

Isingov model pomoću kompleksnih mreža



Ivo Duvnjak
Mentor: izv.prof.dr.sc. Davor Horvatić

Sadržaj

- Uvod
- Programski jezik - Julia
- Isingov model
- Kompleksne mreže
- Barabasi-Albert mreža
- Teorijski model interakcija u mrežama
- Rezultati
- Zaključak

Uvod

- Cilj rada je bio istražiti svojstva i primjenu kompleksnih mreža u opisu realnih fizikalnih sustava sa faznim prijelazima.
- Kao realni fizikalni sustav smo razmotrili Isingov model interakcije magnetskih dipolnih momenata.
- Interakcije su modelirane pomoću dvije kompleksne mreže koje se međusobno natječu.

Programski jezik - Julia

- U radu smo koristili programski jezik Julia.
- Julia je dinamički programski jezik visokih performansi za tehničko računarstvo, sa sintaksom koja je poznata korisnicima drugih tehničkih računalnih okruženja.
- Ona pruža sofisticirani prevodilac, raspoređeno paralelno izvršavanje, numeričku točnost i veliku matematičku knjižnicu funkcija.

- Julijina knjižnica funkcija, uglavnom pisana u samoj Juliji, također integrira dokazane "open source" C i Fortran knjižnice za linearnu algebru, generaciju slučajnih brojeva, obradu signala i obradu string-a.
- "Julia zajednica" pridonosi sa brojnim vanjskim paketima preko Julijina izgrađenog menadžera paketa.
- Programski jezik je relativno mlad (početak razvoja 2009. godine), i uglavnom se koristi za numeričko i znanstveno računanje.

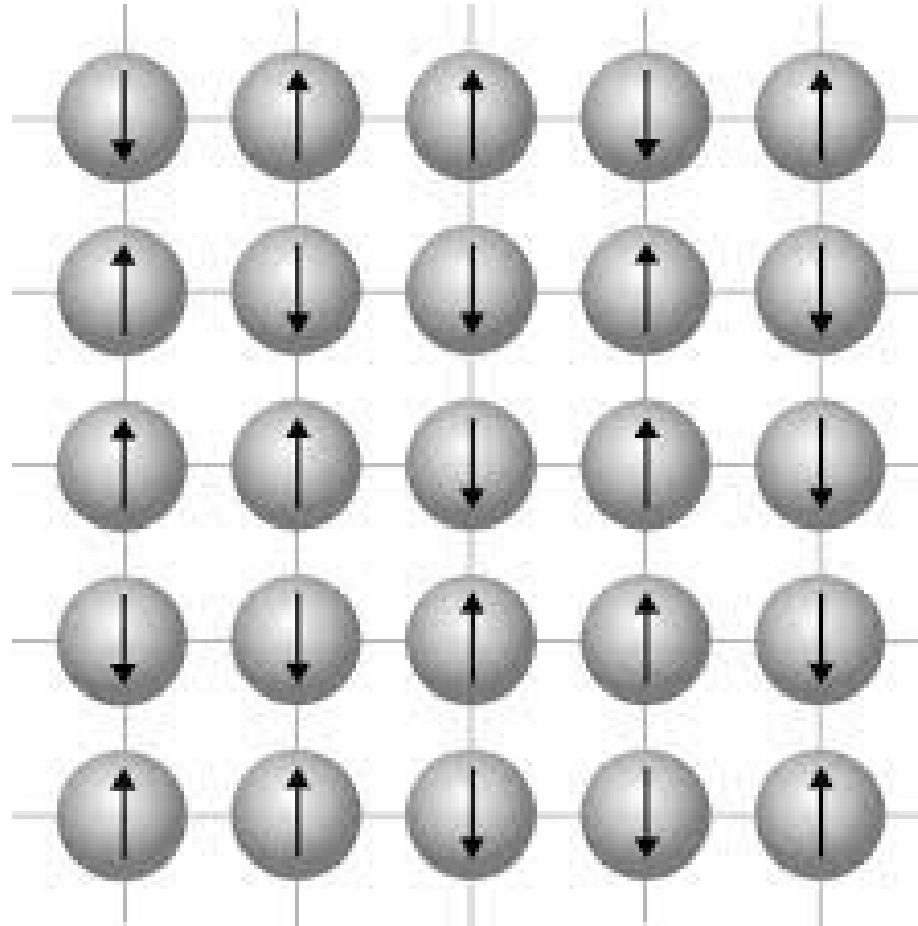
- Dobra izvedba, približava se izvedbi jezika kao što je "C".
- Korištenjem PyCall paketa možemo direktno koristiti funkcije Python programskog jezika.

