

# Povijest matematike

Matematika u Europi u doba srednjeg vijeka i rane renesanse

Franka Miriam Brückler

14. travnja 2022.

## Rani srednji vijek (6.–10. st.)

U 4. st. u Europu su prodrli Huni i Germani, a 375. je podijeljeno Rimsko carstvo. Zapadno rimsko carstvo propalo je 476. i obično se ta godina uzima kao početak europskog srednjeg vijeka. Godine 529. bizantski car Justinijan I je boreći se protiv pogana zatvorio atensku neoplatonsku Akademiju i time prekinuo tisućljetni razvoj grčke matematike.

## Rani srednji vijek (6.–10. st.)

U 4. st. u Europu su prodrli Huni i Germani, a 375. je podijeljeno Rimsko carstvo. Zapadno rimsko carstvo propalo je 476. i obično se ta godina uzima kao početak europskog srednjeg vijeka. Godine 529. bizantski car Justinijan I je boreći se protiv pogana zatvorio atensku neoplatonsku Akademiju i time prekinuo tisućljetni razvoj grčke matematike.

**Nikomah iz Geraze** (1./2. st.) je napisao uvod u (teorijsku) aritmetiku pitagorejskog stila, na čijem temelju je **Anicius Manlius Severinus Boethius** (ca. 480–525) napisao *De institutione arithmetica*.

## Rani srednji vijek (6.–10. st.)

U 4. st. u Europu su prodrli Huni i Germani, a 375. je podijeljeno Rimsko carstvo. Zapadno rimsko carstvo propalo je 476. i obično se ta godina uzima kao početak europskog srednjeg vijeka. Godine 529. bizantski car Justinijan I je boreći se protiv pogana zatvorio atensku neoplatonsku Akademiju i time prekinuo tisućljetni razvoj grčke matematike.

**Nikomah iz Geraze** (1./2. st.) je napisao uvod u (teorijsku) aritmetiku pitagorejskog stila, na čijem temelju je **Anicius Manlius Severinus Boethius** (ca. 480–525) napisao *De institutione arithmetica*.

trivium + quadrivium = septem artes liberales

## Rani srednji vijek (6.–10. st.)

U 4. st. u Europu su prodrli Huni i Germani, a 375. je podijeljeno Rimsko carstvo. Zapadno rimsko carstvo propalo je 476. i obično se ta godina uzima kao početak europskog srednjeg vijeka. Godine 529. bizantski car Justinijan I je boreći se protiv pogana zatvorio atensku neoplatonsku Akademiju i time prekinuo tisućljetni razvoj grčke matematike.

**Nikomah iz Geraze** (1./2. st.) je napisao uvod u (teorijsku) aritmetiku pitagorejskog stila, na čijem temelju je **Anicius Manlius Severinus Boethius** (ca. 480–525) napisao *De institutione arithmetica*.

trivium + quadrivium = septem artes liberales

rimski brojevni sustav je do 13. st. bio u isključivoj upotrebi

## Rani srednji vijek (6.–10. st.)

U 4. st. u Europu su prodrli Huni i Germani, a 375. je podijeljeno Rimsko carstvo. Zapadno rimsko carstvo propalo je 476. i obično se ta godina uzima kao početak europskog srednjeg vijeka. Godine 529. bizantski car Justinijan I je boreći se protiv pogana zatvorio atensku neoplatonsku Akademiju i time prekinuo tisućljetni razvoj grčke matematike.

**Nikomah iz Geraze** (1./2. st.) je napisao uvod u (teorijsku) aritmetiku pitagorejskog stila, na čijem temelju je **Anicius Manlius Severinus Boethius** (ca. 480–525) napisao *De institutione arithmetica*.

trivium + quadrivium = septem artes liberales

rimski brojevni sustav je do 13. st. bio u isključivoj upotrebi  
Car **Karlo Veliki** (okrunjen 800.) bio je prvi koji je potaknuo organizaciju (crkvenih) škola kako bi Europu sačuvao od intelektualnog propadanja.

## Alkuin (oko 735.–804.)

Prijatelj, savjetnik i učitelj sinova Karla Velikog. Razvio je karolinške minuskule.

