# Povijest matematike

## Matematika u Europi u doba visoke i kasne renesanse

Franka Miriam Brückler

9. svibnja 2022.

## Renesansna algebra

Talijanski matematičari 16. stoljeća bavili su se problemom rješivosti u radikalima kubnih jednadžbi bez kvadratnog člana:

$$x^3 + bx = c,$$
$$x^3 = bx + c,$$
$$x^3 + c = bx.$$

Naime, supstitucijom $y = x+$trećina koeficijenta uz kvadratni član se svaka normirana kubna jednadžba svodi na takvu:

**Primjer**

$$x^3 + 3x^2 = 12x + 18 : \quad (x = y - 1) \Rightarrow y^3 = 15y + 4$$

# Scipione del Ferro (1463.?–1526.)

Oko 1515. našao je algebarsku metodu za rješavanje kubnih jednadžbi tipa $x^3 + bx = c$.
Pred smrt je svoju metodu priopćio svom studentu Antoniu Fioru, a njegove je bilješke naslijedio zet mu Hanninal Nave.

# Niccolò Fontana Tartaglia (1500.?–1557.)

1530-ih godina je Tartaglia otkrio metodu za rješavanje kubne jednadžbe oblika $x^3 + px^2 = q^3$ i svoje otkriće nije tajio. Fior, uvjeren da samo on zna riješiti tip $x^3 + bx = c$, izazvao je Tartagliu na javno natjecanje (1535.).

**Primjer**

*Primjer Fiorovog zadatka: Nađi mi broj koji zbrojen sa svojim kubom daje 6 ($x^3 + x = 6$).*

## Girolamo Cardano (1501.–1576.)

Milanski liječnik i matematičar. Paralelno sa svojom liječničkom praksom bavio se matematikom, ali i kockanjem i astrologijom.

## Girolamo Cardano (1501.–1576.)

Milanski liječnik i matematičar. Paralelno sa svojom liječničkom praksom bavio se matematikom, ali i kockanjem i astrologijom. *Ars Magna* (1545.); *Liber de Ludo Aleae* (objavljeno tek 1663.)

## Girolamo Cardano (1501.–1576.)

Milanski liječnik i matematičar. Paralelno sa svojom liječničkom praksom bavio se matematikom, ali i kockanjem i astrologijom. *Ars Magna* (1545.); *Liber de Ludo Aleae* (objavljeno tek 1663.) U doba Tartagliaine pobjede Cardano se upravo spremao objaviti djelo *Practica arithmeticae*. Cardano je pozvao Tartagliau u Milano da ga pokuša nagovoriti da mu oda svoju metodu.

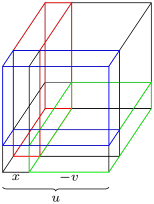
# Girolamo Cardano (1501.–1576.)

Milanski liječnik i matematičar. Paralelno sa svojom liječničkom praksom bavio se matematikom, ali i kockanjem i astrologijom.
*Ars Magna* (1545.); *Liber de Ludo Aleae* (objavljeno tek 1663.)
U doba Tartagliaine pobjede Cardano se upravo spremao objaviti djelo *Practica arithmeticae*. Cardano je pozvao Tartagliau u Milano da ga pokuša nagovoriti da mu oda svoju metodu. Cardano je zakletvu prekršio objavom djela *Ars Magna* (1545.), u kojem navodi Tartagliau kao autora metode, a uz nju objavljuje i svoje proširenje metode te rezultate svog studenta Ferrarija o rješenju jednadžbe četvrtog stupnja.

# Rješenje reducirane kubne jednadžbe $x^3 + bx + c = 0$

1. Nepoznanicu zapiši kao $u + v$ i sredi jednadžbu na oblik $u^3 + v^3 + (3uv + b)(u + v) + c = 0$.
2. Dodaj uvjet $3uv = -b$ i kubiraj.
3. Riješi sustav za $u^3$, $v^3$ koji se supstitucijom svodi na kvadratnu jednadžbu.

Diskriminanta te kvadratne jednadžbe zove se diskriminantom kubne jednadžbe. Ako je ona 0, sva rješenja su realna (i jedno je bar dvostruko), ako je pozitivna, samo jedno rješenje je realno, a ako je negativna $u$ i $v$ su kompleksni, no kubna jednadžba ima tri različita realna rješenja.



## Primjer: $x^3 = 15x + 4$

$$u^3 + v^3 = 4, \quad u^3 v^3 = \left(\frac{15}{3}\right)^3 = 125 \Rightarrow$$

$$u^6 - 4u^3 + 125 = 0,$$

$$(u^3 - 2)^2 + 121 = 0,$$

$$u^3 - 2 = \pm\sqrt{-121}$$

(!!!!! prva pojava kompleksnih brojeva u povijesti !!!!!). Kako je Cardano znao da $x^3 = 15x + 4$ ima rješenje $x = 4$, zapisao je $u^3 = 2 + \sqrt{-121}$ i iz toga izračunao $v^3 = 4 - u^3 = 2 - \sqrt{-121}$ i stoga

$$x = u + v = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Ali, $x = 4$?! To je kasnije pokazao Rafael Bombelli.