	Fortran	Julia	Python	R	Matlab	Octave	Mathe- matica	JavaScript	Go	LuaJIT
	gcc 5.1.1	0.4.0	3.4.3	3.2.2	R2015b	4.0.0	10.2.0	V8 3.28.71.19	go1.5	gsl-shell 2.3.1
fib	0.70	2.11	77.76	533.52	26.89	9324.35	118.53	3.36	1.86	1.71
parse_int	5.05	1.45	17.02	45.73	802.52	9581.44	15.02	6.06	1.20	5.77
quicksort	1.31	1.15	32.89	264.54	4.92	1866.01	43.23	2.70	1.29	2.03
mandel	0.81	0.79	15.32	53.16	7.58	451.81	5.13	0.66	1.11	0.67
pi_sum	1.00	1.00	21.99	9.56	1.00	299.31	1.69	1.01	1.00	1.00
rand_mat_stat	1.45	1.66	17.93	14.56	14.52	30.93	5.95	2.30	2.96	3.27
rand_mat_mul	3.48	1.02	1.14	1.57	1.12	1.12	1.30	15.07	1.42	1.16

Slika 1. Vremena izvedbe raznih programskih jezika uspoređeno sa C programskim jezikom (C vrijeme izvedbe = 1.0)

- Prikazani testovi rade usporedbu jezika s obzirom na neke primjere koda koji su zajednički svim jezicima, kao što je pozivanje funkcija, generiranje slučajnih brojeva, numeričke petlje i operacije na redovima, string-ovima, itd..

Isingov model



- Isingov model je matematički model feromagnetizma u statističkoj fizici.
- Radi se o sustavu spinova gdje međusobno interagiraju samo prvi susjedi.
- Svaki spin može biti usmjeren samo u +z ili u -z smjeru (gore ili dolje).
- U našem pojednostavljenom slučaju isključit ćemo djelovanje vanjskog polja, pa je ukupni Hamiltonijan našeg sustava.

$$H = - \sum_{i,\delta} J_{i,i+\delta} \sigma_i \sigma_{i+\delta}$$

gdje je $J_{i,i+\delta}$ jakost interakcije susjednih spinova

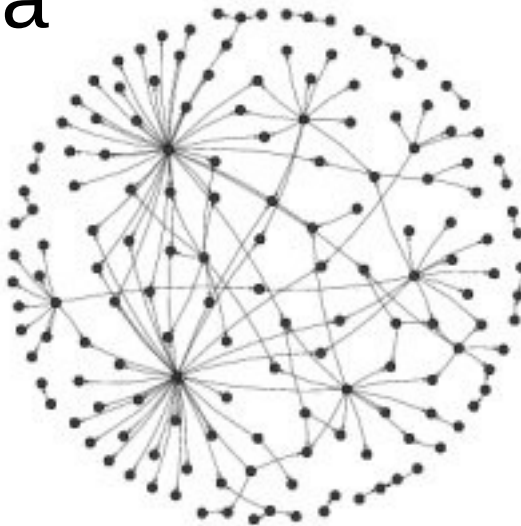
Ovisno o jakosti interakcije $J_{i,i+\delta}$ imamo tri slučaja:

- $J_{i,i+\delta} > 0$, interakcija je feromagnetska
- $J_{i,i+\delta} < 0$, interakcija je antiferomagnetska
- $J_{i,i+\delta} = 0$, spinovi ne interagiraju

U feromagnetskom Isingovu modelu susjedni spinovi žele biti istog usmjerenja, pa su i te konfiguracije vjerojatnije, dok u antiferomagnetskom Isingovu modelu susjedni spinovi žele biti suprotnog usmjerenja.

