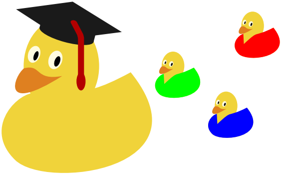
5. tjedan nastave: Postklasični helenizam. Starokineska matematika.

Franka Miriam Brückler



Postklasični helenizam

- smanjena znanstvena aktivnost
- novi rezultati su gotovo isključivo rješenja pojedinačnih problema ili upotpunjavanje djela ranijih matematičara
- iznimka: matematička astronomija
- u ovom razdoblju nastaje trigonometrija (ravninska i sferna) i sferna geometrija

Postklasični helenizam

- smanjena znanstvena aktivnost
- novi rezultati su gotovo isključivo rješenja pojedinačnih problema ili upotpunjavanje djela ranijih matematičara
- iznimka: matematička astronomija
- u ovom razdoblju nastaje trigonometrija (ravninska i sferna) i sferna geometrija

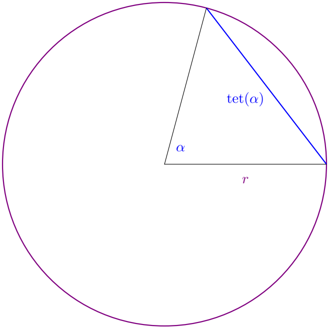
Prethodnik trigonometrije: Aristarh sa Samosa (ca. 310.–230.).

Postklasični helenizam

- smanjena znanstvena aktivnost
- novi rezultati su gotovo isključivo rješenja pojedinačnih problema ili upotpunjavanje djela ranijih matematičara
- iznimka: matematička astronomija
- u ovom razdoblju nastaje trigonometrija (ravninska i sferna) i sferna geometrija

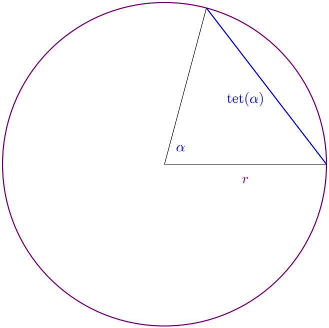
Prethodnik trigonometrije: Aristarh sa Samosa (ca. 310.–230.). Ocem trigonometrija smatra se Hiparh iz Niceje (oko 190.–120. pr. Kr.). Bavio se i sfernom geometrijom i analizirao stereografsku projekciju.

Tablica tetiva



$$\text{tet}\alpha = 2r\sin\frac{\alpha}{2}$$

Tablica tetiva

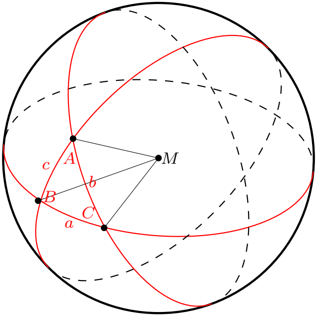


$$\text{tet}\alpha = 2r \sin \frac{\alpha}{2}$$

Za $\overline{\xi}$ (60°) je tetiva $\overline{\nu\zeta}$ $\overline{\iota\eta}$ (57°18′) —opseg kruga bio je 360

Menelaj iz Aleksandrije (ca. 70.–130.)

Sphaerica



$$180^\circ \leq A + B + C \leq 540^\circ$$

Teorem (Menelajev teorem)

Zadan je trokut ABC i pravac koji siječe pravce AB, BC, CA redom u točkama D, E, F. Tada je

$$|AD| \cdot |BE| \cdot |CF| = |BD| \cdot |CE| \cdot |AF|$$

ako je trokut ravninski, odnosno

$$\sin AD \cdot \sin BE \cdot \sin CF = \sin BD \cdot \sin CE \cdot \sin AF$$

ako je trokut sferni.

Klaudije Ptolemej (2. st.)

Jedinio čisto matematičko djelo sadrži pokušaj dokaza Euklidovog postulata o paralelama (Proklos).

Klaudije Ptolemej (2. st.)