## Alkuin (oko 735.–804.)

Prijatelj, savjetnik i učitelj sinova Karla Velikog. Razvio je karolinške minuskule. Osnovao je niz škola i pisao matematičke tekstove.



## Alkuin (oko 735.–804.)

Prijatelj, savjetnik i učitelj sinova Karla Velikog. Razvio je karolinške minuskule. Osnovao je niz škola i pisao matematičke tekstove.

Propositiones ad acuendos iuvenes

### Primjer

*Jedan svinjogojac je rekao: „elim kupiti 100 svinja za 100 libri. Prasac ko v sta deset libri, krmača košta pet libri, a dva praščića se mogu kupiti za jednu libru.“ Koliko prasaca, krmača i praščića taj svinjogojac može kupiti ako potroši sav novac?*

**Alkuin** (oko 735.–804.)

Prijatelj, savjetnik i učitelj sinova Karla Velikog. Razvio je karolinške minuskule. Osnovao je niz škola i pisao matematičke tekstove.

Propositiones ad acuendos iuvenes

**Primjer**

*Jedan svinjogojac je rekao: „elim kupiti 100 svinja za 100 libri. Prasac ko v sta deset libri, krmača košta pet libri, a dva praščića se mogu kupiti za jednu libru.“ Koliko prasaca, krmača i praščića taj svinjogojac može kupiti ako potroši sav novac?*

**Primjer**

*Tri muškarca, svaki s po jednom sestrom, žele prijeći rijeku. Našli su samo mali čamac s kojim samo dvije osobe odjenom mogu prijeći rijeku. Kako su prešli rijeku, tako da nijedna od djevojaka ni u kojem trenu nije sama s muškarcem koji joj nije brat ni u čamcu*

## Gerbert iz Aurillac (oko 946.–1003.)

Kao i u Rimu, računanje se u srednjem vijeku učilo u glavi, s prstima i pomoću abakusa. Kad je u 9. st. došlo do prvih kontakata Europljana s muslimanskom tradicijom, postepeno su upoznawali indoarapske brojke te su se razdvojile dvije „škole” : **abacisti** i **algoristi**.

## Gerbert iz Aurillaca (oko 946.–1003.)

Kao i u Rimu, računanje se u srednjem vijeku učilo u glavi, s prstima i pomoću abakusa. Kad je u 9. st. došlo do prvih kontakata Europljana s muslimanskom tradicijom, postepeno su upoznavali indoarapske brojke te su se razdvojile dvije „škole” : **abacisti** i **algoristi**.

Gerbert je studirao u Kataloniji, gdje je naučio koristiti indoarapske brojke (bez nule) i susreo se s arapskom matematikom.

## Gerbert iz Aurillaca (oko 946.–1003.)

Kao i u Rimu, računanje se u srednjem vijeku učilo u glavi, s prstima i pomoću abakusa. Kad je u 9. st. došlo do prvih kontakata Europljana s muslimanskom tradicijom, postepeno su upoznavali indoarapske brojke te su se razdvojile dvije „škole”: **abacisti** i **algoristi**.

Gerbert je studirao u Kataloniji, gdje je naučio koristiti indoarapske brojke (bez nule) i susreo se s arapskom matematikom. Pisao je o aritmetici i geometriji. Iako su iz današnje perspektive njegovi spisi elementarni, za tadašnje Europljane bili su iznimni te je optuživan da je sklopio pakt s vragom. No, 999. je izabran za papu Silvestra II.

## Gerbert iz Aurillac (oko 946.–1003.)

Kao i u Rimu, računanje se u srednjem vijeku učilo u glavi, s prstima i pomoću abakusa. Kad je u 9. st. došlo do prvih kontakata Europljana s muslimanskom tradicijom, postepeno su upoznavali indoarapske brojke te su se razdvojile dvije „škole”: **abacisti** i **algoristi**.

Gerbert je studirao u Kataloniji, gdje je naučio koristiti indoarapske brojke (bez nule) i susreo se s arapskom matematikom. Pisao je o aritmetici i geometriji. Iako su iz današnje perspektive njegovi spisi elementarni, za tadašnje Europljane bili su iznimni te je optuživan da je sklopio pakt s vragom. No, 999. je izabran za papu Silvestra II.