Kompleksne mreže

- Model kompleksnih mreža koristimo za proučavanje i opisivanje veza između diskretnih objekata
- Diskretni objekti su vrhovi koji skupa sa vezama čine graf sustava



Slika 2. Graf sustava sa vrhovima i vezama među njima

- Jako je pogodno za opisivanje kompleksnih sustava.
- Zbog toga smo se i odlučili za napraviti simulaciju interakcije Isingovog modela u kompleksnim mrežama.
- Prvo je potrebno generirati mrežu sa jedinstvenom konfiguracijom, kojoj ćemo zatim dodijeliti određene parametre kao što su spin i snaga interakcije.

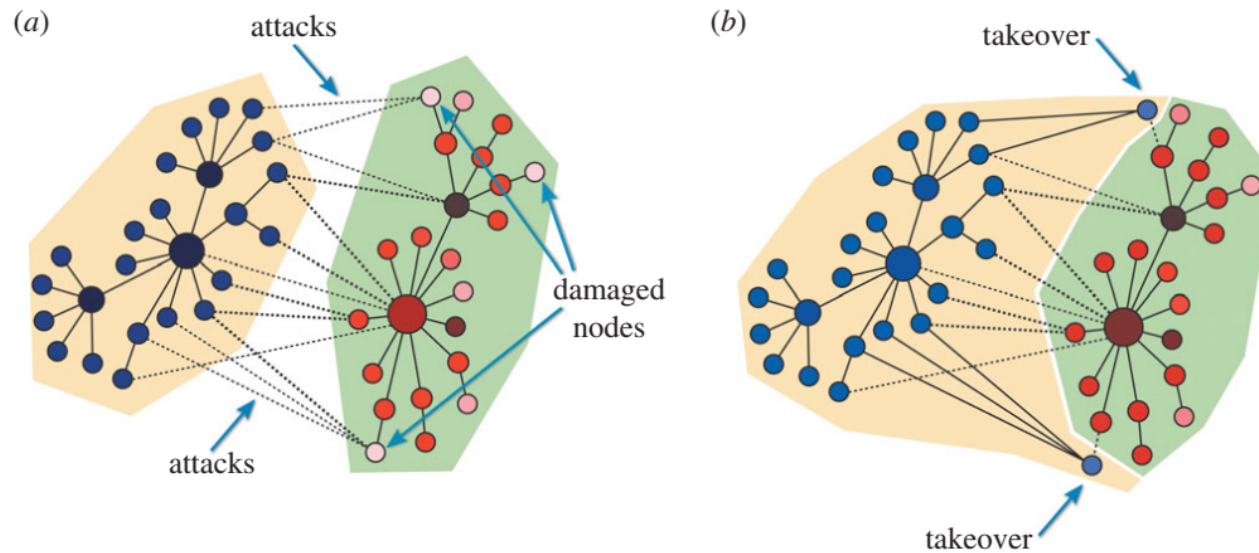
Barabasi-Albert mreža

- Koristeći pravilo preferencijalnog spajanja generiramo dvije mreže, S i W.
- U trenutku $t=0$ obe mreže imaju n_0 broj vrhova, a svaki sljedeći trenutak dodavamo novi vrh koji se spaja sa m_s vrhova u mreži S i $m_{w,s}$ vrhova u mreži W.
- Analogan postupak provodimo i za vrhove u mreži W, gdje novi vrh spajamo sa m_w vrhova u mreži W i $m_{s,w}$ vrhova u mreži S.

Teorijski model interakcija u mrežama

- Kao u mnogim primjerima stvarnih mreža, može se dogoditi da vrh zataji i izgubi vezu sa drugim vrhovima.
- To se može dogoditi zbog unutarnjih razloga sa vjerojatnosti p_1 ili zbog vanjskih utjecaja sa vjerojatnošću p_2 .
- Imamo dvije mreže koje se međusobno natječu.

- Vrh n_i zataji sa vjerojatnošću p_2 kada ukupni udio aktivnih susjednih vrhova manji od praga T , koji je jednak za sve vrhove u istoj mreži.
- Što je veća vrijednost praga T , to je mreža manje otporna.
- Pretpostavimo da je mreža S otpornija od mreže W , $T_s < T_w$.
- Za vrh koji je zatajio unutarnjim procesom u mreži S ili W uzimamo da se oporavlja od zadnjeg zatajenja nakon nekog vremena τ .