Jedinio čisto matematičko djelo sadrži pokušaj dokaza Euklidovog postulata o paralelama (Proklos).

Najznačajnije djelo: *Almagest* u kojem daje matematičku teoriju kretanja nebeskih tijela.

Klaudije Ptolemej (2. st.)

Jedinio čisto matematičko djelo sadrži pokušaj dokaza Euklidovog postulata o paralelama (Proklos).

Najznačajnije djelo: *Almagest* u kojem daje matematičku teoriju kretanja nebeskih tijela.

U *Almagestu* Ptolemej je ostavio mnoge doprinose za sfernu geometriju i trigonometriju.

Ptolemejeva tablica tetiva

- Kružnica podijeljena na 360°, a promjer na 120^p;

Ptolemejeva tablica tetiva

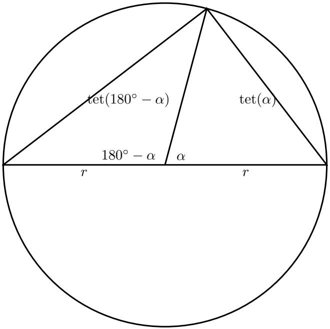
- Kružnica podijeljena na 360°, a promjer na 120^p;
- $\mathrm{tet}\,60^\circ = 60^p$;
- $\mathrm{tet}\,90^\circ$, $\mathrm{tet}\,120^\circ$ isto jednostavno (DZ);

Ptolemejeva tablica tetiva

- Kružnica podijeljena na 360°, a promjer na 120^p;
- $\text{tet}\,60^\circ = 60^p$;
- $\text{tet}\,90^\circ$, $\text{tet}\,120^\circ$ isto jednostavno (DZ);
- $\text{tet}\,36^\circ = 37^p 4\ 55$, pa iz toga $\text{tet}\,72^\circ$,

Ptolemejeva tablica tetiva

- Kružnica podijeljena na 360°, a promjer na 120^p;
- $\text{tet}\,60^\circ = 60^p$;
- $\text{tet}\,90^\circ$, $\text{tet}\,120^\circ$ isto jednostavno (DZ);
- $\text{tet}\,36^\circ = 37^p4\ 55$, pa iz toga $\text{tet}\,72^\circ$, a iz toga $\text{tet}\,144^\circ$ koristeći $(\text{tet}\,\alpha)^2 + (\text{tet}(180^\circ - \alpha))^2 = d^2$.



Najvažniji Ptolemejev rezultat je

Teorem (Ptolemejev teorem)

U tetivnom četverokutu je umnožak duljina dijagonala jednak zbroju umnožaka dva para nasuprotnih stranica.

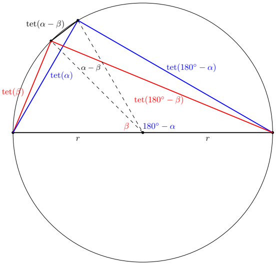
Najvažniji Ptolemejev rezultat je

Teorem (Ptolemejev teorem)

U tetivnom četverokutu je umnožak duljina dijagonala jednak zbroju umnožaka dva para nasuprotnih stranica.

Za tetivne četverokute kojima središte opisane kružnice leži na jednoj od dijagonala dobije se „tetivna" varijanta adicijskog teorema za sinus:

$$\mathrm{tet}(\alpha+\beta)\cdot d = \mathrm{tet}(\alpha)\mathrm{tet}(180^\circ-\beta)+\mathrm{tet}(\beta)\mathrm{tet}(180^\circ-\alpha)$$



Heron iz Aleksandrije, vj. 1. st.

- *Metrica* (o mjerenju, tu je npr. **Heronova formula za površinu trokuta** i **Heronovu metodu za vađenje korijena** na primjeru $\sqrt{720}$, očito je da je znao da se povećanjem broja iteracija povećava točnost),
- *Geometrica* (o površinama)
- *Stereometrica* (o volumenima).

Heronov problem najkraćeg puta

Za zadane točke A i B s iste strane nekog pravca traži se točka C na tom pravcu za koju je $|AC| + |CB|$ najmanja moguća.

