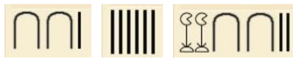
Povijest matematike

riješena pismena provjera znanja & drugi kratki test 21. lipnja 2022.

F. M. Brückler

1. ($8 \cdot 0{,}625 = 5$ bodova) Današnji datum, 21. 6. 2022., zapišite brojkama sljedeih brojevnih sustava. Neovisno o smjeru pisanja u pojedinom od njih, pišite slijeva udesno.

(a) Hijeroglifske broje:.. 

(b) Klasične babilonske brojke:.................................. 

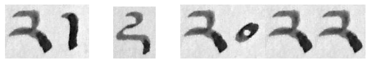
(c) Grčke akrofonske brojke:......................................ΔΔΙ Π| ΧΧΔΔΙΙ

(d) Klasične grčke alfabetske brojke:..................................$\kappa\alpha'$ ϛ′ $\beta\kappa\beta'$

(e) Rimske brojke iz doba carstva:..............................XXI VI CIƆ CIƆ XXII

(f) Kineske štapičaste brojke:...=I T ==II

(g) Istočnoarapske brojke:.............................. 

(h) Nagari-brojke iz ca. 10. st.:........................ 

2. (5 bodova) Definirajte Napierov logaritam. Ako ga označimo s NapLog, temeljem definicije izvedite njegovu modernu formulu i zatim dokažite da je $\mathrm{NapLog}(10^7\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\mathrm{NapLog}(10^7 a)$ za svaki $a > 0$.

- **Definicija Napierovog logaritma**: Dvije čestice a i g gibaju se pravocrtno i kreću u istom trenutku. Čestica a se giba jednoliko, konstatnom brzinom 10^7, a čestica g ima početnu brzinu 10^7 i u svakom trenutku t joj je brzina v_t razmjerna trenutnoj udaljenosti x_t do cilja (slika **??**). Udaljenost y_t koju je do trenutka t prešla čestica a je Napierov logaritam od x_t.

- **Izvod formule za NapLog**:

$$k\,x_t = v_t = \frac{\mathrm{d}(10^7 - x_t)}{\mathrm{d}t} = -\dot{x}_t \Rightarrow$$

$$-\dot{x} = k\,x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x} = -k\mathrm{d}t \Rightarrow \ln x = -k\,t + C_1 \Rightarrow x_t = C\,\exp(-kt).$$

Zbog $x_0 = 10^7$ dobijemo $C = 10^7$, dakle $x_t = 10^7\exp(-k\,t)$. Deriviramo li to po t, dobit ćemo $v_t = -10^7 k\exp(-k\,t)$. Zbog $v_0 = 10^7$ sad slijedi $k = 1$. Dakle, $x_t = 10^7\exp(-t)$, odnosno $t = \ln\frac{10^7}{x_t}$. S druge je strane, zbog jednolikog gibanja čestice a, $y_t = 10^7 t$. Po definiciji je

$$\mathrm{NapLog}(x) = y = 10^7 t = 10^7 \ln\frac{10^7}{x}.$$

- **Dokaz za NapLog**$(10^7\sqrt{a}) = \frac{1}{2}$**NapLog**$(10^7 a)$:

$$\mathrm{NapLog}(10^7\sqrt{a}) = 10^7 \ln \frac{10^7}{10^7\sqrt{a}} = -10^7 \ln \sqrt{a} = -\frac{10^7}{2} \ln a = \frac{10^7}{2} \ln \frac{10^7}{10^7 a} = \frac{1}{2}\mathrm{NapLog}(10^7 a).$$

Drugi kratki test

Zaokružite istinite rečenice.

