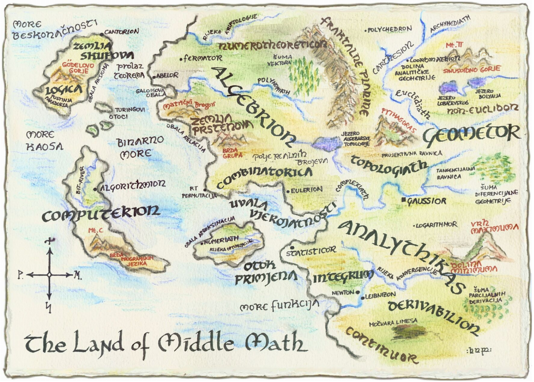
Povijest matematike

1. Pramatematika. Matematika u starom Egiptu i Mezopotamiji.

Franka Miriam Brückler



Slika: © FMB 1999 (CC BY-NC-ND)

Osnovne informacije o kolegiju

- Web-stranica kolegija: `https://www.pmf.unizg.hr/math/predmet/povmat_a`
- e-mail: `fmbpovijest@gmail.com`
- Facebook-grupa: `https://www.facebook.com/groups/3099059513458865/`
- Ocjena iz kolegija formira se temeljem rezultata pismenog i usmenog ispita.
- Pismeni ispit nosi maksimalno 100 bodova.
- Tijekom semestra, u sklopu nastave i bez najave održat će se 4 kratka testa. Svaki kratki test nosi 5 bodova i u slučaju izostanka ne može se nadoknaditi.
- $P =$ zbroj bodova na kratkim testovima s brojem bodova ostvarenim na pismenom ispitu
- Uvjet za pristup usmenom ispitu: $P \geq 50$
- Jednom položen pismeni dio ispita vrijedi za dva pristupa usmenom ispitu.

Pramatematika

Počeci matematike vezani su uz

Pramatematika

Počeci matematike vezani su uz **brojanje**, **geometrijske uzorke** i **mjerenje**.

Najranije tragove matematike možemo naći u obliku zareza u kostima i kamenju (rovaši), te kao ornamente na glinenim posudama iz kamenog doba.

Pramatematika

Počeci matematike vezani su uz **brojanje**, **geometrijske uzorke** i **mjerenje**.

Najranije tragove matematike možemo naći u obliku zareza u kostima i kamenju (rovaši), te kao ornamente na glinenim posudama iz kamenog doba.

- kost iz Lebomba (stara oko 43.000 godina) i
- kost iz Išanga (stara oko 20.000 godina).

Pramatematika

Počeci matematike vezani su uz **brojanje**, **geometrijske uzorke** i **mjerenje**.

Najranije tragove matematike možemo naći u obliku zareza u kostima i kamenju (rovaši), te kao ornamente na glinenim posudama iz kamenog doba.

- kost iz Lebomba (stara oko 43.000 godina) i
- kost iz Išanga (stara oko 20.000 godina).

Nešto kasnije su se kao pomagala za bilježenje brojeva pojavili žetoni, te u južnoj Americi užad s čvorovima (quipu).

Pramatematika

Počeci matematike vezani su uz **brojanje**, **geometrijske uzorke** i **mjerenje**.
Najranije tragove matematike možemo naći u obliku zareza u kostima i kamenju (rovaši), te kao ornamente na glinenim posudama iz kamenog doba.

- kost iz Lebomba (stara oko 43.000 godina) i
- kost iz Išanga (stara oko 20.000 godina).

Nešto kasnije su se kao pomagala za bilježenje brojeva pojavili žetoni, te u južnoj Americi užad s čvorovima (quipu).
Brojanje i brojke vjerojatno su stari tek nekih 10.000 godina.

Pramatematika

Počeci matematike vezani su uz **brojanje**, **geometrijske uzorke** i **mjerenje**.

Najranije tragove matematike možemo naći u obliku zareza u kostima i kamenju (rovaši), te kao ornamente na glinenim posudama iz kamenog doba.

- kost iz Lebomba (stara oko 43.000 godina) i
- kost iz Išanga (stara oko 20.000 godina).

Nešto kasnije su se kao pomagala za bilježenje brojeva pojavili žetoni, te u južnoj Americi užad s čvorovima (quipu).