Diofant Aleksandrijski (vjerojatno 3. st.)

Čini se da je živio 84 godine — na to upućuje zadatak kojeg oko 500. g. u *Grčkoj antologiji* daje Metrodor:

Bog mu [Diofantu] je dozvolio da bude dječak šestinu svog života; kad je dodana dvanaestina, obrazi mu stekoše bradu; On za njega zapali svjetlo braka nakon sedmine, a u petoj godini nakon ženidbe darova mu sina. No ah! Kasno i jadno dijete, kad dostiže mjeru polovine očeva života, uze ga ledeni grob. Nakon što je četiri godine tražio utjehu u znanosti brojeva, dostignu kraj svog života.

Diofantske jednadžbe

Diofantova *Aritmetika* sastoji se od 150 algebarskih zadataka u 13 „knjiga”, bez prateće opće teorije.

Diofantske jednadžbe

Diofantova *Aritmetika* sastoji se od 150 algebarskih zadataka u 13 „knjiga”, bez prateće opće teorije.
Mnogi zadaci u *Aritmetici* su neodređene jednadžbe, tj. jednadžbe s nejedinstvenim rješenjima. Diofant razmatra samo rješenja koja se mogu zapisati kao pozitivni razlomci. Neki od Diofantovih zadataka još ni danas nisu riješeni, a kopije i prijevodi *Aritmetike* imale su velik utjecaj na mnoge kasnije matematičare.
Tipičan primjer diofantske jednadžbe je traženje pitagorejskih trojki.

Diofantova algebarska notacija

Zbrajanje označava nadopisivanjem, a za oduzimanje koristi vertikalno prekriženi Λ (i on se odnosi na sve članove iza njega).

moderno	Diofant
$x^0 = 1$	$\overset{o}{M}$
x	ζ
x^2	Δ^Υ
x^3	K^Υ
x^4	$\Delta^\Upsilon\Delta$
x^5	ΔK^Υ
x^6	$K^\Upsilon K$
x^{-1}	ζ^x
x^{-2}	Δ^{Υ^x}

$$3x^2 + 12 \quad \Delta^\Upsilon\gamma\,\overset{o}{M}\iota\beta$$

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 1 \quad K^\Upsilon\alpha\zeta\eta\Lambda\Delta^\Upsilon\varepsilon\,\overset{o}{M}\alpha$$

Papus iz Aleksandrije, 4. st.

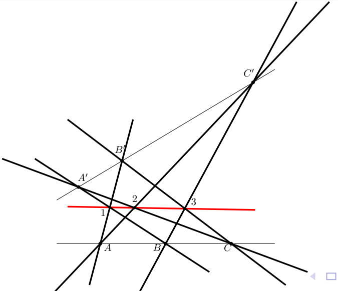
Glavno Papusovo djelo je *Kolekcija* (jedan od glavnih izvora današnjih znanja o antičkoj matematici).

Papus iz Aleksandrije, 4. st.

Glavno Papusovo djelo je *Kolekcija* (jedan od glavnih izvora današnjih znanja o antičkoj matematici).

Teorem (Papusov teorem)

Dana su dva pravca i na njima po tri točke: A, B, C *odnosno* A', B', C'. *Neka je točka* 1 *sjecište* AB' *i* $A'B$, *točka* 2 *sjecište* AC' *i* $A'C$ *te točka* 3 *sjecište* BC' *i* $B'C$. *Tada su točke* 1, 2 *i* 3 *kolinearne.*



Papus je uveo pojam fokusa i direktrise konike. Iskazao je i dokazao

Teorem (Boškovićeva definicija konika)

Neka je dan pravac AB i točka C u ravnini. Neka je iz točke D u istoj ravnini povučen pravac CD i okomica DE na AB i neka je zadan omjer $|CD| : |DE|$. Tada je D na konici, i to na paraboli ako je taj omjer jednak 1, na hiperboli ako je veći od 1 odnosno na elipsi ako je manji od 1.