Opisao je novu verziju **abakusa**, prilagođenu indoarapskim brojkama, koja je koristila *apices* (kamenčice s oznakama znamenki 1 do 9).

## Visoki srednji vijek (ca. 1000.–1300.)

Ovo je doba romanike i gotike, razdvajanja katoličke i pravoslavne crkve, križarskih ratova, te kontakta s arapskim svijetom, prvenstveno preko Iberskog poluotoka.

**Al-Andalus:** od 711. do predaje emirata Granade 1492.

Od 929. do 1031. samostalni kalifat Córdoba: **Córdoba** je postala znanstveni centar s velikom knjižnicom. Pod maurskom vladavinom se poticalo prevođenje znanstvenih djela raznih izvora, što je doprinijelo oživljavanju grčke i otkriću arapske i indijske matematike.

Tako je u 11. i 12. st. došlo je do intenzivnijeg kontakta europske s grčkom i indijskom matematikom.

## Prevodioci („preveo i prilagodio“)

**Robert iz Chestera** (12. st.) je na latinski preveo Al-Hwārizmījevu „Algebru“ (1145.).

**Adelard iz Batha** (1075.–1160.): Al-Hwārizmījeva „Aritmetika“ (?), EE

**Gerard iz Cremona** (ca. 1114.–1187.): *Almagest*



## Prevodioci („preveo i prilagodio“)

**Robert iz Chestera** (12. st.) je na latinski preveo Al-Hwārizmījevu „Algebru“ (1145.).

**Adelard iz Batha** (1075.–1160.): Al-Hwārizmījeva „Aritmetika“ (?), EE

**Gerard iz Cremona** (ca. 1114.–1187.): *Almagest*

**skolastika**: sustavno posredovanje znanja kroz predavanja i rasprave; logika; prva sveučilišta

## Fibonacci (Leonardo iz Pise), ca. 1170.–1250.

- *Liber Abbaci* (1202., 1228.)
- *Practica Geometriae*, 1220./21.
- *Flos*, 1225.
- pismo carskom filozofu Teodoru
- *Liber Quadratorum*, 1225.

## Liber Abaci iliti Knjiga o računanju

- rimske brojke i brojanje prstima
- **indoarapski pozicijski sustav s nulom!!!**
- računanje u dekadskom sustavu (indoarapske brojke)
- razlomci i računanje s njima (uveo je razlomačku crtu)
- trgovačka računica (tu je i problem sto ptica :-))
- zadaci zabavne matematike (Fibonaccijevi brojevi)
- neki od tih zadataka vode na jednadžbe i sustave (uključivo neodređene)
- nepoznanicu naziva *res* ili *radix*; druge potencije nepoznanice: *quadratus* ili *census*, *cubus*, *census de censu*, *cubus cubi*; konstanta: *numerus*, *denarius*, *dragma*
- očit utjecaj arapske matematike (npr. klasifikacija i rješavanje kvadratnih jednadžbi)

## Zadatak o pronađenom novčaniku

Nađen je novčanik s nepoznatim iznosom  $b$  novca u njemu. Četvorica nalaznika imaju po  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  novca. Uvjeti vode na sustav

$$x_1 + b = 2(x_2 + x_3)$$

$$x_2 + b = 3(x_3 + x_4)$$

$$x_3 + b = 4(x_4 + x_1)$$

$$x_4 + b = 5(x_1 + x_2)$$

Kaže Leonardo:

„Pokazat ću da ovaj problem nije rješiv ako se ne dozvoli da je prvi partner u dugu.” — **razumije negativne brojeve!!!**

Kao jedno rješenje daje  $-1, 4, 1, 4$  i  $b = 11$ .

## Ostala djela

Godine 1220. Fibonacci je napisao *Practica Geometriae*, kompilacija geometrijskih rezultata (Euklid, arapska trigonometrija, ...). Potrebna algebarske pravila u arapskoj tradiciji izlaže bez pozivanja na geometriju.