# Lodovico Ferrari (1522.–1565.)

**Primjer**

*Riješimo*

$$x^4 + 4x^3 - 17x^2 - 24x + 36 = 0.$$

*Ferrarijevom metodom.*

- Supstitucija $x = y - 1$ ($x$ je $y$ minus $\frac{1}{4}$ koeficijenta uz $x^3$) eliminira kvadratni član, a ostatak jednadžbe pišemo tako da lijevo ostanu članovi 2. i 4. stupnja: $y^4 - 23y^2 = -18y - 40$.
- Svodimo lijevu stranu na potpun kvadrat: Pribrojimo $\frac{23^2}{4}$ i dobijemo $4\left(y^2 - \frac{23}{2}\right)^2 = \frac{369}{4} - 18y$.
- Uvodimo dodatnu nepoznanicu $t$ pribrajanjem $t^2 + 2t(y^2 - 23/2)$ (dakle, $t^2 + 2t\left(x^2 + A\right)$, gdje je lijeva strana prethodne jednadžbe $(y^2 + A)^2$):

- $\left(y^2 - \frac{23}{2} + t\right)^2 = 2ty^2 - 18y + t^2 - 23t + \frac{369}{4}$.
- Biramo jedan $t$ za koji je diskriminanta desne strane s obzirom na $x$ jednaka 0, npr. $t = \frac{1}{2}$.
- Onda preostaje $\left(y^2 - 11\right)^2 = y^2 - 18y + 81 = (y - 9)^2$.
- $y^2 - 11 = \pm(y - 9) \Rightarrow y_{1,2,3,4} = -5; -1; 2, 4 \Rightarrow x_{1,2,3,4} = -6; -2; 1, 3$.

**Napomena**

*U to doba još ne postoji svijest o vezi broja rješenja i stupnja jednadžbe. O tom potom.*

# Rafael Bombelli (1526.–1572.)

Njegova *Algebra* (1572.) daje potpun prikaz tada poznate algebre, uključivši pravila aritmetike s pozitivnim i negativnim brojevima, dokaz da je problem trisekcije kuta ekvivalentan rješavanju kubne jednadžbe te detaljnu diskusiju kompleksnih brojeva.

# Rafael Bombelli (1526.–1572.)

Njegova *Algebra* (1572.) daje potpun prikaz tada poznate algebre, uključivši pravila aritmetike s pozitivnim i negativnim brojevima, dokaz da je problem trisekcije kuta ekvivalentan rješavanju kubne jednadžbe te detaljnu diskusiju kompleksnih brojeva.

## Primjer

*Bombelli je prvi pokazao da je* $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ *jednako* 4. *Uočio je prvo da, ako to uopće jest smisleno, onda je* $\sqrt[3]{2\pm\sqrt{-121}} = a \pm b\sqrt{-1}$.

# Rafael Bombelli (1526.–1572.)

Njegova *Algebra* (1572.) daje potpun prikaz tada poznate algebre, uključivši pravila aritmetike s pozitivnim i negativnim brojevima, dokaz da je problem trisekcije kuta ekvivalentan rješavanju kubne jednadžbe te detaljnu diskusiju kompleksnih brojeva.

## Primjer

*Bombelli je prvi pokazao da je* $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ *jednako* 4. *Uočio je prvo da, ako to uopće jest smisleno, onda je* $\sqrt[3]{2\pm\sqrt{-121}}=a\pm b\sqrt{-1}$.

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=a+b\sqrt{-1}\Rightarrow 2+\sqrt{-121}=$$

$$=a(a^2-3b^2)+b(3a^2-b^2)\sqrt{-1}\Rightarrow 2=a(a^2-3b^2),11=b(3a^2-b^2).$$

# Rafael Bombelli (1526.–1572.)

Njegova *Algebra* (1572.) daje potpun prikaz tada poznate algebre, uključivši pravila aritmetike s pozitivnim i negativnim brojevima, dokaz da je problem trisekcije kuta ekvivalentan rješavanju kubne jednadžbe te detaljnu diskusiju kompleksnih brojeva.

## Primjer

*Bombelli je prvi pokazao da je* $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ *jednako* 4*. Uočio je prvo da, ako to uopće jest smisleno, onda je* $\sqrt[3]{2\pm\sqrt{-121}}=a\pm b\sqrt{-1}$*.*

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=a+b\sqrt{-1}\Rightarrow 2+\sqrt{-121}=$$

$$=a(a^2-3b^2)+b(3a^2-b^2)\sqrt{-1}\Rightarrow 2=a(a^2-3b^2),11=b(3a^2-b^2).$$

*Za* $a=2$ *i* $b=1$ *OK, dakle*
$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=2+\sqrt{-1}=2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}=4.$

Bombelli je prvi u povijesti kao smislene prihvatio kompleksne brojeve. Opisao je i pravila računa s njima. Bombelli imaginarne brojeve zapisuje kao kvadratne korijene negativnih brojeva te daje pravila za njihovo zbrajanje, oduzimanje i množenje, npr. „plus od minusa puta plus od minusa je minus" $(+\sqrt{-n}\cdot+\sqrt{-n}=-n)$.