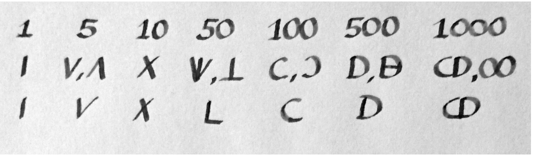
Matematika u rimskoj državi

Rimljani nisu cijenili matematiku, samo su koristili njezine praktične rezultate u građevini, mjeriteljstvu, računanju kamata i udjela u nasljedstvima.

Samostalnih matematičkih doprinosa nije bilo, a mnogi grčki izvori preneseni su, odnosno prevedeni iskrivljeno i bez razumijevanja.

U školama se učilo računanje na prste, u glavi i pomoću (rimskog) abakusa.

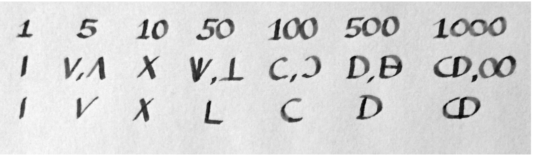
Rimske brojke u doba republike i carstva



Rimski je sustav primarno dekadski, ali sa tzv. sekundarnom bazom 5. Suptraktivan je, tj. aditivan, osim što se u slučaju da se ispred simbola veće vrijednosti nađe simbol manje vrijednosti, ta manja oduzima od veće: IV = IIII.

[1] Jedinica novca i mase. Jedinica duljine bila je *pes*, stopa, i dijelila se na 12 *polices*, palaca, ili na 16 *digiti*, prstiju.

Rimske brojke u doba republike i carstva



Rimski je sustav primarno dekadski, ali sa tzv. sekundarnom bazom 5. Suptraktivan je, tj. aditivan, osim što se u slučaju da se ispred simbola veće vrijednosti nađe simbol manje vrijednosti, ta manja oduzima od veće: IV = IIII.

Rimljani su kod podjele jedinica mase i novca koristili duodecimalne razlomke. Jedan *as*[1] se dijelio na 12 unci (*uncia*). Znak za uncu bila je točka, a za $\frac{1}{2}$ slovo S (*semis*). Ostali razlomci između 1/12 i 1 zapisivali su se aditivno korištenjem navedenih, a svaki je imao i svoj poseban naziv, npr. 2/3 je *bes*, zapisan kao S··.

Kao i kod Grka ranije, korišteni su i egipatski razlomci.

[1] Jedinica novca i mase. Jedinica duljine bila je *pes*, stopa, i dijelila se na 12 *polices*, palaca, ili na 16 *digiti*, prstiju.

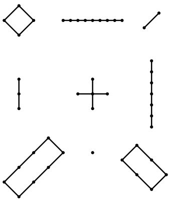
Malo ranokineske povijesti

- najstarije kulture oko rijeka Huang He i Jangce: 3000.–1500. pr. Kr. (iza 2000.: kinesko pismo; iza 1500.: dekadski brojevni sustav)
- već rano razvijena astronomija
- prvi pouzdaniji podaci: iz doba dinastije Zhou (Chou) (11.–5. st. pr. Kr.): Halleyev komet, kalendari, Konfucije i Lao Ce
- kineski zid: kraj 3. st. pr. Kr., prvi car Čin Ši Huangdi

Malo ranokineske povijesti

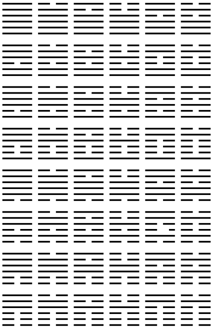
- najstarije kulture oko rijeka Huang He i Jangce: 3000.–1500. pr. Kr. (iza 2000.: kinesko pismo; iza 1500.: dekadski brojevni sustav)
- već rano razvijena astronomija
- prvi pouzdaniji podaci: iz doba dinastije Zhou (Chou) (11.–5. st. pr. Kr.): Halleyev komet, kalendari, Konfucije i Lao Ce
- kineski zid: kraj 3. st. pr. Kr., prvi car Čin Ši Huangdi

Starokineske brojke



Permutacije (varijacije)

I Ching (*Knjiga promjena*), vj. iz 7. st. pr. Kr.
Da simbola, jang (—) i jin (– –) se prvo slažu u $2^3 = 8$ trigrama pa oni u $8^2 = 64$ heksagrama.