Brojanje i brojke vjerojatno su stari tek nekih 10.000 godina.

Prva pomagala za računanje bili su pak **prsti** (Aristotel: rasprostranjenost brojanja do deset nije rezultat izbora, nego prije anatomska slučajnost). Računanje se može dokazati tek prije ca. 4000 godina.

Staroegipatska matematika: izvori i brojke

Najstariji sačuvani izvori potječu iz doba tzv. srednjeg carstva (2040.–1794.).

- Rhindov papirus, kojeg je napisao pisar Ahmes oko 1650. pr. Kr.
- Moskovski papirus, koji potječe iz ca. 1850. g. pr. Kr.

Staroegipatska matematika: izvori i brojke

Najstariji sačuvani izvori potječu iz doba tzv. srednjeg carstva (2040.–1794.).

- Rhindov papirus, kojeg je napisao pisar Ahmes oko 1650. pr. Kr.
- Moskovski papirus, koji potječe iz ca. 1850. g. pr. Kr.

Staroegipatska matematika je nastala iz praktičnih potreba državnih službenika: mjeriteljstvo, građevina, skladištenje, porezi, ...

Već prije nego su otkrili izradu papirusa, stari su Egipćani osmislili bilježenje brojeva koristeći dekadski, aditivan, nepozicijski hijeroglifski brojevni sustav:

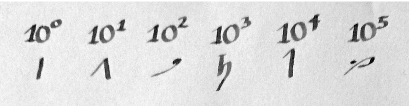
Brojke u starih Egipćana

1	10	100	1000	10.000	100.000	1.000.000

Brojke u starih Egipćana

1	10	100	1000	10.000	100.000	1.000.000

Iz hijeroglifa razvilo se hijeratsko pismo (RP, MP, ...) te odgovarajuće $\boxed{\text{hijeratske brojke}}$:



Kasnije se iz hijeratskog pisma razvilo demotsko pismo, odnosno iz hijeratskih demotske brojke.

Staroegipatska aritmetika

Od brojeva susrećemo prirodne brojeve i pozitivne razlomke.
Zbrajanje i oduzimanje: pregrupiranje znamenki.
Drugi korijen: Samo najjednostavniji slučajevi.

Staroegipatsko množenje i dijeljenje

Primjer ($25 \cdot 72 = 1800$)

1	**72**
2	144
4	288
8	**576**
16	**1152**

Stoga je $25 \cdot 72 = 1800$.

Staroegipatsko množenje i dijeljenje

Primjer ($25 \cdot 72 = 1800$)

$$\begin{array}{rr} \mathbf{1} & \mathbf{72} \\ 2 & 144 \\ 4 & 288 \\ \mathbf{8} & \mathbf{576} \\ \mathbf{16} & \mathbf{1152} \end{array}$$

Stoga je $25 \cdot 72 = 1800$.

Primjer ($184 : 17 = 10\,\frac{14}{17}$)

$$\begin{array}{r|l} 17 & 1 \\ 34 & \mathbf{2} \\ 68 & 4 \\ 136 & \mathbf{8} \end{array}$$

Egipatski zapis razlomaka

- Svi (pozitivni) razlomci prikazivani su kao zbrojevi (različitih) **jediničnih razlomaka**.
- Zapis:  iznad brojke koja predstavlja nazivnik.
- U RP: tablica razlomaka tipa $\frac{2}{2n+1}$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=\frac{2}{5}$$

Egipatski zapis razlomaka

- Svi (pozitivni) razlomci prikazivani su kao zbrojevi (različitih) **jediničnih razlomaka**.
- Zapis:  iznad brojke koja predstavlja nazivnik.
- U RP: tablica razlomaka tipa $\frac{2}{2n+1}$

Može li se svaki pozitivan razlomak zapisati kao zbroj jediničnih? Kako bismo našli takav zapis? Je li takav zapis jedinstven?

Teorem (Fibonacci)

Svaki pozitivan razlomak može se prikazati u egipatskom obliku.

Lema (J. J. Sylvester (19. st.))

Neka je $\frac{p}{q}$ *pozitivan razlomak manji od* 1, $p \neq 1$. *Neka je* $\frac{1}{n}$ *najveći jedinični razlomak manji od* $\frac{p}{q}$. *Tada je* $\frac{p}{q} - \frac{1}{n} = \frac{r}{q\,n}$ *razlomak sa svojstvom* $r < p$.