U *Liber quadratorum* (1225.) opisao je metode za nalaženje pitagorejskih trojki i dao prvi dokaz identiteta

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2,$$

tj. umnožak dva zbroja kvadratnih brojeva je zbroj kvadratnih brojeva (što je bila još Diofantova tvrdnja).

U *Flosu* se bavi raznim algebarskim zadacima.

Car Friedrich II je 1225. s dvorom došao u Rim te odgodio odlazak u križarski rat kako bi organizirao natjecanje iz matematike. Na tom je natjecanju Friedrichov dvorski filozof Ivan iz Palerma zadao sljedeće zadatke:

- 1 Tri čovjeka posjeduju hrpicu novca, a udjeli su im  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$  i  $\frac{1}{6}$ . S vremenom, svaki je uzimao ponešto novca, sve dok ništa nije preostalo. Prvi je vratio  $\frac{1}{2}$  od koliko je uzeo, drugi  $\frac{1}{3}$  od onog što je uzeo i treći  $\frac{1}{6}$  iznosa kojeg je uzeo. Ako se tako skupljen novac podijeli na tri jednaka dijela i svakom da po jedan, ispada da svaki posjeduje koliko mu po pravu i pripada. Koliko je novca bilo u početnoj hrpi i koliko je tko uzeo?
- 2 naći broj  $x$  takav da su  $x^2 \pm 5$  kvadrati razlomaka;
- 3 riješiti jednadžbu  $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ .

1; 22, 07, 42, 33, 04, 40 (*Flos*)

Treći je zadatak Ivan iz Palerma preuzeo iz Khayyamove *Algebre*. Fibonacci je dokazao da ta jednažba nema rješenja u cijelim ni racionalnim brojevima niti među euklidskim kvadratnim iracionalnostima, a zatim navodi aproksimativno rješenje točno na devet decimala, no nema izvora kako je to aproksimativno rješenje dobio.

O Fibonaccijevom životu iza 1228. se gotovo ništa ne zna, osim da mu je republika Pisa dodijelila stipendiju kao nagradu za savjetovanje u matematici vezano za računovodstvo i slična pitanja.

# Nakon Fibonaccija

- **Jordanus Nemorarius** (ca. 1225.–1260.): *De numeris datis* — prvi u povijesti koristi slova kao oznake nepoznanica
- **Thomas Bradwardine** (ca. 1295.–1349.): zvjezdasti mnogokuti; razlikovao je dva tipa beskonačnosti: katetičnu (odgovara našem pojmu transfinitnog, tj. onom što već otpočetka nedostaje ograničenost) i sinkatetičnu (odgovara našem pojmu infinitnog, tj. onom što iz konačnog nastaje neograničenim rastom).



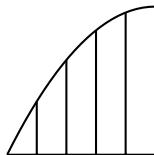
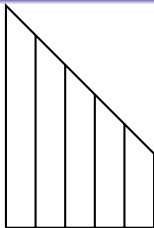
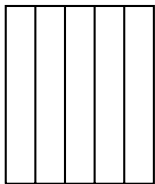
## Nicole d'Oresme (ca. 1330–1382)

Francuski biskup i financijski savjetnik francuskog kralja Karla V. Prva osoba koja je dozvolila razlomke kao eksponente. Specijalno, poznavao je pravilo  $x^a x^b = x^{a+b}$  i za razlomljene eksponente.

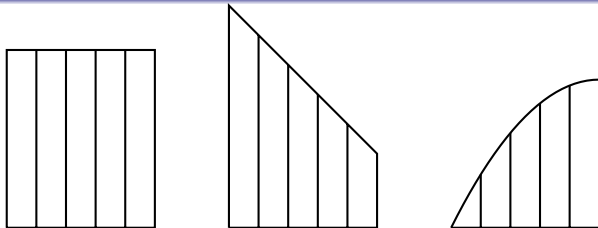
## Nicole d'Oresme (ca. 1330–1382)

Francuski biskup i financijski savjetnik francuskog kralja Karla V. Prva osoba koja je dozvolila razlomke kao eksponente. Specijalno, poznao je pravilo  $x^a x^b = x^{a+b}$  i za razlomljene eksponente. Kod njega nalazimo rano poimanje funkcije i grafa: Za njega su sve mjerljive veličine, osim brojeva (koje doživljava na starogrčki način), kontinuirane te se mogu prikazivati duljinama, površinama i volumenima.

