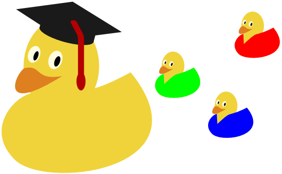
3. tjedan nastave: Platon i Eudoks. Euklidovi *Elementi*

Franka Miriam Brückler



Teetet

Dijalog $\boxed{\textit{Teetet}}$ nosi ime po matematičaru $\boxed{\text{Teetetu iz Atene}}$ (ca. 415.–369. pr. Kr.). Koliko je poznato, on je prvi koji je konstruirao *svih* pet pravilnih poliedara. Danas ih nazivamo i Platonovim tijelima jer ih je Platon opisao u dijalogu $\boxed{\textit{Timej}}$. Platon ih je povezao s četiri „elementa" (kocka – zemlja, oktaedar – zrak, tetraedar – vatra, ikozaedar – voda) i svemirom (dodekaedar).

$\boxed{\text{Platon}}$ (ca. 427.–347. pr. Kr.)

Filozof, oko 387. pr. Kr. osnovao $\boxed{\text{Akademiju}}$.
Na ulazu je navodno pisao moto:

Neka nitko tko ne zna geometriju ovamo ne ulazi.

$\boxed{\text{Platon}}$ (ca. 427.–347. pr. Kr.)

Filozof, oko 387. pr. Kr. osnovao $\boxed{\text{Akademiju}}$.
Na ulazu je navodno pisao moto:

Neka nitko tko ne zna geometriju ovamo ne ulazi.

Platonova idealistička filozofija bitna je u povijesti matematike te i dan danas mnogi matematičari imaju platonistički pogled na matematiku:

kvadrat (pravi, idejni) *vs.* kvadrat (narctani, postojeći u realnom svijetu)

$\boxed{\text{Platon}}$ (ca. 427.–347. pr. Kr.)

Filozof, oko 387. pr. Kr. osnovao $\boxed{\text{Akademiju}}$.
Na ulazu je navodno pisao moto:

Neka nitko tko ne zna <u>geometriju</u> ovamo ne ulazi.

Platonova idealistička filozofija bitna je u povijesti matematike te i dan danas mnogi matematičari imaju platonistički pogled na matematiku:

kvadrat (pravi, idejni) *vs.* kvadrat (narctani, postojeći u realnom svijetu)

matematičke istine postoje neovisno o tome jesmo li ih već otkrili – matematika se ne stvara, nego otkriva

Geometrija se treba koristiti sa što manje fizičkih pomagala.
Dozvoljeni su samo šestar i neoznačeno ravnalo.

Početci matematičke logike

- Prva kultura u kojoj se matematičke tvrdnje dokazuju deduktivno, iz definicija, aksioma i već dokazanih tvrdnji: antička Grčka
- Prvi dokazi: možda TALES IZ MILETA, sigurno PITAGOREJCI

Početci matematičke logike

- Prva kultura u kojoj se matematičke tvrdnje dokazuju deduktivno, iz definicija, aksioma i već dokazanih tvrdnji: antička Grčka
- Prvi dokazi: možda Tales iz Mileta, sigurno pitagorejci
- Platon: zahtjev strogih definicija i dokaza
- Aristotel (384.–322.) – Platonov učenik, učitelj Aleksandra Velikog; razlikuje dvije vrste logičkog zaključivanja: indukciju i dedukciju
- indukcija: zaključivanje s pojedinačnog na opće, bez dodatnih logičkih uvjeta ne mora dati istinit zaključak (primjer?)
- Aristotelov pojam dedukcije ne podudara se s modernim: Njemu je dedukcija argument kojim se iz određenih *istinitih* premisa logičkom nužnošću dobiva zaključak različit od premisa

Kategorički sudovi

- sastoje se od *kvantora* (svaki, nikoji, neki), *subjekta* S koji je s *predikatom* P povezan *kopulom* i eventualno njene negacije
- 4 tipa kategoričkih sudova: Svaki S je P (univerzalno afirmativni), Nikoji S nije P (univerzalno negativni), Neki S su P (partikularno afirmativni), Neki S nisu P (partikularno negativni)
- kategorički sudovi ne moraju imati jednoznačnu istinitosnu vrijednost, to ovisi o konkretnom smislu subjekta i predikata
- *tautologija* je kategorički sud koji je uvijek istinit, npr. Svaki S je S.
- *kontradikcija* je kategorički sud koji nikad nije istinit, npr. Nikoji S nije S.