Teorem (Fibonacci)

Svaki pozitivan razlomak može se prikazati u egipatskom obliku.

Lema (J. J. Sylvester (19. st.))

Neka je $\frac{p}{q}$ *pozitivan razlomak manji od* 1, $p \neq 1$. *Neka je* $\frac{1}{n}$ *najveći jedinični razlomak manji od* $\frac{p}{q}$. *Tada je* $\frac{p}{q} - \frac{1}{n} = \frac{r}{q\,n}$ *razlomak sa svojstvom* $r < p$.

Teorem

Svaki pozitivan razlomak ima beskonačno mnogo egipatskih zapisa.

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}.$$

Algebarski zadaci starih Egipćana

Zadatak (RP31)

Hrpa, njene dvije trećine, njena polovina i njena sedmina čine 33. *Koliko sadrži hrpa?*

Algebarski zadaci starih Egipćana

Zadatak (RP31)

Hrpa, njene dvije trećine, njena polovina i njena sedmina čine 33. *Koliko sadrži hrpa?*

Vidimo da je termin „hrpa” odgovarao pojmu nepoznanice. Uz zadatke s „hrpama”, tipični su i zadaci s omjerima *pefsu*, koji su opisivali kvalitetu piva ili kruha (*pefsu* je omjer količina dobivenog kruha/piva i utrošenog žita).

Zadatak (RP77)

Rečeno ti je da 10 des *pive* (pefsu 2) *treba zamijeniti za kruhove* (pefsu 5). *Koliko kruhova će biti?*
$2\,\text{pefsu} = \frac{10\,\text{des}}{5\,\text{hekat}}$, $5\,\text{pefsu} = \frac{x\,\text{des}}{5\,\text{hekat}}$

Algebarski zadaci starih Egipćana

Zadatak (RP31)

Hrpa, njene dvije trećine, njena polovina i njena sedmina čine 33. *Koliko sadrži hrpa?*

Vidimo da je termin „hrpa” odgovarao pojmu nepoznanice. Uz zadatke s „hrpama”, tipični su i zadaci s omjerima *pefsu*, koji su opisivali kvalitetu piva ili kruha (*pefsu* je omjer količina dobivenog kruha/piva i utrošenog žita).

Zadatak (RP77)

Rečeno ti je da 10 des *pive* (pefsu 2) *treba zamijeniti za kruhove* (pefsu 5). *Koliko kruhova će biti?*

$2\,\text{pefsu} = \frac{10\,\text{des}}{5\,\text{hekat}}$, $5\,\text{pefsu} = \frac{x\,\text{des}}{5\,\text{hekat}}$

Uz takve linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom nalazimo i zadatke koji se svode na čisto kvadratne jednadžbe.

Geometrija u starih Egipćana

Stari su Egipćani znali računati neke površine (trokut, pravokutnik, trapez, krug) i volumene (kocka, kvadar, valjak, krnja kvadratna piramida). Znali su i da je volumen valjka jednak umnošku površine baze i visine.

Poznat je $\boxed{\text{14. zadatak u MP}}$ s korektnim pravilom za izračunavanje volumena krnje uspravne kvadratne piramide.

Geometrija u starih Egipćana

Stari su Egipćani znali računati neke površine (trokut, pravokutnik, trapez, krug) i volumene (kocka, kvadar, valjak, krnja kvadratna piramida). Znali su i da je volumen valjka jednak umnošku površine baze i visine.
Poznat je $\boxed{\text{14. zadatak u MP}}$ s korektnim pravilom za izračunavanje volumena krnje uspravne kvadratne piramide.
Egipćanima je bila jako važna zemljopisna orijentacija hramova. Smjer sjever-jug utvrđivali su promatranjem točaka na horizontu gdje neka zvijezda izlazi i zalazi, a zatim se pomoću $\boxed{\text{konopa}}$ i pitagorejske trojke $(3, 4, 5)$ utvrđivao smjer istok-zapad.

Zadatak (RP41)

Koji je volumen valjkastog silosa za žito promjera 9 *i visine* 10*? Oduzmi* $\frac{1}{9}$ *od* 9*. Ostaje* 8*. Pomnoži* 8 *s* 8*, dobiješ* 64*. Pomnoži* 64 *s* 10*, to je* 640 *kubičnih kubita.*[a]

[a] 1 kubit $\approx$ 52,3 cm.