Bombelli je prvi u povijesti kao smislene prihvatio kompleksne brojeve. Opisao je i pravila računa s njima. Bombelli imaginarne brojeve zapisuje kao kvadratne korijene negativnih brojeva te daje pravila za njihovo zbrajanje, oduzimanje i množenje, npr. „plus od minusa puta plus od minusa je minus" $(+\sqrt{-n} \cdot +\sqrt{-n} = -n)$. Bombelli je koristio vlastitu sustavnu algebarsku notaciju:

- *p.* za zbrajanje, *m.* za oduzimanje, izraz *eguale à* za jednakost;
- L i zrcalno L u funkciji zagrada za izraze koji se korjenuju, R s prekriženom nogicom za korjenovanje (Rq i Rc ako želi naglasiti drugi i treći korijen);
- za monome koeficijent piše ispod $\smile$, a potenciju nepoznanice iznad

Kako bi Bombelli zapisao $4 + \sqrt{24 - 20x^2}$?

Bombelli je prvi u povijesti kao smislene prihvatio kompleksne brojeve. Opisao je i pravila računa s njima. Bombelli imaginarne brojeve zapisuje kao kvadratne korijene negativnih brojeva te daje pravila za njihovo zbrajanje, oduzimanje i množenje, npr. „plus od minusa puta plus od minusa je minus" $(+\sqrt{-n} \cdot +\sqrt{-n} = -n)$. Bombelli je koristio vlastitu sustavnu algebarsku notaciju:

- *p.* za zbrajanje, *m.* za oduzimanje, izraz *eguale à* za jednakost;
- L i zrcalno L u funkciji zagrada za izraze koji se korjenuju, R s prekriženom nogicom za korjenovanje (Rq i Rc ako želi naglasiti drugi i treći korijen);
- za monome koeficijent piše ispod $\smile$, a potenciju nepoznanice iznad

Kako bi Bombelli zapisao $4 + \sqrt{24 - 20x^2}$?Dokazao je i da ireducibilni slučaj kubne jednadžbe ima tri realna rješenja.

Bombelli je prvi u povijesti kao smislene prihvatio kompleksne brojeve. Opisao je i pravila računa s njima. Bombelli imaginarne brojeve zapisuje kao kvadratne korijene negativnih brojeva te daje pravila za njihovo zbrajanje, oduzimanje i množenje, npr. „plus od minusa puta plus od minusa je minus" $(+\sqrt{-n} \cdot +\sqrt{-n} = -n)$.
Bombelli je koristio vlastitu sustavnu algebarsku notaciju:

- *p.* za zbrajanje, *m.* za oduzimanje, izraz *eguale à* za jednakost;
- L i zrcalno L u funkciji zagrada za izraze koji se korjenuju, R s prekriženom nogicom za korjenovanje (Rq i Rc ako želi naglasiti drugi i treći korijen);
- za monome koeficijent piše ispod $\smile$, a potenciju nepoznanice iznad

Kako bi Bombelli zapisao $4 + \sqrt{24 - 20x^2}$?Dokazao je i da ireducibilni slučaj kubne jednadžbe ima tri realna rješenja.Kod Bombellija se može naći i geometrijska definicija realnih brojeva: Ako se odabere jedinična duljina, onda se brojevi mogu predstaviti kao duljine.

## Galileo Galilei (1564.–1642.)

- prva eksplicitna pjava beskonačnih skupova: prirodnih brojeva ima jednako mnogo kao njihovih kvadrata

# Galileo Galilei (1564.–1642.)

- prva eksplicitna pjava beskonačnih skupova: prirodnih brojeva ima jednako mnogo kao njihovih kvadrata
- objasnio je zašto pri bacanju tri kockice nisu svi zbrojevi jednako vjerojatni (usp. Cardano *Liber de Ludo Aleae*)

## Galileo Galilei (1564.–1642.)

- prva eksplicitna pjava beskonačnih skupova: prirodnih brojeva ima jednako mnogo kao njihovih kvadrata
- objasnio je zašto pri bacanju tri kockice nisu svi zbrojevi jednako vjerojatni (usp. Cardano *Liber de Ludo Aleae*)
- *Dialogo opra i due Massimi Sistemi del Mondo Tolemaico e Copernicano* (1632.) — postavio je temelje računa pogreške:
  - Samo je jedna točna vrijednost fizikalne veličine (npr. udaljenost središta Zemlje do neke zvijezde).
  - Mjerenja nose grešku uslijed nesavršenosti promatrača i mjernog instrumenta.
  - Greške se raspoređuju simetrično s obzirom na 0.
  - Manje greške su vjerojatnije od velikih.

# Johannes Kepler (1571.–1630.)

Kepler je među velikim renesansnim astronomima najviše matematičar.

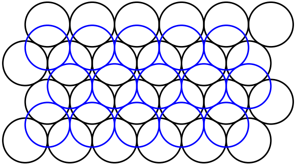
Keplerov prvi model Sunčevog sustava (*Mysterium cosmographicum*, 1596.).