U *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum* i *Questiones super geometriam Euclidis* opisuje kako ilustrirati odnos protezanja (*extensio*) i iznosa (*intensio*) kvalitete (to su razne fizikalne pojave, npr. brzina, koje mogu imati različite intenzitete i koje se nalaze u odnosu s protezanjem, primjerice vremenom). Intenzitete je nanosio vertikalno kao duljine (*latitudo*) nad vodoravnom crtom, na kojoj su protezanja prikazana isto kao duljine (*longitudo*).

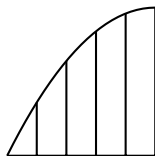
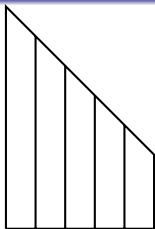
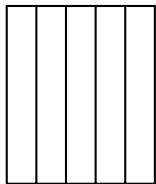


D'Oresme ne zahtijeva okomitost latituda u odnosu na longitude i spominje i mogućnost trodimenzionalne interpretacije.



D'Oresme ne zahtijeva okomitost latituda u odnosu na longitude i spominje i mogućnost trodimenzionalne interpretacije.

Pokazao je i tzv. Mertonski teorem, nazvan po oxfordskom *Merton College*, čiji znanstvenici su ga izrekli 1330ih: U slučaju uniformno diformne brzine (dakle, gibanja s konstantnom akceleracijom) je prijeđeni put jednako kao za uniformnu brzinu, ako je to ona u srednjem trenutku.



D'Oresme ne zahtijeva okomitost latituda u odnosu na longitude i spominje i mogućnost trodimenzionalne interpretacije.

Pokazao je i tzv. Mertonski teorem, nazvan po oxfordskom *Merton College*, čiji znanstvenici su ga izrekli 1330ih: U slučaju uniformno diformne brzine (dakle, gibanja s konstantnom akceleracijom) je prijeđeni put jednako kao za uniformnu brzinu, ako je to ona u srednjem trenutku.

Poznat je i po prvom dokazu divergencije nekog reda, harmonijskog,

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

## Johann Müller Regiomontanus, 15. st.

Rođen je u Königsbergu, po čemu je i nazvan Regiomontanus. Od 1468. je bio je dvorski astronom kralja Matijaša Korvina. Njegovi najznačajniji doprinosi su u trigonometriji i astronomiji: *De triangulis omnimodis* (napisano 1464., objavljeno 1533.)

## Johann Müller Regiomontanus, 15. st.

Rođen je u Königsbergu, po čemu je i nazvan Regiomontanus. Od 1468. je bio je dvorski astronom kralja Matijaša Korvina. Njegovi najznačajniji doprinosi su u trigonometriji i astronomiji: *De triangulis omnimodis* (napisano 1464., objavljeno 1533.) zabilježio je pojavu kometa (Halleyev); efemeride - Kolumbo; reforma kalendara

## Johann Müller Regiomontanus, 15. st.

Rođen je u Königsbergu, po čemu je i nazvan Regiomontanus. Od 1468. je bio je dvorski astronom kralja Matijaša Korvina. Njegovi najznačajniji doprinosi su u trigonometriji i astronomiji: *De triangulis omnimodis* (napisano 1464., objavljeno 1533.) zabilježio je pojavu kometa (Halleyev); efemeride - Kolumbo; reforma kalendara

Papa Siksto IV ga je godine 1475. pozvao u Rim (Roma) upravo da bi reformirao kalendar. Papa ga imenuje i za biskupa Regensburga, ali Regiomontanus umire prije nego je preuzeo dužnost (prema nekim izvorima su ga otrovali sinovi konkurentskog znanstvenika, a prema drugima je umro od kuge). Kao i mnogi suvremenici, nepoznanicu označava riječju *res*, a kvadrat nepoznanice sa *census*.



## Regiomontanusov problem

Postavio ga je 1471.: „Slika visi na zidu. Ako je poznata visina vrha i dna slike iznad razine oka promatrača, na kojoj udaljenosti treba biti promatrač da ju najbolje vidi, tj. da je kut pod kojim ju gleda najveći?”