Silogizam

- *syllogismos* – Aristotelov pojam za dedukciju, ali danas se koristi za poseban oblik dedukcije koji je opisao Aristotel
- deduktivno logičko zaključivanje koje se sastoji od tri kategorička suda: dvije *premise* i jedne *konkluzije*
- da bi to bio silogizam u Aristotelovom smislu dodatno u ta tri suda među njihovih šest S i P imamo ukupno samo tri pojmma
- ovisno o njihovom rasporedu Aristotel razlikuje tri logičke figure silogizma:
- prva figura: (A B), (B C), (A C); druga figura: (A B), (A C), (B C); treća figura: (A C), (B C), (A B)

Primjer

Nikoja ptica nema četiri noge.
Svaka patka je ptica.

Silogizam

- *syllogismos* – Aristotelov pojam za dedukciju, ali danas se koristi za poseban oblik dedukcije koji je opisao Aristotel
- deduktivno logičko zaključivanje koje se sastoji od tri kategorička suda: dvije *premise* i jedne *konkluzije*
- da bi to bio silogizam u Aristotelovom smislu dodatno u ta tri suda među njihovih šest S i P imamo ukupno samo tri pojmma
- ovisno o njihovom rasporedu Aristotel razlikuje tri logičke figure silogizma:
- prva figura: (A B), (B C), (A C); druga figura: (A B), (A C), (B C); treća figura: (A C), (B C), (A B)

Primjer

Nikoja ptica nema četiri noge. Nikoja patka nema četiri noge. Svaka patka je ptica.

Aristotelovi zakoni klasične logike

- Svaki S je S. (Princip identiteta).
- Svaki sud je istinit ili lažan. (Princip isključenja trećega).
- Nikoji sud ne može istovremeno biti istinit i lažan. (Princip isključenja proturječja).

Klasična aristotelovska logika je do modernog doba dominirala znanstvenim metodama dokazivanja, a i danas je temelj većine škola logike.

Aristotelovi zakoni klasične logike

- Svaki S je S. (Princip identiteta).
- Svaki sud je istinit ili lažan. (Princip isključenja trećega).
- Nikoji sud ne može istovremeno biti istinit i lažan. (Princip isključenja proturječja).

Klasična aristotelovska logika je do modernog doba dominirala znanstvenim metodama dokazivanja, a i danas je temelj većine škola logike.

Napomena

Aristotel je pojmu matematika dao moderno značenje.

Eudoks s Knida (oko 408.–355. pr. Kr.)

Matematičar, astronom i liječnik, na Platonovoj akademiji studirao je filozofiju i retoriku.

- opća teorija omjera (*lógos*) i razmjera (*analogía*), sadržanu u EEV;

Eudoks s Knida (oko 408.–355. pr. Kr.)

Matematičar, astronom i liječnik, na Platonovoj akademiji studirao je filozofiju i retoriku.

- opća teorija omjera (*lógos*) i razmjera (*analogía*), sadržanu u EEV;
- metoda ekshaustije (Antifont: prethodnik; Eudoks: preciziranje)

Obje metode predstavljaju starogrčki način „nošenja s limesima”.

Eudoks s Knida (oko 408.–355. pr. Kr.)

Matematičar, astronom i liječnik, na Platonovoj akademiji studirao je filozofiju i retoriku.

- opća teorija omjera (*lógos*) i razmjera (*analogía*), sadržanu u EEV;
- metoda ekshaustije (Antifont: prethodnik; Eudoks: preciziranje)

Obje metode predstavljaju starogrčki način „nošenja s limesima”. Prva je važna jer omogućuje uključivanje (bar nekih) iracionalnih *veličina* u geometrijske analize, bez uporabe iracionalnih *brojeva*:

$$a : x = x : b \Leftrightarrow x = \sqrt{ab}$$

$$a : x = x : y = y : b \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{a^2 b}$$

Eudoksova teorija omjera i razmjera (EEV)

Def. 3–6, EE5

Omjer je odnos među veličinama dviju *istovrsnih* veličina.
Za veličine kažemo da imaju omjer ako je višekratnik jedne veći od druge.