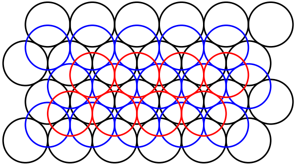
1599. je postao asistent danskog astronoma Tycho Brahea (1546.–1601.) u Pragu. Koristeći Braheove podatke, Kepler je formulirao svoja tri znamenita zakona gibanja planeta (1609. odnosno 1619.).

1. Planeti se oko Sunca kreću po elipsama, u čijem jednom žarištu je Sunce.
2. Radij-vektori planeta (spojnice planeta sa Suncem) u jednakim vremenskim razmacima prelaze jednake površine.
3. Kvadrat godine (vremena obilaska) planeta je razmjeran kubu velike osi pripadne orbite.

Kepler se bavio i poliedrima. Prvi im je pristupio sustavno i ponovno je otkrio Arhimedova tijela. Otkrio je novu klasu poliedara (antiprizme) i neke nove poliedre (rompski dodekaedar i rompski triakontaedar). Prvi se bavio i zvjezdastim poliedrima.


Keplerova hipoteza, 1611.:

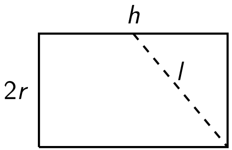




Renesansa je ponovno otkrila antiku, pa tako i metodu ekshaustije. Johannes Kepler (1571–1630) je objavio *Nova stereometria doliorum vinariourum* (1615.), u kojoj opisuje određivanje volumena preko 90 rotacijskih tijela. Račun mu je manje precizan od Arhimedovog, ali sličniji modernom: rotacijska je tijela dijelio u paralelne infinitezimalno tanke valjkaste slojeve.

### Keplerov problem bačve

Ako bačvu vina aproksimativno smatramo valjkom, za koji promjer i koju visinu (duljinu) će „mjerenje volumena" štapom poznate fiksne duljine rezultirati maksimalnim volumenom?




Kepler je rješenje $h : d = \sqrt{2}$ dobio uspoređivanjem vrijednosti za različite $V$, no važnije je da je uočio da vrijedi:
Ako su mjere bačve bliske „optimumu”, male promjene mjera bačve rezultiraju u puno manjim promjenama volumena nego kod mjera koje su dalje od optimalnih.

## Simon Stevin (1548.–1620.)

Stevin je objavio nekoliko značajnih fizikalnih djela. Osobito je važno njegovo djelo *De Beghinselen der Weegconst* iz 1586. u kojem se bavi tzv. paralelogramom sila (što možemo smatrati početkom vektorskog računa), pitanjima ravnoteže i tlakom. Stevin tim i još nekim djelima ostvaruje prvi napredak na području statike i hidrostatike nakon Arhimeda.

# Simon Stevin (1548.–1620.)

Stevin je objavio nekoliko značajnih fizikalnih djela. Osobito je važno njegovo djelo *De Beghinselen der Weegconst* iz 1586. u kojem se bavi tzv. paralelogramom sila (što možemo smatrati početkom vektorskog računa), pitanjima ravnoteže i tlakom. Stevin tim i još nekim djelima ostvaruje prvi napredak na području statike i hidrostatike nakon Arhimeda.

Za matematiku je osobito značajna njegova knjižica *De Thiende* (*Desetina*) iz 1585. u kojoj daje prvo europsko izlaganje teorije decimalnih razlomaka i decimalnog mjernog sustava. No, trebat će još ca. 200 godina dok decimalni brojevi budu u široj uporabi.

**Primjer**

*Naš* 27,847 *kod Stevina izgleda: 27 ⓪ 8 ① 4 ② 7 ③.*

# Još malo o simbolici

Današnji znak za kvadratni korijen je vjerojatno pokrata od r, a prvi put se javlja 1525. u prvoj njemačkoj knjizi o algebri *Die Coss* poljskog Nijemca Christoffa Rudolffa (1499.–1545.), po kojoj se njemački renesansni algebraičari nazivaju kosistima.

## Još malo o simbolici

Današnji znak za kvadratni korijen je vjerojatno pokrata od r, a prvi put se javlja 1525. u prvoj njemačkoj knjizi o algebri *Die Coss* poljskog Nijemca Christoffa Rudolffa (1499.–1545.), po kojoj se njemački renesansni algebraičari nazivaju kosistima. François Viète je prvi predložio korištenje slova za konstante i nepoznanice (suglasnike za konstante, samoglasnike za nepoznanice). Osnovne četiri operacije označavao je s $+$, $-$, *in*, razlomačkom crtom, a jednakost s *aequibitur* (u*In artem analyticem isagoge*, 1591.).

# Još malo o simbolici

Današnji znak za kvadratni korijen je vjerojatno pokrata od r, a prvi put se javlja 1525. u prvoj njemačkoj knjizi o algebri *Die Coss* poljskog Nijemca Christoffa Rudolffa (1499.–1545.), po kojoj se njemački renesansni algebraičari nazivaju kosistima.