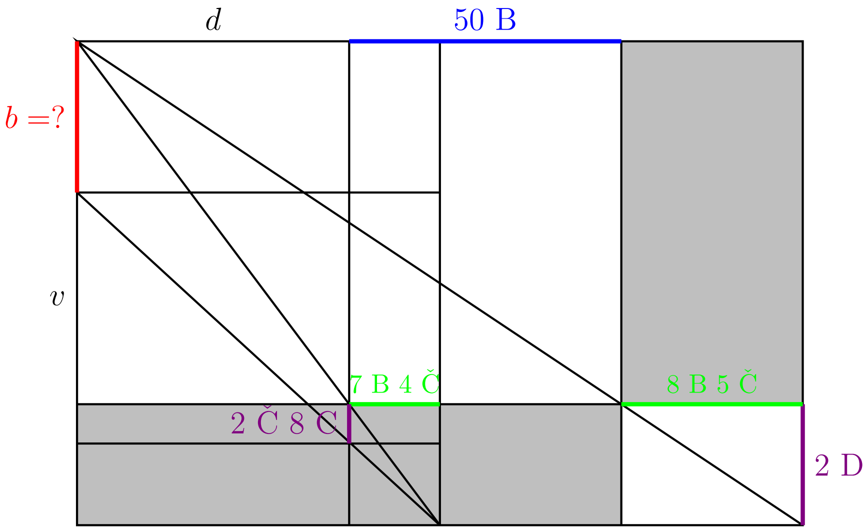
1. $\boxed{\text{Rješenje jednadžbi četvrtog stupnja u radikalima otkrio je Lodovico Ferrari.}}$
2. $\boxed{\text{Izraz 'koeficijent' u modernom smislu uveo je François Viète.}}$
3. $\boxed{\text{Fermat je svoj 'veliki teorem' zapisao na marginama jedne kopije Diofantove \textit{Aritmetike}.}}$
4. Prvu objavljenu knjigu o vjerojatnosti napisao je Blaise Pascal.
5. $\boxed{\text{René Descartes je tangente na krivulje određivao kao tangente na oskulacijske kružnice.}}$
6. Leibnizov red je red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
7. $\boxed{\text{Varijacijski račun utemeljio je Jacob Bernoulli.}}$
8. $\boxed{\text{Prvi koji je ustvrdio da je postulat o paralelama možda stvarno postulat, a ne dokaziv}}$ $\boxed{\text{teorem, bio je Georg Klügel.}}$
9. Niels Henrik Abel je dokazao da se nijedna jednadžba petog stupnja ne može riješiti u radikalima.
10. Hipoteza kontinuuma je tvrdnja da realnih brojeva ima neprebrojivo mnogo.

1. (5 bodova) Drugi zadatak u Liu Huijevom *Matematičkom priručniku o jednom otoku u moru* glasi ovako:

„I sad gledamo bor nepoznate visine koji raste na brijegu. Zabijemo dva štapa iste visine od 2 džang u zemlju, razmak između štapova je 50 bu. Pretpostavimo da su prednji i stražnji štap poravnani s borom.[1] Ako se odmaknemo 7 bu i 4 či iza prednjeg štapa i s tla gledamo vrh bora, vidi se da se vrh štapa poklopi s vrhom bora. Ako s iste pozicije gledamo dno bora, linija pogleda presječi će štap na 2 či 8 cun ispod vrha štapa. Ako se pak odmaknemo 8 bu 5 či od stražnjeg štapa i s tla gledamo vrh bora s tla, opet će se poravnati vrh (tog) štapa i vrh bora. Koliko je visok bor i koliko je daleko brijeg od bližeg štapa?"

Znaju'ci da je 9 džang = 15 bu= 90 či = 900 cun, izračunajte i u istim jedinicama izrazite visinu bora. Priznaju se samo rješenja koja su postavljena Liu Huijevom metodom opisanom na predavanjima (ali naravno, smijete koristiti modernu algebarsku simboliku i računati na moderni način).

Uvedimo pokrate D za džang, B za bu, Č za či i C za cun. Zadatku odgovara dijagram:



Preračunajmo sve mjere u najmanju, cun (C): 2 D = 200 C, 2 Č 8 C = 28 C, 1 B = $\frac{900}{15}$ C = 60 C, dakle je 50 B = 3000 C, 7 B 4 Č = 460 C i 8 B 5 Č = 530 C. Liu Huijeva metoda je izjednadčavanje površina pravokutnika ispod i iznad dijagonale pravokutnika (poput sivo istaknutih), konkretno možemo izjednačiti površine sivo istaknutih pravokutnika te još dva para:

$$(v + b) \cdot 530\,\mathrm{C} = (d + 3000\,\mathrm{C}) \cdot 200\,\mathrm{C},$$

$$(v + b) \cdot 460\,\mathrm{C} = d \cdot 200\,\mathrm{C},$$

$$(v + 28\,\mathrm{C}) \cdot 460\,\mathrm{C} = d \cdot (200\,\mathrm{C} - 28\,\mathrm{C}) = d \cdot 172\,\mathrm{C}.$$

Ovo je sustav linearnih jednadžbi za b, v i d, kojeg možemo riješiti bilo kojom metodom, pri čemu nam treba samo iznos b. Dobije se b = 1228 C = 12 džang 2 či 8 cun.

[1] Misli se: U istoj su ravnini.

2. (5 bodova) Na Eulerov način izvedite formule za $\mathrm{d}(x^2)$ i za $\mathrm{d}(\cos x)$.