Slika 3. Na slici su prikazani procesi preuzimanja u mrežama.

a) Mreža S i mreža W imaju istu vjerojatnost p_1 za unutarnje zatajenje. Vrhovi koji su više vremena neaktivni slabije su obojani na slici (roza boja), dok su vrhovi jakih boja (tamnocrvena i tamnoplava) više vremena aktivni.

b) Ako je vrh duže vrijeme neaktivan, onda će ga preuzeti jača mreža S.

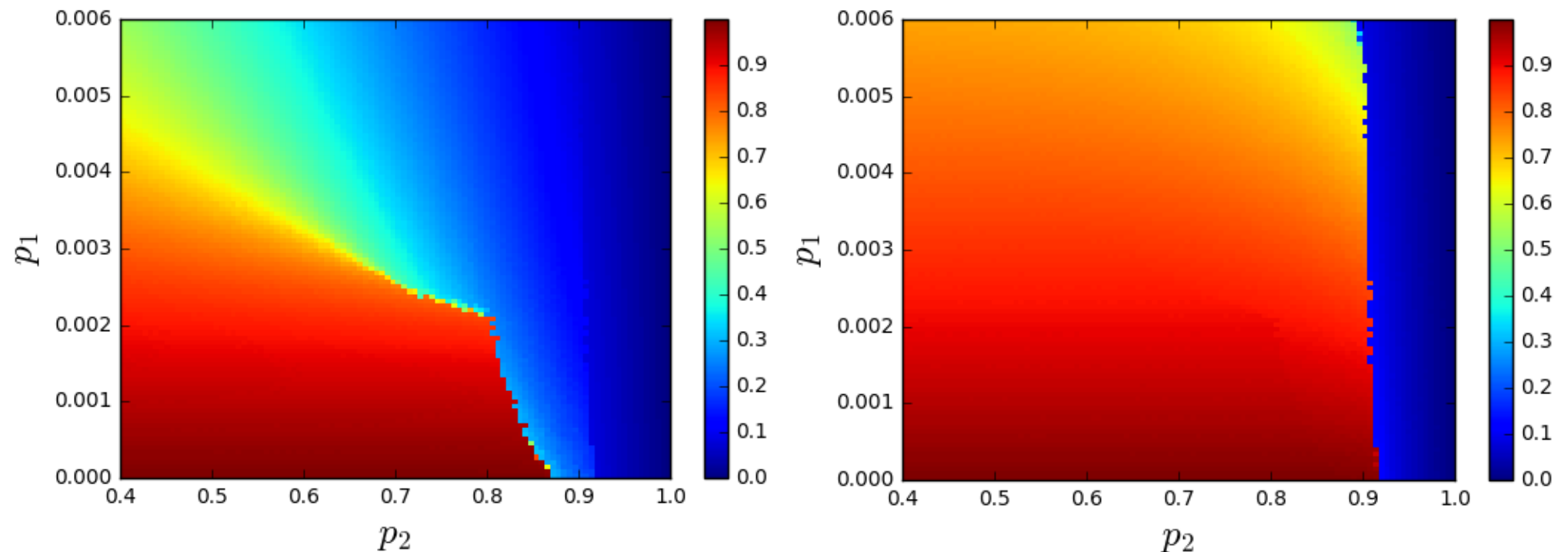
- Nakon što smo napravili model međusobnih interakcija mreža i vrhova, možemo dodijeliti svojstvo spina (+ ili -) svakom vrhu.
- Zatim ćemo promatrati koliki udio vrhova je aktivan (spin gore, +), a koliki udio neaktivan (spin dolje, -).
- Raditi ćemo simulacije za različite vjerojatnosti zatajenja p_1 ili p_2 .

Parametri numeričke simulacije

- Radimo sa 5000 vrhova u mreži W i 5000 vrhova u mreži S
- $m_s = m_w = 3$
- $m_{w,s} = m_{s,w} = 2$
- $T_s = 0.3$ i $T_w = 0.7$
- Prvo radimo simulacije u slučaju kada su svi spinovi stavljeni u stanje gore(+), a zatim kada su svi spinovi stavljeni u stanje dolje(-).