Eudoksova teorija omjera i razmjera (EEV)

Def. 3–6, EE5

Omjer je odnos među veličinama dviju *istovrsnih* veličina.
Za veličine kažemo da imaju omjer ako je višekratnik jedne veći od druge.
Za veličine kažemo da su u istom omjeru, prva prema drugoj i treća prema četvrtoj ako kojim god brojem pomnožimo prvu i treću i bilo kojim drugu i četvrtu, prva dva višekratnika podjednako nadilaze, jednaki su ili su manji od druga dva, u odgovarajućem redoslijedu.[a]

Eudoksova teorija omjera i razmjera (EEV)

Def. 3–6, EE5

Omjer je odnos među veličinama dviju *istovrsnih* veličina.
Za veličine kažemo da imaju omjer ako je višekratnik jedne veći od druge.
Za veličine kažemo da su u istom omjeru, prva prema drugoj i treća prema četvrtoj ako kojim god brojem pomnožimo prvu i treću i bilo kojim drugu i četvrtu, prva dva višekratnika podjednako nadilaze, jednaki su ili su manji od druga dva, u odgovarajućem redoslijedu.[a]
Veličine koje su u istom omjeru zovemo razmjernim (proporcionalnim).

[a] Tj. $a : b = c : d$ znači da za sve m i n: ako $ma < nb$, onda $mc < nd$; $ma = nb$, onda $mc = nd$; i ako $ma > nb$, onda $mc > nd$. Uočimo da se ne zahtijeva sumjerljivost!

Propozicije u EEV uključuju distributivnost množenja brojeva prema zbrajanju i oduzimanju brojeva ili veličina, asocijativnost množenja dva broja i jedne veličine i razne propozicije o omjerima i proporcijama, npr. ako $a : b = c : d$, onda $a : c = b : d$ (EEV16), te ako $x_1 : x_2 = y_1 : y_2$, $x_2 : x_3 = y_2 : y_3$, ..., $x_{n-1} : x_n = y_{n-1} : y_n$, onda $x_1 : x_n = y_1 : y_n$ (EEV22).

Propozicije u EEV uključuju distributivnost množenja brojeva prema zbrajanju i oduzimanju brojeva ili veličina, asocijativnost množenja dva broja i jedne veličine i razne propozicije o omjerima i proporcijama, npr. ako $a : b = c : d$, onda $a : c = b : d$ (EEV16), te ako $x_1 : x_2 = y_1 : y_2$, $x_2 : x_3 = y_2 : y_3$, $\ldots$, $x_{n-1} : x_n = y_{n-1} : y_n$, onda $x_1 : x_n = y_1 : y_n$ (EEV22).
Temeljem Eudoksove teorije omjera i razmjera mogu se dokazati sve uobičajene tvrdnje iz teorije proporcija i sličnosti, no dodatno njegova teorija omogućava uključenje (nekih) iracionalnih veličina.
Prije njega: Moglo se samo dokazati da neke dvije istovrsne veličine nisu sumjerljive te se moglo (Teetet: kvadratne iracionalnosti) uspoređivati njihove kvadrate ili kubove (dakle, mogli su se uspoređivati samo brojevi koji su razlomci ili kvadratni ili kubni korijeni razlomaka).

Eudoksova metoda ekshaustije

Radi se o generalizaciji teorije omjera i razmjera. Naziv je dobila u 17. st., a temelji se na

Eudoksov princip ekshaustije EEX1

Ako su zadane dvije različite (istovrsne) veličine i od veće oduzmemo više od njene polovine, od ostatka više od njegove polovine itd., onda će, ako se postupak ponovi dovoljan broj puta, ostatak biti manji od manje zadane veličine.

Kako biste suvremeno zapisali ovaj princip? Specijalno, ovo znači da geometrijski redovi s pozitivnim kvocijentom manjim od $\frac{1}{2}$ konvergiraju. Ova propozicija se temelji na

4. definicija u EEV

Dvije veličine imaju omjer ako neki višekratnik jedne premašuje drugu.