Zadatak (RP41)

Koji je volumen valjkastog silosa za žito promjera 9 *i visine* 10*? Oduzmi* $\frac{1}{9}$ *od* 9*. Ostaje* 8*. Pomnoži* 8 *s* 8*, dobiješ* 64*. Pomnoži* 64 *s* 10*, to je* 640 *kubičnih kubita.*[a]

[a] 1 kubit $\approx$ 52,3 cm.

Vidimo da su stari Egipćani znali $\boxed{\text{procijeniti}}$ (vrlo vjerojatno bez svijesti da se ne radi o egzaktnoj vrijednosti) površinu kruga kao $\left(\frac{8}{9}d\right)^2$. To odgovara aproksimaciji

$$\pi \approx \frac{32}{9} \approx 3.16.$$

Zadatak (RP41)

Koji je volumen valjkastog silosa za žito promjera 9 *i visine* 10*? Oduzmi* $\frac{1}{9}$ *od* 9*. Ostaje* 8*. Pomnoži* 8 *s* 8*, dobiješ* 64*. Pomnoži* 64 *s* 10*, to je* 640 *kubičnih kubita.*[a]

[a] 1 kubit $\approx$ 52,3 cm.

Vidimo da su stari Egipćani znali $\boxed{\text{procijeniti}}$ (vrlo vjerojatno bez svijesti da se ne radi o egzaktnoj vrijednosti) površinu kruga kao $\left(\frac{8}{9}d\right)^2$. To odgovara aproksimaciji

$$\pi \approx \frac{32}{9} \approx 3.16.$$

Mezopotamija

- Sumerani, Akađani, Babilonci, Asirci, Perzijanci
- od ca. 2500. pr. Kr. svi su koristili varijante klinastoga pisma: glinene pločice
- najviše iz starobabilonskog carstva (ca. 1900.–1600. pr.Kr.)

Mezopotamija

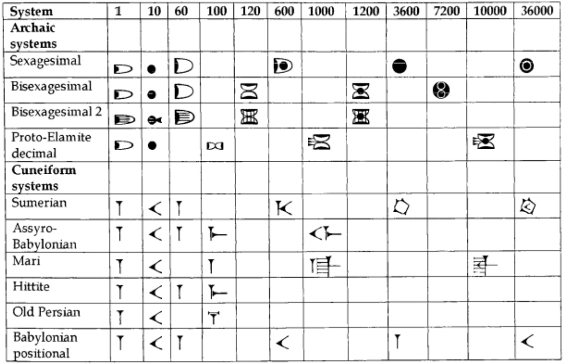
- Sumerani, Akađani, Babilonci, Asirci, Perzijanci
- od ca. 2500. pr. Kr. svi su koristili varijante klinastoga pisma: glinene pločice
- najviše iz starobabilonskog carstva (ca. 1900.–1600. pr.Kr.)
- $\boxed{\text{YBC 7289}}$ s vrlo dobrom aproksimacijom $\sqrt{2}$;
- $\boxed{\text{Plimpton 322}}$ s tablicom pitagorejskih trojki;

Mezopotamija

- Sumerani, Akađani, Babilonci, Asirci, Perzijanci
- od ca. 2500. pr. Kr. svi su koristili varijante klinastoga pisma: glinene pločice
- najviše iz starobabilonskog carstva (ca. 1900.–1600. pr.Kr.)
- $\boxed{\text{YBC 7289}}$ s vrlo dobrom aproksimacijom $\sqrt{2}$;
- $\boxed{\text{Plimpton 322}}$ s tablicom pitagorejskih trojki;
- $\boxed{\text{Nedavno}}$: naći rani oblik primjene trapezne formule.

Općenito je i sumersko-babilonska matematika praktično orijentirana (trgovina, građevina, nasljeđivanje, astronomija), a rješenja zadataka daju se bez argumenata, dokaza ili generalizacije.

Brojke u Mezopotamiji



Izvor: The comparative history of numerical notation

Klasični babilonski brojevni sustav: prvi pozicijski sustav u povijesti, s primarnom bazom 60 i sekundardnom bazom 10, bez znamenke 0.

