapa s pojmom ortogonalnih vektora. Razlika je samo u tome što pojam kuta nismo definirali za nulvektor.

Nadalje, na ovom mjestu možemo se prisjetiti i *geometrijske* definicije skalarnog produkta u ravnini ($\mathbb{R}^2$). Skalarni produkt ne-nulvektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi,$$

gdje je φ kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Ako je jedan od vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nulvektor onda stavljamo da je

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

U našim (*novim*) oznakama se ovakva geometrijska definicija zapisuje kao

$$(a|b) = \|a\| \cdot \|b\| \cos \varphi,$$

što se baš i poklapa s našom definicijom kuta.

Definicija 32. ***Ortogonalni komplement vektora*** $a \in \mathbb{R}^n$ *je skup*

$$a^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n \,:\, (a|v) = 0\}.$$

Propozicija 6.8. *Za svaki* $a \in \mathbb{R}^n$*, skup* $a^\perp$ *je potprostor od* $\mathbb{R}^n$*.*

Dokaz. Neka su $v, w \in a^\perp$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Vrijedi

$$(a|\lambda v + \mu w) = (a|\lambda v) + (a|\mu w) = \lambda(a|v) + \mu(a|w) = 0,$$

pa je $\lambda v + \mu w \in a^\perp$. □

Primjer 40. *Odredite ortogonalni komplement vektora $a = (-1, 2, 1)$ u $\mathbb{R}^3$.*
Treba odredite sve one $v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ za koje $(a|v) = 0$, to jest riješiti

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 = 0.$$

Prethodna jednadžba predstavlja ravninu kroz ishodište u $\mathbb{R}^3$. Njeno parametarsko rješenje je

$$x_1 = 2t + s,\ x_2 = t,\ x_3 = s,\ t, s \in \mathbb{R}$$

Definicija 33. ***Ortogonalni komplement skupa*** *vektora $S = \{a_1, \ldots, a_k\} \subset \mathbb{R}^n$ je skup*

$$S^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n : (a_1|v) = 0, \ldots, (a_k|v) = 0\}.$$

Slično se pokazuje da je ovako definiran ortogonalni komplement skupa $S^\perp$ isto potprostor od $\mathbb{R}^n$.

Primjer 41. *Odredite ortogonalni komplement skupa $\{(-1, 2, 1), (1, 0, -1)\}$ u $\mathbb{R}^3$.*
Iz $(a_1|v) = 0$ i $(a_2|v) = 0$ za $v = (x_1, x_2, x_3)$ dobivamo homogeni sustav

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 = 0,\ x_1 - x_3 = 0,$$

čije je rješenje

$$x_1 = t,\ x_2 = 0,\ x_3 = t,\ t \in \mathbb{R}.$$

6.3 Vektorski produkt u $\mathbb{R}^3$

U posljednja dva potpoglavlja vektore iz $\mathbb{R}^3$ ćemo označavati tradicionalno kao $\vec{v}$, $\vec{a}$, ... Vektore standardne baze označit ćemo s $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

Vektorski produkt vezan je isključivo za vektorski prostor $\mathbb{R}^3$.

Definicija 34. ***Vektorski produkt*** *ili* ***umnožak*** *vektora $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ iz $\mathbb{R}^3$ definira se kao*

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, -a_1 b_3 + a_3 b_1, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

U idućih nekoliko propozicija navodimo svojstva vektorskog produkta.

Propozicija 6.9 (Antikomutativnost)**.** *Vrijedi*

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a},$$

za sve $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$.

Dokaz. Zamjenom dvaju redaka, determinanta će promijeniti predznak. □

Propozicija 6.10. *Vrijedi da je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ ako i samo ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ linearno zavisni.*

Dokaz. Ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b} \neq \vec{0}$ linearno nezavsni onda postoji neki skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\vec{b} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$. Stoga je

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \lambda a_1 & \lambda a_2 & \lambda a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

pa je $\vec{a} \times \vec{b} = (0, 0, 0) = \vec{0}$.

Obratno, iz $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ slijedi da je $a_2 b_3 = a_3 b_2$, $a_1 b_3 = a_3 b_1$, $a_1 b_2 = a_2 b_1$. Ako pretpostavimo da je $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ dobivamo proporcionalnost koordinata $a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3$, što znači da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ linearno zavisni. Naravno, ako je jedan od vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nulvektor, onda su opet linearno zavisni. □

Propozicija 6.11. *Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ okomit je i na $\vec{a}$ i na $\vec{b}$.*

Dokaz. Treba provjeriti da je $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{a}) = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b}) = 0$. □

Propozicija 6.12. *Neka su vektori $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, te neka je φ kut među njima. Tada je*

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \sin \varphi.$$

Prema prethodnoj propoziciji vidimo da se duljina vektorskog produkta vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ može interpretirati kao *površina paralelograma* razapetog tim vektorima.

Na ovom mjestu možemo napomenuti da se geometrijska definicije vektorskog produkta bazira na propozicijama 6.11 i 6.12

6.4 Mješoviti produkt u $\mathbb{R}^3$

Kao i vektorski produkt i mješoviti produkt se veže samo uz trodimenzionalni vektorski prostor, u našem slučaju $\mathbb{R}^3$. I I u ovom dijelu ćemo vektore označavati tradicionalno s $\vec{a}$.

Definicija 35. ***Mješoviti produkt*** *ili* ***umnožak*** *vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ je*

$$m(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b} | \vec{c}).$$

Propozicija 6.13. *Neka je $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Tada je*

$$m(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Propozicija 6.14. *Mješoviti produkt $m(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$ ako i samo su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ linearno zavisni.*

Geometrijska intrepretacija mješovitog produkta jest da je apsolutna vrijednost $|m(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$ jednaka volumenu paralelepipeda razapetog s vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Propozicija 6.15. *Parnom permutacijom trojke vektora* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ *mješoviti produkt se ne mijenja, a neparnom mu se mijenja predznak. Odnosnovrijedi*

$$m(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = m(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = m(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -m(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -m(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -m(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}).$$

Dokaz. Zamjenom redaka u determinanti - mijenja se predznak. □

Korolar 6.16. *Vrijedi*

$$(\vec{a} \times \vec{b} | \vec{c}) = (\vec{a} | \vec{b} \times \vec{c}),$$

za sve $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$.