Arhimedov aksiom!

Menehmo (ca. 380.–320. pr. Kr.)

pokušaj udvostručenja kocke — konike

Menehmo (ca. 380.–320. pr. Kr.)

pokušaj udvostručenja kocke — konike

dva rješenja: parabola i hiperbola; parabola i parabola;

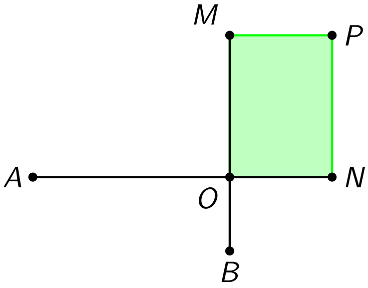
Menehmo (ca. 380.–320. pr. Kr.)

pokušaj udvostručenja kocke — konike

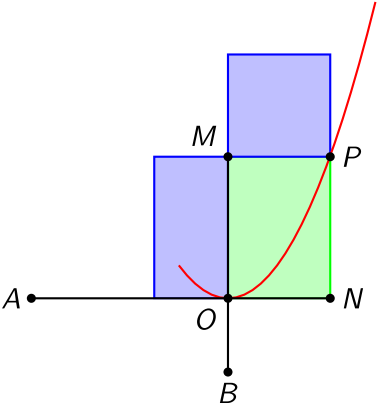
dva rješenja: parabola i hiperbola; parabola i parabola;

dvije međusobno okomite dužine $\overline{OA}$ i $\overline{OB}$, prva neka je dulja od druge, pretpostavimo da je problem riješen:

$$|OB| : |ON| = |ON| : |OM| = |OM| : |OA|$$

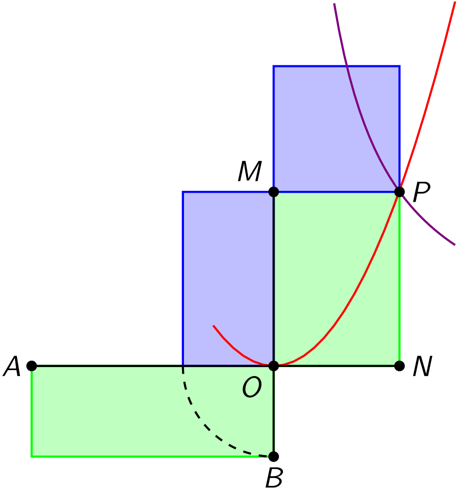


Teorija omjera i razmjera $\Rightarrow |OM| \cdot |OB| = |ON|^2 = |PM|^2 \Rightarrow P$ je točka parabole kojoj je O tjeme, os joj je MB, a $|OB|$ joj je ono što se kasnije stoljećima nazivalo *latus rectum*



Teorija omjera i razmjera $\Rightarrow$

$|OA| \cdot |OB| = |OM| \cdot |ON| = |PM| : |PN|$



Klasični helenizam

- Aleksandar Makedonski (356.–323. pr. Kr., vladao i osvajao 336.–323.)
- 331 pr. Kr.: Aleksandrija
- museion
- Prvi značajni matematičar koji je djelovao u *museionu* bio je Euklid.

Euklid Aleksandrijski (ca. 330. - 275.)

- *Data* (određivanje elemenata geometrijskih likova iz zadanih), *O dijeljenju figura* (u zadanom omjeru), *Optika* (perspektiva) , *Phaenomena* (uvod u matematičku astronomiju), ...
- No, *Elementi* ($\Sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\iota\alpha$, u nastavku EE) su djelo koje je zauvijek promijenilo matematiku ...
- Cilj: sinteza tad poznate matematike u 13 knjiga veličine poglavlja.

Elementi

- $\boxed{\text{EE}}$ su značajni zbog stila pisanja: teoremi (propozicije) su logički poredani tako da svaki slijedi isključivo iz već dokazanih, ili pak iz osnovnih tvrdnji danih na početku, a zaključci se izvode strogo deduktivno
- ideja je izvesti svu matematiku (geometriju) iz malog broja početnih pretpostavki: aksioma i postulata (aksiomi su više općematematičke, a postulati geometrijske pretpostavke)
- do 20. st. EE su bili apsolutni uzor matematičkog djela
- većina knjiga započinju definicijama, a tako i prva . . .