Štapićaste brojke

Najkasnije od 5. st. pr. Kr. dekadski pozicijski sustav bez nule: Brojevi se prikazuju pomoću štapića, koji su ujedno računsko pomagalo. Kineski abakus ($\boxed{\text{suanpan}}$) tek kasnije. Iz tog su se razvile kineske $\boxed{\text{štapičaste brojke}}$ (vertikalno: neparne potencije, horizontalno: parne potencije).

Štapićaste brojke

Najkasnije od 5. st. pr. Kr. dekadski pozicijski sustav bez nule: Brojevi se prikazuju pomoću štapića, koji su ujedno računsko pomagalo. Kineski abakus (suanpan) tek kasnije. Iz tog su se razvile kineske štapičaste brojke (vertikalno: neparne potencije, horizontalno: parne potencije).
Od 2. st. pr. Kr. razlikuju se i pozitivni („shi"=blago) i negativni brojevi (*shi*, *fa* —crveni i crni štapići), no krug kao simbol za nulu uveden je tek u 13. st.

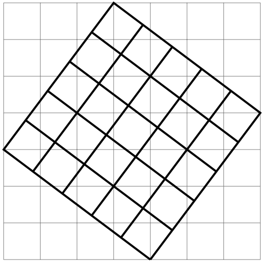
Štapićaste brojke

Najkasnije od 5. st. pr. Kr. dekadski pozicijski sustav bez nule: Brojevi se prikazuju pomoću štapića, koji su ujedno računsko pomagalo. Kineski abakus (suanpan) tek kasnije. Iz tog su se razvile kineske štapičaste brojke (vertikalno: neparne potencije, horizontalno: parne potencije).
Od 2. st. pr. Kr. razlikuju se i pozitivni („shi"=blago) i negativni brojevi (*shi*, *fa* —crveni i crni štapići), no krug kao simbol za nulu uveden je tek u 13. st.
U doba dinastije Han (206. pr. Kr. – 220. AD): procvat matematike, znanosti i tehnike, pridaje se važnost matematičkom obrazovanju; najstariji sačuvani matematički tekstovi; proizvodnja papira; Sunčeve pjege, seizmograf, . . . U 1. st. prodire budizam iz Indije; u 3. st. carstvo se raspalo.

Zhoubi suanjing (*Aritmetika Zhou-gnomona*)

Najstariji potpuno sačuvan kineski matematički tekst (između 100 pr. i poslije Kr.).

Pravilo gougu:



$$c^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + (a-b)^2$$

Devet poglavlja umijeća računanja (*Jiuzhang Suanshu*)

246 zadataka u 9 poglavlja; vrlo utjecajno djelo, kompilacija raznih manuskripta, vjerojatno u prvoj polovici 2. st. A.D.

1. „Mjerenje polja"
2. „Proso i riža"
3. „Raspodjela po proporciji"
4. „Koja širina?"
5. „Konstrukcijski savjeti"
6. „Pošteni nameti"
7. „Višak i manjak"
8. „Pravokutne tablice"
9. „Pravokutni trokuti"

Sustavi linearnih jednadžbi: Metoda *fangčeng*

Zadatak iz 8. knjige *Devet poglavlja*

Iz tri snopa dobrog žita, dva snopa srednjeg i jednog snopa lošeg žita dobije se prinos 39 dou.
Iz dva snopa dobrog žita, tri snopa srednjeg i jednog snopa lošeg žita dobije se prinos 34 dou.
Iz jednog snopa dobrog žita, dva snopa srednjeg i tri snopa lošeg žita dobije se prinos 26 dou.
Koliki je prinos po jednog snopa dobrog, srednjeg i lošeg žita?