- Po definiciji diferencijala funkcije je

$$\mathrm{d}(x^2) = (x + \mathrm{d}x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\,\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)^2 - x^2 = 2x\,\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)^2 = 2x\,\mathrm{d}x,$$

  gdje je u posljednjem koraku $(\mathrm{d}x)^2$ zanemaren jer iz Eulerove definicije diferencijala kao 'zapravo nule' iz

$$\frac{\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)^2}{\mathrm{d}x} = 1 + \mathrm{d}x = 1,$$

  slijedi

$$\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)^2 = \mathrm{d}x.$$

- Po definiciji diferencijala funkcije

$$\mathrm{d}(\cos x) = \cos(x + \mathrm{d}x) - \cos x$$

  Po adicijskoj formuli za kosinus to je dalje jednako

$$\cos x \cdot \cos(\mathrm{d}x) - \sin x \cdot \sin(\mathrm{d}x) - \cos x.$$

  Budući da je $\mathrm{d}x$ 'u biti nula', imamo $\cos(\mathrm{d}x) = 1$ i $\sin(\mathrm{d}x) = \mathrm{d}x$ pa preostaje da je

$$\mathrm{d}(\cos x) = \cos x - \sin x \cdot \mathrm{d}x - \cos x = -\sin x\mathrm{d}x.$$

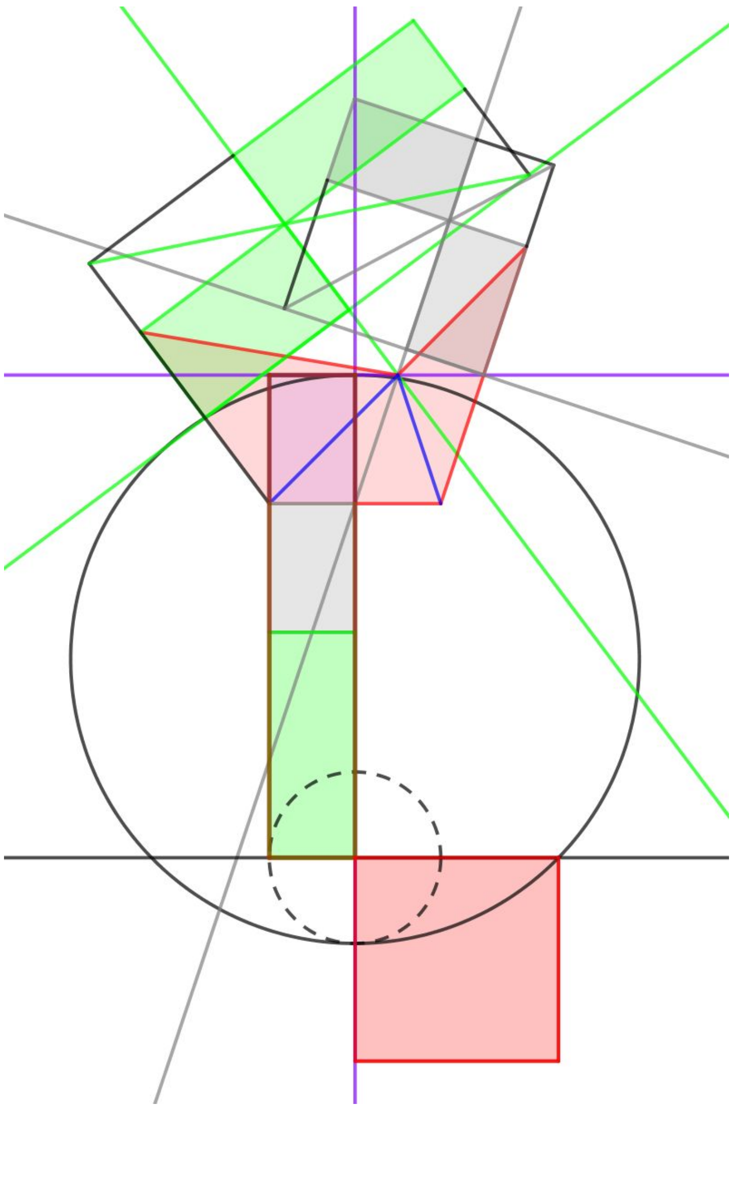
Drugi kratki test

Zaokružite redne brojeve ispred istinitih rečenica.