Definicije u EEI

Prva definicija glasi:

Točka je ono što nema dijela.

Dalje se u te prve 23 definicije definiraju dužine, pravci, razne vrste likova, kutovi, krugovi, te naposlijetku

Definicija (Paralelni pravci)

Paralelni pravci su pravci u istoj ravnini koji, koji se, ako ih u oba smjera produljimo u beskonačnost, nikad ne susreću.

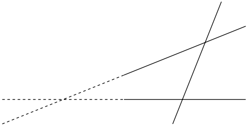
Pet Euklidovih aksioma

1. Dvije stvari koje su jednake[1] trećoj su i međusobno jednake.
2. Ako jednakom dodamo jednako, dobit ćemo jednako.
3. Ako jednakom oduzmemo jednako, dobit ćemo jednako.
4. Ono što se podudara je jednako.
5. Cjelina je veća od dijela.

[1] Podsjetnik: Misli se na jednakost po mjeri, a ne na sukladnost!

Pet Euklidovih postulata

1. Od jedne točke k drugoj povući dužinu.
2. Proizvoljno produljiti dužinu.
3. Oko proizvoljne točke nacrtati kružnicu proizvoljnog polumjera.
4. Svi pravi kutovi[2] su jednaki.
5. Ako pravac siječe dva pravca tako da je zbroj unutrašnjih kuteva s iste strane manji od dva prava kuta, onda se ta dva pravca (ako se dovoljno produže) na toj strani sijeku.



[2] Euklid pravi kut definira ovako: Ako pravac upada na drugi pravac čineći susjedne kutove jednaki, svaki od ta dva kuta je pravi.

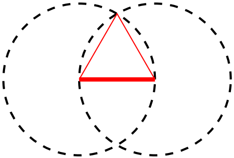
Sadržaj EE

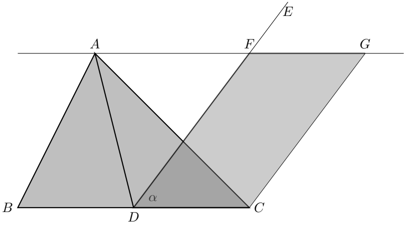
1. EEI: elementarna planimetrija (23+48);
2. EEII: geometrijska algebra (2+14);
3. EEIII: planimetrija kružnice i kruga (11+37);
4. EEIV: pravilni mnogokuti (7+16);
5. EEV: teorija omjera i razmjera (18+23);
6. EEVI: sličnost i geometrijski omjeri (4+33);
7. EEVII: djeljivost u $\mathbb{N}$ (22+39);
8. EEVIII: proporcije s prirodnim brojevima (0+27),
9. EEIX: parni i neparni, prosti i složeni brojevi (0+36);
10. EEX: kvadratne iracionalnosti (16+115);
11. EEXI: elementarna stereometrija (28+39)
12. EEXII: primjena ekshaustije u geometriji (0+18)
13. EEXIII: pravilni poliedri (0+18)

Odabrane propozicije iz EE

Propozicija (EEI1)

Konstrukcija jednakostraničnog trokuta zadane duljine stranice.



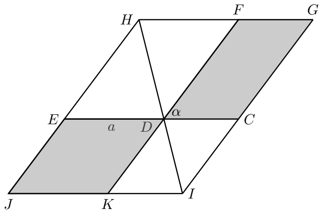


Propozicija (EEI42)

Konstrukcija paralelograma zadanog kuta jednakog zadanom trokutu.

Propozicija (EEI44)

Konstrukcija paralelograma zadanog kuta jednakog zadanom trokutu i zadane duljine stranice.