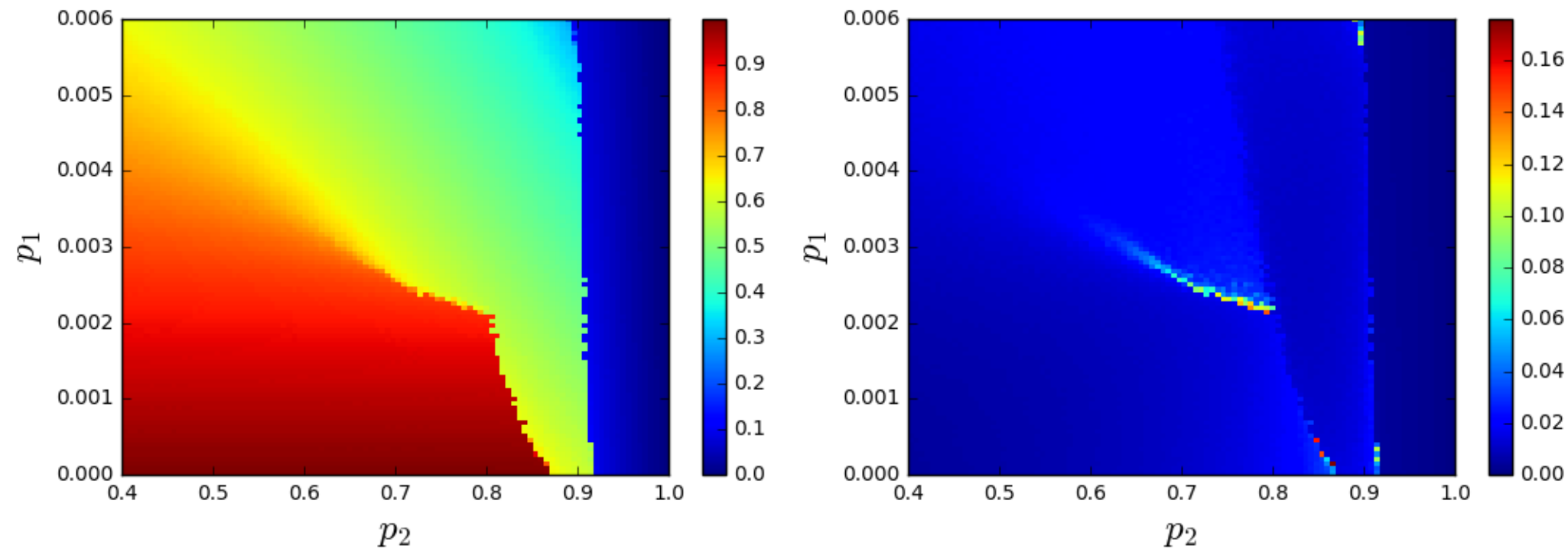
Rezultati

- Udio aktivnih vrhova (spin +), tj. neaktivnih vrhova (spin -) u mreži ćemo izraziti na slikama preko skale boje u rasponu 0 do 1.



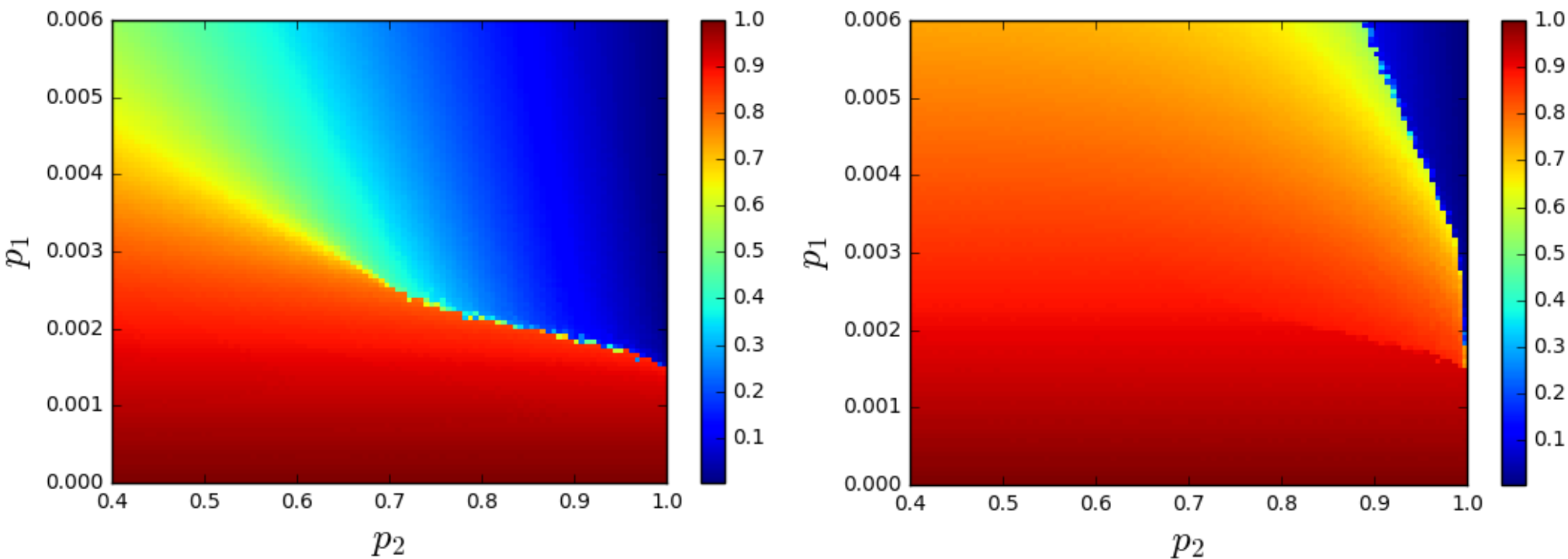
Slika 4.