1. Prvo objašnjenje pravila linearne perspektive dao je Albrecht Dürer.
2. Prvi europski opis decimalnih razlomaka dao je Simon Stevin.
3. Prvu tablicu dekadskih logaritama izradio je Joost Bürgi.
4. Projektivna geometrija je utemeljena gotovo istovremeno kao analitička geometrija.
5. Torricellijeva truba je primjer neograničenog tijela konačnog volumena.
6. Binarni brojevni sustav prvi je opisao Gottfried Wilhelm Leibniz.
7. Jacob Bernoulli je dokazao da će se za jako veliki broj Bernoullijevih pokusa uspjeh sigurno dogoditi.
8. Josip Ruđer Bošković predložio je da se krivulja koja najbolje opisuje izmjerene podatke dobije minimizacijom zbroja kvadrata vertikalnih odstupanja.
9. Janós Bolyai je prvi dokazao da postoje neeuklidske geometrije.
10. Izraz 'statistika' u suvremenom smislu prvi je koristio Siméon-Denis Poisson.

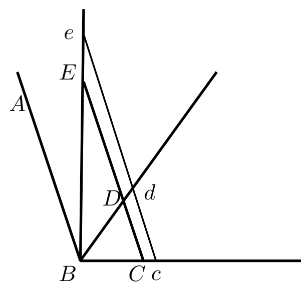
1. (5 bodova) Na euklidski način kvadrirajte peterokut na slici. Konstrukcije ne morate izvoditi, ali moraju biti izvedive ravnalom i šestarom. Obavezno jasno navedite korake.

Prvo lik (sad istaknut crveno) razdijelimo na trokute (plave linije). Zatim svaki trokut koristeći EEI42 pretvorimo u pravokutnik iste površine (zeleno, ljubičasto i sivo). Jedan od njih fiksiramo (recimo ljubičasti), a druga dva (zeleni i sivi) koristeći EEI44 pretvorimo u pravokutnike njima jednakih površina, ali koji u odnosu na taj fiksirani imaju jednu (primjerice, donju, tj. kraću) stranicu a iste duljine. Naposlijetku fiksiranom pravokutniku (ljubičastom) produljimo one druge (dulje) stranice i na njih nanesemo stranice različite od a sivog i zelenog pravokutnika iz prethodnog koraka te tako „zalijepimo' sva tri pravokutnika duž stranica duljina a. Crveno uokvireni pravokutnik ima istu površinu kao polazni peterokut. Njega naposlijetku kvadriramo pomoću EEII4 i dobijemo crveni kvadrat povrine jednake polaznom peterokutu.



2. (5 bodova) Opišite Boškovićev paradoks. Kako suvremeno argumentiramo da dobiveni rezultat nije paradoksalan?

Promotrimo kut $\angle CBA$ sa simetralom BD. Ako jedan od tako dobivenih dijelova ravnine (dvaju polovina kuta $\angle CBA$) ima beskonačnu površinu, očigledno isto vrijedi i za drugi.



Kroz C na jednom kraku povucimo paralelu s drugim krakom i neka ona simetralu siječe u D. Na CD nađemo točku E koja je od D dvaput više udaljena nego C od D. Zatim povlačimo paralele cde s CDE i tako dijelimo kut CBE na pruge. Zbog odabira E je $\triangle dBe$ dvaput veće površine nego $\triangle cBd$. Stoga je četverokut $dDEe$ dvaput veće površine nego $cCDd$. To vrijedi za svaki odabir pravca cde, pa Bošković zaključuje da dio ravnine unutar kuta $\angle CBD$ ima upola manju površinu nego dio ravnine unutar kuta $\angle DBE$, koji je očito manji od onog unutar $\angle DBA$, koji je pak jednak $\angle CBD$. Stoga Bošković zaključuje da je beskonačnost (ovdje: beskonačna površina) nemoguća.

Danas je taj paradoks lako razrješiv jer (Bolzano, Cantor) je za beskonačne skupove karakteristično da su ekvipotentni nekom svom pravom podskupu.

Drugi kratki test

1. Galileo Galilei je prvi predložio aritmetičku sredinu kao najverojatniji točan rezultat mjerene veličine.
2. Keplerov problem bačve sastoji se u izračunu iznosa volumena bačve.
3. Simbole $<$ i $>$ uveo je Robert Recorde.
4. Descartesovo pravilo primijenjeno na jednadžbu $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ rezultira zaključkom da ta jednadžba ima 1, 2 ili 3 realna rješenja.
5. $\boxed{\text{Simbol } \infty \text{ uveo je John Wallis.}}$
6. $\boxed{\text{Newtonov diferencijalni račun poznat je pod nazivom metoda fluksija.}}$
7. Leonhard Euler rođen je u 17. stoljeću.
8. Prva osoba koja spominje derivacije bio je Brook Taylor.
9. Prvi dokaz transcendentnosti broja π dao je Adrien-Marie Legendre.
10. Izraz „lako se vidi" rado je koristio Augustin Louis Cauchy.