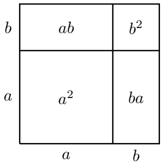


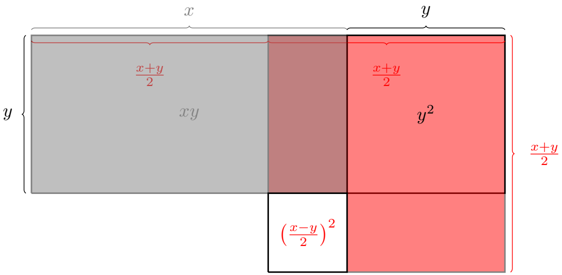
Propozicija (EEI45)

Konstrukcija paralelograma zadanog kuta jednakog zadanom mnogokutu.

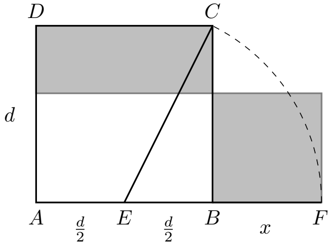
Propozicija (EEII4 , EEII5)

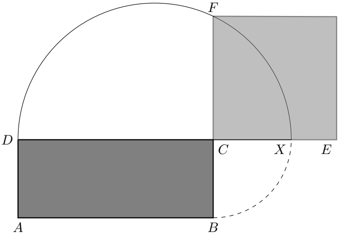
$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2,\ xy = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$





EEII11: konstrukcija dijeljenja dužine u omjeru zlatnog reza;
EEII14: kvadratura proizvoljnog mnogokuta



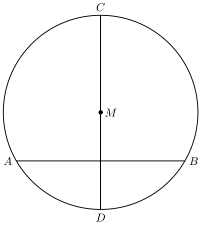


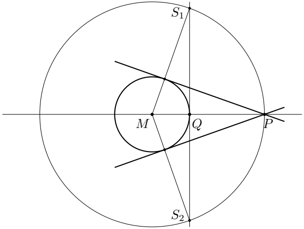
Propozicija (EEIII1)

Određivanje središta zadane kružnice.

Propozicija (EEIII17)

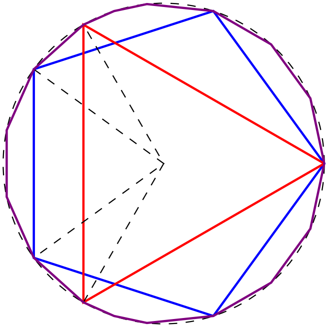
Konstrukcija tangente na kružnicu iz točke izvan kružnice.





Propozicija ($\boxed{\text{EEIV16}}$)

Konstrukcija pravilnog 15-erokuta upisanog kružnici.



EEVI, def. 1

Dva uglata lika zovemo sličnima ako su im odgovarajući unutrašnji kutovi jednaki i odgovarajuće stranice razmjerne.

Propozicija ($\boxed{\text{EEVI2}}$)

Ako se povuče paralela s jednom stranicom trokuta, onda ona stranice trokuta siječe proporcionalno; i, ako su dvije stranice trokuta podijeljene proporcionalno, spojnica točaka podjele je paralelna trećoj stranici trokuta.

Propozicija ($\boxed{\text{EEVI9}}$)

Kako podijeliti dužinu na određeni broj jednakih dijelova?

Propozicija ($\boxed{\text{EEVI12}}$, $\boxed{\text{EEVI13}}$)

Kako za zadane duljine a, b i c konstruirati x sa svojstvom $a : b = c : x$ odnosno. $a : x = x : b$.

EEVII (def. 11, 12 i 13)

Prost broj je broj koji se može izmjeriti samo *jedinicom*.
Dva broja su relativno prosta ako je jedinica jedina njihova zajednička mjera.
Složen broj je broj koji se može izmjeriti drugim brojem.

- EEVII2: Euklidov algoritam za određivanje najveće zajedničke mjere dva broja. Kao korolar Euklid iskazuje: Ako neki broj mjeri dva broja, onda mjeri i njihov zajednički djelitelj.
- EEVII34: Određivanje najmanjeg zajedničkog višekratnika dva broja.

Propozicija ($\boxed{\text{EEIX14}}$)

Ako je neki broj najmanji takav da ga mjere neki prosti brojevi, onda ga ne mjeri nikoji drugi prost broj osim njih.

Propozicija (Euklidov teorem, $\boxed{\text{EEIX20}}$)

Prostih brojeva ima više nego u bilo kojem zadanom skupu (nabrojanih) prostih brojeva.