Mreže W i S u slučaju kada su svi spinovi u stanju gore (-). Primjećujemo kako je mreža S puno manje podložna promjenama, dok u slaboj mreži W primjećujemo više od dvije faze. Razliku možemo pripisati različitim vrijednostima praga, $T_s < T_w$.



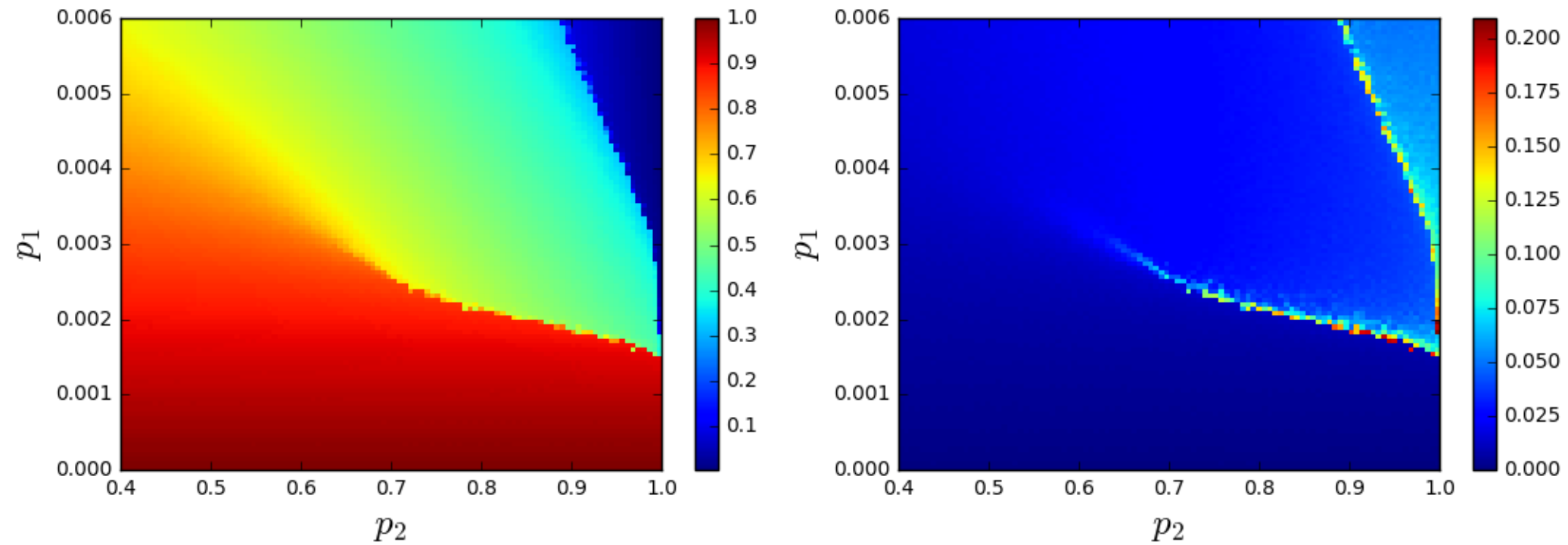
Slika 5.