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

		3
4	5	2
8	1	1
39	24	39

		3
	5	2
36	1	1
99	24	39

Rješenje je $\frac{99}{36} = 2\frac{3}{4}$ dou za loše, $(24 - 1 \cdot 2\frac{3}{4}) : 5 = 4\frac{1}{4}$ dou za srednje i $(39 - 1 \cdot 2\frac{3}{4} - 2 \cdot 4\frac{1}{4}) : 3 = 9\frac{1}{4}$ dou za dobro žito.

- Zhang Heng (78.–139.) uči da je Zemlja kuglastog oblika i konstrura seizmograf;
- modificirao empirijsko pravilo (omjer površine kvadrata i površine upisanog mu kruga $4:3$) te zaključio da se kvadrat površine kvadrata i kvadrat površine tom kvadratu upisanog kruga odnose kao $8:5$ ($\pi \approx \sqrt{10}$).

- Zhang Heng (78.–139.) uči da je Zemlja kuglastog oblika i konstrura seizmograf;
- modificirao empirijsko pravilo (omjer površine kvadrata i površine upisanog mu kruga 4 : 3) te zaključio da se kvadrat površine kvadrata i kvadrat površine tom kvadratu upisanog kruga odnose kao 8 : 5 ($\pi \approx \sqrt{10}$).
- Liu Hui (3. st.): komentari *Devet poglavlja*; *Matematički priručnik o jednom otoku u moru*: određivanje udaljenosti i veličina nedostupnih objekata.

Primjer

Dvaštapa visine 3 zhang *zabijeni su u zemlju i razmaknuti* 1000 bu. *Jedan štap je bliži udaljenom otoku nego drugi. Ako promatrač stoji* 123 bu *iza prvoga, vidi vrh otoka u liniji s vrhom tog štapa, a ako stoji* 127 bu *iza drugoga, vidi vrh otoka u liniji s vrhom tog drugog štapa. Koliko je visok otok i koliko je daleko od bližeg mu štapa?*

Iterativne metode za rješavanje jednadžbi

- *Zhoubi suanjing* (Aritmetika Zhou-gnomona): metoda za računanje $\sqrt{x}$; kasnije poopćena na $\sqrt[3]{x}$: u *Devet poglavlja*

Starokineski izračun $\sqrt{55225}$

Očito je $\lfloor\sqrt{55225}\rfloor$ troznamenkasti broj (abc),
tj. $55225 = (100a + 10b + c)^2$.

Iterativne metode za rješavanje jednadžbi

- *Zhoubi suanjing* (Aritmetika Zhou-gnomona): metoda za računanje $\sqrt{x}$; kasnije poopćena na $\sqrt[3]{x}$: u *Devet poglavlja*

Starokineski izračun $\sqrt{55225}$

Očito je $\lfloor\sqrt{55225}\rfloor$ troznamenkasti broj (abc),
tj. $55225 = (100a + 10b + c)^2$.
$55225 = \underline{10000a^2} + 100(20a + b)b + (20(10a + b) + c)\,c \Rightarrow a = 2$

Iterativne metode za rješavanje jednadžbi

- *Zhoubi suanjing* (Aritmetika Zhou-gnomona): metoda za računanje $\sqrt{x}$; kasnije poopćena na $\sqrt[3]{x}$: u *Devet poglavlja*

Starokineski izračun $\sqrt{55225}$

Očito je $\lfloor\sqrt{55225}\rfloor$ troznamenkasti broj (abc),
tj. $55225 = (100a + 10b + c)^2$.
$55225 = \underline{10000a^2} + 100(20a + b)b + (20(10a + b) + c)\,c \Rightarrow a = 2$
$15225 = \underline{100(40 + b)b} + (20(20 + b) + c)\,c \Rightarrow b = 3$

Iterativne metode za rješavanje jednadžbi

- *Zhoubi suanjing* (Aritmetika Zhou-gnomona): metoda za računanje $\sqrt{x}$; kasnije poopćena na $\sqrt[3]{x}$: u *Devet poglavlja*