Ako imamo neke proste brojeve, uzmemo njihov najmanji zajednički višekratnik, dodamo mu 1. Tako smo dobili prost ili složen broj. Ako je prost, očito je veći od svih prostih brojeva od kojih smo krenuli, dakle imamo novi. Ako je složen, onda ima neki djelitelj, ali taj ne može biti nikoji od polaznih prostih brojeva jer bi onda taj morao mjeriti i jedinicu, dakle smo opet našli novi prosti broj.

Definicija (EEX, prve 4 definicije)

Dvije su veličine sumjerljive ako posjeduju zajedničku mjeru, inače su nesumjerljive. Dvije duljine su kvadratno sumjerljive ako su kvadrati nad njima sumjerljivi. Ako je zadana duljina, sve duljine koje su s njom sumjerljive ili kvadratno sumjerljive zovu se racionalne, a ostale iracionalne. Ako je zadan kvadrat, sve njemu sumjerljive površine zovu se racionalne, a ostale iracionalne.

EEX2: Ako dvije veličine nisu sumjerljive, onda u Euklidovom algoritmu nijedan dobiveni ostatak ne dijeli manju (tj. onu s kojom se u dotičnom koraku dijeli).

Definicija (EEX, prve 4 definicije)

Dvije su veličine sumjerljive ako posjeduju zajedničku mjeru, inače su nesumjerljive. Dvije duljine su kvadratno sumjerljive ako su kvadrati nad njima sumjerljivi. Ako je zadana duljina, sve duljine koje su s njom sumjerljive ili kvadratno sumjerljive zovu se racionalne, a ostale iracionalne. Ako je zadan kvadrat, sve njemu sumjerljive površine zovu se racionalne, a ostale iracionalne.

EEX2: Ako dvije veličine nisu sumjerljive, onda u Euklidovom algoritmu nijedan dobiveni ostatak ne dijeli manju (tj. onu s kojom se u dotičnom koraku dijeli).
EEX21 i EEX36: Ako su dvije duljine samo kvadratno sumjerljive, one određuju iracionalni pravokutnik, a stranica njemu jednakog kvadrata je iracionalna dužina koja se zove medijalnom u odnosu na polazne dvije. Njihov zbroj je također iracionalan i zove se binomijal. Moderno iskazano: Ako za $a, b \in \mathbb{Q}$ $\sqrt{a}$ i $\sqrt{b}$ nisu racionalni, onda je $\sqrt{\sqrt{ab}} = \sqrt[4]{ab}$ medijalna, a $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ binomijal.

Zanimljiva je definicija sfere (EEXI, def. 14) kao rotacione plohe koja nastaje rotacijom polukružnice oko promjera.

- $\boxed{\text{EEXI3}}$: Presjek dvije ravnine je pravac.
- $\boxed{\text{EEXI6}}$: Dva pravca okomita na istu ravninu su paralelna.
- $\boxed{\text{EEXI14}}$: Ravnine okomite na isti pravac su paralelne.
- $\boxed{\text{EEXI21}}$: Prostorni kut se može dobiti samo iz ravninskih kutova čiji zbroj je manji od četiri prava kuta.
- $\boxed{\text{EEXI32}}$: Volumeni paralelepipeda iste visine odnose se kao njihove osnovice.

- $\boxed{\text{EEXII2}}$: Krugovi se odnose kao kvadrati nad njihovim promjerima.

$$P_1 : P_2 = d_1^2 : d_2^2$$

- $\boxed{\text{EEXII6}}$: Piramide istih visina se odnose kao njihove baze.
- $\boxed{\text{EEXII7}}$: Trostranu prizmu možemo podijeliti na tri trokutaste piramide istih volumena.
- $\boxed{\text{EEXII10}}$: Stožac je trećina valjka iste baze i visine.
- $\boxed{\text{EEXII11}}$: Valjci, odnosno stošci, istih visina odnose se kao $\boxed{\text{EEXII18}}$: Kugle se međusobno odnose kao trostruki omjeri njihovih dijametara.

$$V_1 : V_2 = d_1^3 : d_2^3$$

EEXIII