Ukupni udio aktivnih vrhova i odstupanje od srednje vrijednosti u sustavu za slučaj kada su svi vrhovi u početnom trenutku u stanju (-).



Slika 6.

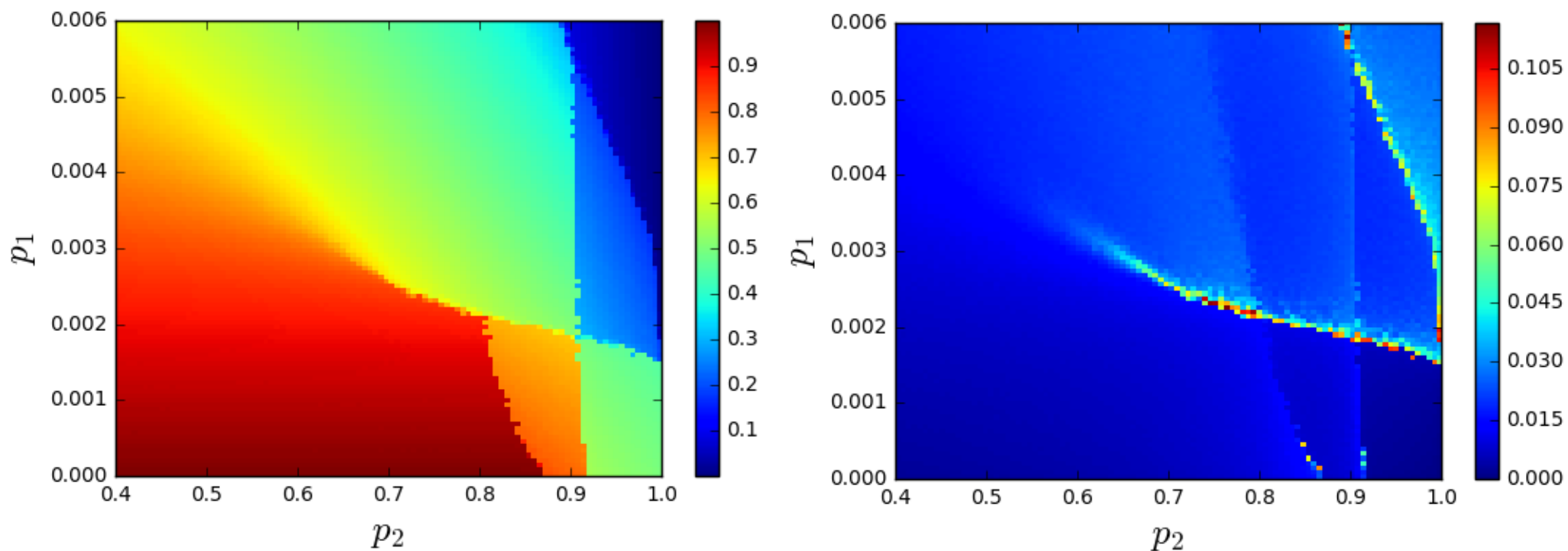
Mreže W i S u slučaju kada su svi spinovi u stanju gore (+). Primjećujemo kako je mreža S puno manje podložna promjenama od mreže W. Razliku možemo pripisati različitim vrijednostima praga, $T_s < T_w$.



Slika 7.

Ukupni udio aktivnih vrhova i odstupanje od srednje vrijednosti u sustavu za slučaj kada su svi vrhovi u početnom trenutku u stanju (+).

- Za konačni rezultat uzimamo usrednjenu vrijednost



Slika 8.

Konačni rezultat prikazuje udio aktivnih vrhova i odstupanje u dijagramu.

Zaključak

- Korištena metoda u konstruiranju interakcija dipolnih magnetskih momenata je relativno nova.
- Prednost je što je ovim načinom moguće vrlo dobro opisati mnoge kompleksne strukture.
- S obzirom da smo u radu dobili više faza, te prema odabiru parametara p_1 , p_2 i T , moguće je koristiti simulacije na realnim sustavima.

Hvala na pozornosti :)