François Viète je prvi predložio korištenje slova za konstante i nepoznanice (suglasnike za konstante, samoglasnike za nepoznanice). Osnovne četiri operacije označavao je s $+$, $-$, *in*, razlomačkom crtom, a jednakost s *aequibitur* (u*In artem analyticem isagoge*, 1591.).

Prvi koji je dao primjere jednadžbi koje imaju onoliko rješenja koliki im je stupanj.

# Još malo o simbolici

Današnji znak za kvadratni korijen je vjerojatno pokrata od r, a prvi put se javlja 1525. u prvoj njemačkoj knjizi o algebri *Die Coss* poljskog Nijemca Christoffa Rudolffa (1499.–1545.), po kojoj se njemački renesansni algebraičari nazivaju kosistima.

François Viète je prvi predložio korištenje slova za konstante i nepoznanice (suglasnike za konstante, samoglasnike za nepoznanice). Osnovne četiri operacije označavao je s $+$, $-$, *in*, razlomačkom crtom, a jednakost s *aequibitur* (u*In artem analyticem isagoge*, 1591.).

Prvi koji je dao primjere jednadžbi koje imaju onoliko rješenja koliki im je stupanj.

Vièteove formule:

$$x^2 + ax + b = 0 : x_1 x_2 = b, x_1 + x_2 = -a.$$

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 :$$

$$x_1 x_2 x_3 = -c, x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = b, x_1 + x_2 + x_3 = -a.$$

## François Viète (Vieta, 1540.–1603.)

Viète je bio francuski pravnik i zastupnik u parlamentu, a matematikom se bavio u slobodno vrijeme.

## François Viète (Vieta, 1540.–1603.)

Viète je bio francuski pravnik i zastupnik u parlamentu, a matematikom se bavio u slobodno vrijeme.
Filip II. vs. Henrik IV., 1590.

# François Viète (Vieta, 1540.–1603.)

Viète je bio francuski pravnik i zastupnik u parlamentu, a matematikom se bavio u slobodno vrijeme.
Filip II. vs. Henrik IV., 1590.
Adrian van Roomen 1593.: zadatak

Thomas Harriot (1560.–1621.), matematičar, istraživač i astronom: $a, aa, aaa, \ldots$ za današnje $a, a^2, a^3, \ldots$.
Prvi je koristio znakove $<$ i $>$: *Signum majoritatis ut* $a > b$ *significet* $a$ *majorem quam* $b$. *Signum minoritatis ut* $a < b$ *significet* $a$ *minorem quam* $b$.

U Englesku je znakove $+$ i $-$ u upotrebu uveo Robert Recorde (1510.–1558.), a on j 1557. koristi znak $=$. Recorde je bio na raznim funkcijama u doba kralja Edwarda VI., a umro je u zatvoru u koji je dospio zbog duga vezanog za politička nadmetanja, a vjerojatno i težih zločina. Znak $=$ se nije ponovno pojavio u tisku do 1618., a uporaba tog znaka se proširila tek tijekom 17. stoljeća (u 16. i 17. st. mnogi su autori za jednakost koristili $||$, a neki [, $|$, *ae*, *oe*, . . . ).

U Englesku je znakove $+$ i $-$ u upotrebu uveo Robert Recorde (1510.–1558.), a on j 1557. koristi znak $=$. Recorde je bio na raznim funkcijama u doba kralja Edwarda VI., a umro je u zatvoru u koji je dospio zbog duga vezanog za politička nadmetanja, a vjerojatno i težih zločina. Znak $=$ se nije ponovno pojavio u tisku do 1618., a uporaba tog znaka se proširila tek tijekom 17. stoljeća (u 16. i 17. st. mnogi su autori za jednakost koristili $||$, a neki [, $|$, *ae*, *oe*, ...).
Tijekom renesanse množenje se često označavalo s M (ili jednostavno nadopisivanjem), a dijeljenje s D (ili razlomačkom crtom), no znakovi $\times$ i $\cdot$ te $:$ i $\div$ pojavili su se tek u 17. st.

U Englesku je znakove $+$ i $-$ u upotrebu uveo Robert Recorde (1510.–1558.), a on j 1557. koristi znak $=$. Recorde je bio na raznim funkcijama u doba kralja Edwarda VI., a umro je u zatvoru u koji je dospio zbog duga vezanog za politička nadmetanja, a vjerojatno i težih zločina. Znak $=$ se nije ponovno pojavio u tisku do 1618., a uporaba tog znaka se proširila tek tijekom 17. stoljeća (u 16. i 17. st. mnogi su autori za jednakost koristili $||$, a neki $[$, $|$, $ae$, $oe$, ...).

Tijekom renesanse množenje se često označavalo s M (ili jednostavno nadopisivanjem), a dijeljenje s D (ili razlomačkom crtom), no znakovi $\times$ i $\cdot$ te $:$ i $\div$ pojavili su se tek u 17. st. Jedna od popularnijih notacija za dijeljenje potječe od Michaela Stifela, koji za naše $24:8$ piše $8)24$ (a množenje označava nadopisivanjem). On je za naš $A$ piše $1A$, naš $A^2$ piše $1AA$, naš $A^3$ piše $1AAA$, ...