Starokineski izračun $\sqrt{55225}$

Očito je $\lfloor\sqrt{55225}\rfloor$ troznamenkasti broj (abc),
tj. $55225 = (100a + 10b + c)^2$.
$55225 = \underline{10000a^2} + 100(20a + b)b + (20(10a + b) + c)\,c \Rightarrow a = 2$
$15225 = \underline{100(40 + b)b} + (20(20 + b) + c)\,c \Rightarrow b = 3$
$2325 = (460 + c)\,c \Rightarrow c = 5 \Rightarrow \sqrt{55225} = 235.$

Iterativne metode za rješavanje jednadžbi

- *Zhoubi suanjing* (Aritmetika Zhou-gnomona): metoda za računanje $\sqrt{x}$; kasnije poopćena na $\sqrt[3]{x}$: u *Devet poglavlja*

Starokineski izračun $\sqrt{55225}$

Očito je $\lfloor\sqrt{55225}\rfloor$ troznamenkasti broj (abc),
tj. $55225 = (100a + 10b + c)^2$.
$55225 = \underline{10000a^2} + 100(20a + b)b + (20(10a + b) + c)\,c \Rightarrow a = 2$
$15225 = \underline{100(40 + b)b} + (20(20 + b) + c)\,c \Rightarrow b = 3$
$2325 = (460 + c)\,c \Rightarrow c = 5 \Rightarrow \sqrt{55225} = 235.$

- 618.–906. dinastija Tang: novi procvat
- 960.–1278. sjeverna pa južna dinastija Sung: tisak s pomičnim slovima, državni ispiti za službenike, konfucijanizam obvezan
- u 13. st. Mongoli (Marko Polo 1275. u Pekingu)

Razdoblje 7.–13. st.

- tijekom prvog tisućljeća te su metode poopćene na iterativne metode rješavanja kubnih jednadžbi
- vrhunac: Qin Jiushao (13. st.) i njegovih *Devet knjiga o matematici* (*Shushu jiuzhang*, 1247.) – rješava polinomijalne jednadžbe proizvoljnog stupnja metodom *tianyuan* koja je u osnovi Hornerov algoritam

Razdoblje 7.–13. st.

- tijekom prvog tisućljeća te su metode poopćene na iterativne metode rješavanja kubnih jednadžbi
- vrhunac: Qin Jiushao (13. st.) i njegovih *Devet knjiga o matematici* (*Shushu jiuzhang*, 1247.) – rješava polinomijalne jednadžbe proizvoljnog stupnja metodom *tianyuan* koja je u osnovi Hornerov algoritam
- opisao je i opći slučaj kineskog teorema o ostacima
- Sun Zi (3., 4. ili 5. st.): „Tu je nepoznati broj stvari. Ako se prebroje po tri, ostatak je 2. Ako se prebroje po pet, ostatak je 3. Ako se prebroje po sedam, ostatak je 2. Nađi broj stvari." (opisuje i rješenje koje je u osnovi suvremena metoda, za različite ostatke, ali samo modulo 3, 5 i 7)
- Zadatak 100 ptica (5. st.): *Ako jedan pijevac košta* 5 *novčića, jedna kokoš* 3, *a tri pilića zajeno* 1, *koliko pijevaca, kokoši i pilića se može kupiti za* 100 *novčića ako treba kupiti ukupno* 100 *ptica?*

Linearna interpolacija

Zadatak iz 7. knjige *Devet poglavlja*

Imamo zid, debel 5 stopa. Dva štakora se probijaju kroz njeg jedan prema drugom. Pritom veliki štakor prvi dan probije 1 stopu; i mali štakor prvi dan probije 1 stopu. Veliki štakor dalje svaki dan prokopa dvostruko od prethodnog dana, a mali upola manje nego prethodnog dana. Nakon koliko dana će se sresti i koliko je koji prokopao?
Odgovor kaže: $2\frac{2}{17}$ dana treba. Veliki štakor prokopa 3 stope i $4\frac{12}{17}$ palca. Mali štakor prokopa 1 stopu i $5\frac{5}{17}$ palaca.