## Regiomontanusov problem

Postavio ga je 1471.: „Slika visi na zidu. Ako je poznata visina vrha i dna slike iznad razine oka promatrača, na kojoj udaljenosti treba biti promatrač da ju najbolje vidi, tj. da je kut pod kojim ju gleda najveći?”

Najstarije rješenje: geometrijsko. Povučete horizontalu na visini oka te kružnicu kojoj je to tangenta, a koja prolazi kroz vrh i dno slike. Diralište je optimalna pozicija oka.

# Simbolika

- *et*: +
- —
- P i M

# Simbolika

- *et*: +
- –
- P i M
- Johannesa Widmann (1489.)
- Ovisno o autoru, prva osoba koja je znakove + i – koristila u algebarskim izrazima je **Giel Vander Hoecke** u knjizi objavljenoj u Antwerpenu 1514., ili pak **Heinrich Schreiber (Heinrich Grammateus)** 1518.

# Nicolas Chuquet (ca. 1445.–1487.)

- *Triparty en la science des nombres* (1484./1880.)
- milijun, bilijun i trilijun
- prvi matematičar koji je koristio zapis eksponenta nepoznanice kao superskripta i pritom je prvi koristio 0 kao eksponent i negativne eksponente (njegovih  $12^3$  je naš  $12x^3$ ,  $12^0$  je naš 12,  $12^{1\bar{m}}$  je naš  $12x^{-1}$ ).

$$\underline{R^2 4^2 \tilde{p} 4^1 \tilde{p} 2^1 \tilde{p} 1} \Leftrightarrow \sqrt{4x^2 + 4x + 2x + 1}$$

## Matematika i likovna umjetnost

- Oko 1420. **Filippo Brunelleschi** (1377.–1446.) izriče glavno pravilo linearne perspektive: *Svi pravci danog smjera u nekoj ravnini (koja nije ravnina slike) „konvergiraju” istoj izbjježnoj točki.* Razvio je i precizna pravila za određivanje veličine objekta na slici ovisno o njegovoj udaljenosti od slike, ali nikad nije zapisao objašnjenje pravila **linearne perspektive**.
- Prvi je ta pravila objasnio **Leone Alberti** (1404.–1472.) u svoja dva djela *De pictura* (na latinskom, 1435.) i *Della pittura* (na talijanskom, 1436.).
- **Pierro della Francesca** (1412.–1492.): u **De prospectiva pingendi** (oko 1470.) je uključio i dijelove o aritmetici i algebri te dug dio o geometriji, uključivo originalnih doprinosa.

## Fra Luca Pacioli (1445.–1517.)

Na osnovi della Francescinih djela: prikaz pravila perspektive u sklopu De divina proportione (1509.)

To je djelo napisao u Milanu, kamo je oko 1496. na poziv vojvode Ludovica Sforze došao podučavati matematiku na njegovu dvoru, gdje je upoznao **Leonarda da Vincija** (1452.–1519.) — da Vinci je ilustrirao navedenu knjigu

Pacioli je bio autor prvog značajnog algebarskog djela u renesansi: *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* (*Summa*, 1494.). Radi se o izuzetno utjecajnom djelu, ne samo jer je pregled matematike tog vremena, nego i jer je pisano na narodnom talijanskom jeziku i tiskano. Dio *Summe* je posvećen rješavanju onih jednadžbi 4. stupnja koje se mogu riješiti supstitucijom.

Pacioli je koristio *res-census* terminologiju, za + koristi *p.*, za – koristi *m.*, za  $\sqrt{\quad}$  koristi *R.*

## Albrecht Dürer (1471.–1528.)

Na putu u Italiju 1494. saznao je za Paciolijeva djela i važnost matematike u slikarstvu te po povratku u Nürnberg počeo proučavati matematička djela.

bakrorezi

Melencolia I (1514.).

Underweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt in Linien ebn  
(1525.): detaljan prikaz teorije sjena i perspektive, a ujedno se radi o prvoj matematičkoj knjizi na njemačkom jeziku koja donosi nove rezultate.