## Michael Stifel (1487.–1567.)

Stifel je bio njemački redovnik, jedan od ranih Lutherovih sljedbenika. Neko vrijeme je čak živio kod Luthera, koji mu je našao mjesto pastora koje je Stifel izgubio nakon krivog predskazivanja kraja svijeta za 18. listopada 1533. U kasnijem razdoblju je stjecajem okolnosti više puta morao mijenjati mjesto službe.

## Michael Stifel (1487.–1567.)

Stifel je bio njemački redovnik, jedan od ranih Lutherovih sljedbenika. Neko vrijeme je čak živio kod Luthera, koji mu je našao mjesto pastora koje je Stifel izgubio nakon krivog predskazivanja kraja svijeta za 18. listopada 1533. U kasnijem razdoblju je stjecajem okolnosti više puta morao mijenjati mjesto službe.

Kod njega susrećemo spominjanje iracionalnosti kao brojeva, iako mu se razmatranje temelji na EEX. Stifel kaže da iracionalni broj ne može biti racionalan, ali može biti između dva racionalna.

## Michael Stifel (1487.–1567.)

Stifel je bio njemački redovnik, jedan od ranih Lutherovih sljedbenika. Neko vrijeme je čak živio kod Luthera, koji mu je našao mjesto pastora koje je Stifel izgubio nakon krivog predskazivanja kraja svijeta za 18. listopada 1533. U kasnijem razdoblju je stjecajem okolnosti više puta morao mijenjati mjesto službe.

Kod njega susrećemo spominjanje iracionalnosti kao brojeva, iako mu se razmatranje temelji na EEX. Stifel kaže da iracionalni broj ne može biti racionalan, ali može biti između dva racionalna. Promatrao je samo pozitivne brojeve, a negativne smatrao besmislenim (ali ih ipak proglašava manjima od nule: kaže da je nula između pozitivnih i negativnih brojeva).

# Michael Stifel (1487.–1567.)

Stifel je bio njemački redovnik, jedan od ranih Lutherovih sljedbenika. Neko vrijeme je čak živio kod Luthera, koji mu je našao mjesto pastora koje je Stifel izgubio nakon krivog predskazivanja kraja svijeta za 18. listopada 1533. U kasnijem razdoblju je stjecajem okolnosti više puta morao mijenjati mjesto službe.

Kod njega susrećemo spominjanje iracionalnosti kao brojeva, iako mu se razmatranje temelji na EEX. Stifel kaže da iracionalni broj ne može biti racionalan, ali može biti između dva racionalna.

Promatrao je samo pozitivne brojeve, a negativne smatrao besmislenim (ali ih ipak proglašava manjima od nule: kaže da je nula između pozitivnih i negativnih brojeva).

Najznačajnije djelo mu je *Arithmetica integra* (1544.). U tom se djelu po prvi put u Europi pojavljuje i Pascalov trokut, a koriste se i znakovi $+$, $-$, $\surd$, no posebno je značajno jer je postalo temelj otkrića logaritama.

# Prosthaphaeresis

Kako pojednostaviti množenje i dijeljenje brojeva s puno znamenki? I zašto bi to trebalo renesansnim ljudima?

## Prosthaphaeresis

Kako pojednostaviti množenje i dijeljenje brojeva s puno znamenki? I zašto bi to trebalo renesansnim ljudima?
Njemački matematičar i astronom Paul Wittich boravio je oko 1580 više mjeseci u Uraniborgu, opservatoriju danskog astronoma Tycho Brahe-a na otoku Hvenu.


Wittich je u Dansku donio sa sobom ideju korištenja ranije poznate formule

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2}$$

u svrhu svođenja množenja na zbrajanje i oduzimanje.

Wittich je u Dansku donio sa sobom ideju korištenja ranije poznate formule

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

u svrhu svođenja množenja na zbrajanje i oduzimanje.

### Prosthaphaeresis: Primjer

$$0{,}99027\cdot 0{,}17365=?$$

Prvo nađemo iz trigonometrijskih tablica: $0{,}99027=\sin 82^\circ$, $0{,}17365=\sin 10^\circ$. Izračunamo: $\alpha-\beta=72^\circ$, $\alpha+\beta=92^\circ$. Opet iz tablica: $\cos 72^\circ=0{,}309017$, $\cos 92^\circ=-0{,}034899$. Oduzmemo i podijelimo s 2:

$$0{,}99027\cdot 0{,}17365=\frac{0{,}309017-(-0{,}034899)}{2}=0{,}17463$$

Dijeljenje? Potenciranje?

U 14. st. d'Oresme je znao pravilo $a^m a^n = a^{m+n}$ za pozitivne racionalne eksponente $m$ i $n$. To je u 15. st. Chuquet proširio na slučajeve kad su kao eksponenti dozvoljeni i 0 i negativni (cijeli) brojevi.

U 14. st. d'Oresme je znao pravilo $a^m a^n = a^{m+n}$ za pozitivne racionalne eksponente $m$ i $n$. To je u 15. st. Chuquet proširio na slučajeve kad su kao eksponenti dozvoljeni i 0 i negativni (cijeli) brojevi. Stifel je pak u *Arithmetica integra* uočio: *Zbrajanje u aritmetičkom nizu odgovara množenju u geometrijskom nizu, a isto tako oduzimanje u prvom odgovara dijeljenju u drugom*.

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & \dots \end{array}$$

Tu je primijetio da se primjerice $8 \cdot 16$ može računati tako da zbrojimo $3 + 4 = 7$ i u drugom redu očitamo rezultat. Kako dobiti finiju raspodjelu?

# John Napier (1550.–1617.)

Napier bio je škotski plemić i fanatični protestant koji je napisao tekst kojim je htio pokazati da je papa Antikrist, a zbog sklonosti nošenja dugih halja i noćnih šetnji po dvorcu smatrali su ga nekromantom. Matematikom se bavio samo iz hobija.

## John Napier (1550.–1617.)

Napier bio je škotski plemić i fanatični protestant koji je napisao tekst kojim je htio pokazati da je papa Antikrist, a zbog sklonosti nošenja dugih halja i noćnih šetnji po dvorcu smatrali su ga nekromantom. Matematikom se bavio samo iz hobija.
Potrošio je 20 godina na konstrukciju prve tablice logaritama. Objavio ju je 1614., a 1619. je pod nazivom *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio* objavljena i pripadna teorija.

# John Napier (1550.–1617.)

Napier bio je škotski plemić i fanatični protestant koji je napisao tekst kojim je htio pokazati da je papa Antikrist, a zbog sklonosti nošenja dugih halja i noćnih šetnji po dvorcu smatrali su ga nekromantom. Matematikom se bavio samo iz hobija.

Potrošio je 20 godina na konstrukciju prve tablice logaritama. Objavio ju je 1614., a 1619. je pod nazivom *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio* objavljena i pripadna teorija.

Uočio je da je problem za procjenu međuvrijednosti u Stifelovoj tablici taj što je kvocijent 2 prevelik.

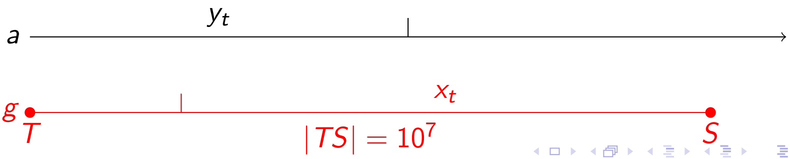
Ne zaboravimo: Cilj je bio olakšati množenje brojeva u trigonometrijskim tablicama. U to doba je sinus bio duljina polutetive za krug proizvoljnog radijusa. Najtočnije tadašnje tablice su uzimale polumjer $10^7$, dakle je u njima, primjerice, $\sin 30^\circ$ iznosio 5.000.000, a $\sin 90^\circ$ je bio $10.000.000 = 10^7$.

# Napierovi „logaritmi”

Napier je u nekoliko koraka izradio tablicu so 1380 brojeva u rasponu 4.998.609,4034 i 10.000.000 (sinusi kutova od 29,99° do 90°).
Umjesto cjelobrojnih eksponenata i decimalnih sinusa, Napier je odlučio uzeti cjelobrojne sinuse i tražiti odgovarajuće eksponente (logaritme).

# Napierovi „logaritmi"

Napier je u nekoliko koraka izradio tablicu so 1380 brojeva u rasponu 4.998.609,4034 i 10.000.000 (sinusi kutova od 29,99° do 90°).
Umjesto cjelobrojnih eksponenata i decimalnih sinusa, Napier je odlučio uzeti cjelobrojne sinuse i tražiti odgovarajuće eksponente (logaritme). Dvije čestice $a$ i $g$ gibaju se pravocrtno i bilježimo njihove pozicije $y_t$ i $x_t$ u raznim trenucima $t$. Čestica $a$ se giba konstatnom brzinom $10^7$, a čestica $g$ ima početnu brzinu $10^7$ i u svakom trenutku joj je brzina $v$ razmjerna trenutnoj udaljenosti do cilja. Napier definira: $y_t$ je logaritam od „sinusa" $x_t$ (pisat ćemo $y = \operatorname{NapLog} x$).



# Moderna interpretacija Napierovog logaritma

Očito je $\mathrm{NapLog}10^7 = 0$ i očito je NapLog padajuća funkcija.

## Moderna interpretacija Napierovog logaritma

Očito je $\mathrm{NapLog}10^7 = 0$ i očito je NapLog padajuća funkcija. Po definiciji imamo $v(t) = kx(t)$ za svaki $t$. Naravno, $v = \frac{\mathrm{d}(10^7 - x)}{\mathrm{d}t} = -\dot{x}$.

## Moderna interpretacija Napierovog logaritma

Očito je $\mathrm{NapLog}10^7 = 0$ i očito je NapLog padajuća funkcija. Po definiciji imamo $v(t) = kx(t)$ za svaki $t$. Naravno, $v = \frac{\mathrm{d}(10^7 - x)}{\mathrm{d}t} = -\dot{x}$. Uz to imamo početne uvjete $x(0) = 10^7$ i $v(0) = 10^7$.

# Moderna interpretacija Napierovog logaritma

Očito je $\mathrm{NapLog} 10^7 = 0$ i očito je NapLog padajuća funkcija. Po definiciji imamo $v(t) = kx(t)$ za svaki $t$. Naravno, $v = \frac{\mathrm{d}(10^7 - x)}{\mathrm{d}t} = -\dot{x}$. Uz to imamo početne uvjete $x(0) = 10^7$ i $v(0) = 10^7$. Slijedi $k = 1$.

# Moderna interpretacija Napierovog logaritma

Očito je $\mathrm{NapLog}10^7 = 0$ i očito je NapLog padajuća funkcija. Po definiciji imamo $v(t) = kx(t)$ za svaki $t$. Naravno, $v = \frac{\mathrm{d}(10^7 - x)}{\mathrm{d}t} = -\dot{x}$. Uz to imamo početne uvjete $x(0) = 10^7$ i $v(0) = 10^7$. Slijedi $k = 1$.

S druge je strane $\dot{y} = 10^7$ za svaki $t$.

# Moderna interpretacija Napierovog logaritma

Očito je $\mathrm{NapLog}\,10^7 = 0$ i očito je NapLog padajuća funkcija. Po definiciji imamo $v(t) = kx(t)$ za svaki $t$. Naravno, $v = \frac{\mathrm{d}(10^7 - x)}{\mathrm{d}t} = -\dot{x}$. Uz to imamo početne uvjete $x(0) = 10^7$ i $v(0) = 10^7$. Slijedi $k = 1$.
S druge je strane $\dot{y} = 10^7$ za svaki $t$. Dakle,

$$\mathrm{NapLog}\, x = 10^7 \ln \frac{10^7}{x}.$$

link

Što je Napier učinio? Prvo je dokazao da (za jednake vremenske razmake, tj. za $t = 0, 1, 2, \ldots$) pozicije $y_t$ (Napierovi logaritmi pozicija $x_t$) čine aritmetički niz s početnim članom 0 i diferencijom $10^7$, a udaljenosti $x_t$ čine geometrijski niz s početnim članom $10^7$ i kvocijentom 0,9999999.
Napier je zatim izveo određena svojstva svog logaritma te je, među ostalim koristeći linearnu interpolaciju, izračunao tablicu logaritama sinusa od 5.000.000 do 10.000.000. Za $x$ od 0 do 5.000.000 koristio je svojstvo $\mathrm{NapLog} x = \mathrm{NapLog}(2x) + \mathrm{NapLog} \frac{10^7}{2}$.

**Zadatak**

$\mathrm{NapLog}\,(10^7 ab) = \mathrm{NapLog}\,(10^7 a) + \mathrm{NapLog}\,(10^7 b)$,
$\mathrm{NapLog}\,(10^7 \frac{a}{b}) = \mathrm{NapLog}\,(10^7 a) - \mathrm{NapLog}\,(10^7 b)$,
$\mathrm{NapLog}\,(10^7 \sqrt{a}) = \frac{\mathrm{NapLog}\,(10^7 a)}{2}$.

# Henry Briggs (1561.–1631.)

Profesor geometrije u Oxfordu, saznao je za Napierovu konstrukciju te 1615. otputovao k Napieru u Edinburgh. Napier se složio s Briggsovim prijedlogom da bi puno zgodniji bili logaritmi kojima je nultočka 1 jer time dobivamo uobičajena svojstva logaritama s obzirom na $\cdot$ i $:$. Uz to su se složili i da bi bilo zgodno da 10 puta veći broj ima za 1 veći logaritam. Briggs je nakon Napierove smrti nastavio i 1624. objavio svoju tablicu *Arithmetica Logarithmica* dekadskih logaritama, koji su zbog toga ponekad poznati i kao Briggsovi logaritmi.
Briggs je uveo pojmove mantisa i karakteristika: Svaki decimalni broj možemo zapisati u obliku $m \cdot 10^k$, gdje je $m \in [1, 10\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$. Budući da je $\log(a \cdot 10^k) = k + \log a$, dovoljno je znati samo logaritme mantisa.

# Joost Bürgi (1552.–1632.)

Najpoznatiji švicarski urar svog doba, radio i na carskom dvoru u Pragu, gdje je imao prilike susresti Keplera. Vjerojatno je da ga je upravo Kepler nagovorio da objavi svoju konstrukciju logaritama, koja je pak vjerojatno bila inspirirana Stifelovim razmatranjima. Svoj je rad objavio 1620 pod nazivom *Progress Tabulen*.
Za razliku od Napiera, on kao kvocijent geometrijskog niza uzima 1,0001. Za broj $N = 10^8 \cdot 1{,}0001^L$ on broj $10L$ zove „crvenim brojem crnog broja" $N$: Suvremene oznake povlače da je Bürgijev logaritam zapravo $\frac{10}{\ln 1{,}0001} \cdot \ln(10^{-8}x)$.