Babilonska aritmetika

Osnovna tablica množenja veličine 60×60 i nedostatak apsolutne pozicije svakako su bile mane, ali to je prvi pozicijski sustav u povijesti i za znanstveno računanje je sve do indoarapskog dekadskog bio najpogodniji.

Babilonska aritmetika

Osnovna tablica množenja veličine 60×60 i nedostatak apsolutne pozicije svakako su bile mane, ali to je prvi pozicijski sustav u povijesti i za znanstveno računanje je sve do indoarapskog dekadskog bio najpogodniji.

Primjer

$\frac{17}{48} = 0 + \frac{a}{60} + \frac{b}{3600} + \ldots;\ a = 21;\ b = 15;\ \frac{17}{48} = (0; 21; 15)_{60}.$

Babilonska aritmetika

Osnovna tablica množenja veličine 60×60 i nedostatak apsolutne pozicije svakako su bile mane, ali to je prvi pozicijski sustav u povijesti i za znanstveno računanje je sve do indoarapskog dekadskog bio najpogodniji.

Primjer

$\frac{17}{48} = 0 + \frac{a}{60} + \frac{b}{3600} + \ldots;\ a = 21;\ b = 15;\ \frac{17}{48} = (0; 21; 15)_{60}.$

$$a\,b = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2}, \quad \text{odnosno} \quad a\,b = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}$$

Babilonska aritmetika

Osnovna tablica množenja veličine 60×60 i nedostatak apsolutne pozicije svakako su bile mane, ali to je prvi pozicijski sustav u povijesti i za znanstveno računanje je sve do indoarapskog dekadskog bio najpogodniji.

Primjer

$\frac{17}{48} = 0 + \frac{a}{60} + \frac{b}{3600} + \ldots;\ a = 21;\ b = 15;\ \frac{17}{48} = (0; 21; 15)_{60}.$

$$a\,b = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2}, \quad \text{odnosno} \quad a\,b = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}$$

Dijeljenje: množenje s $\boxed{\text{recipročnim brojem}}$.

Babilonska algebra

Mnoge pločice sadrže zadatke koji se svode na linearne i kvadratne, pa čak i kubne jednadžbe i njihove sustave.

Primjer

Površinu i moje nasuprotno skupio sam i dobio $45'$.

Babilonska algebra

Mnoge pločice sadrže zadatke koji se svode na linearne i kvadratne, pa čak i kubne jednadžbe i njihove sustave.

Primjer

Površinu i moje nasuprotno skupio sam i dobio $45'$.
$(x^2 + x = 45/60;\ x = (15' + 45') - 30' = 1 - 30' = 30')$

Primjer

Zbrojio sam površine obiju mojih strana i dobio 0;25,25. *Strana je* 2/3 *strane i* 0;5. $(x^2 + y^2 = \frac{61}{144},\ y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{12})$

Babilonska algebra

Mnoge pločice sadrže zadatke koji se svode na linearne i kvadratne, pa čak i kubne jednadžbe i njihove sustave.

Primjer

Površinu i moje nasuprotno skupio sam i dobio $45'$.
($x^2 + x = 45/60$; $x = (15' + 45') - 30' = 1 - 30' = 30'$)

Primjer

Zbrojio sam površine obiju mojih strana i dobio 0;25,25. *Strana je* $2/3$ *strane i* 0;5. ($x^2 + y^2 = \frac{61}{144}$, $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{12}$)

Babilonska geometrija

Sumersko-babilonska geometrija je inspirirana praktičnim problemima, posebno iz građevine.

Babilonska geometrija

Sumersko-babilonska geometrija je inspirirana praktičnim problemima, posebno iz građevine.

Primjer

Mali kanal. 6 *kuša dug.* 2 *kuša gornja širina.* 1 *kuš donja širina.* $1\frac{1}{2}$ *kuš dubina.* $\frac{1}{3}$ sar *zemlje radni učinak.* 18 *ljudi. Dani su što?* *[...]* 11 *dana i* $\frac{1}{4}$ *su dani.*

Babilonska geometrija

Sumersko-babilonska geometrija je inspirirana praktičnim problemima, posebno iz građevine.

Primjer

Mali kanal. 6 kuša dug. 2 kuša gornja širina. 1 kuš donja širina. $1\frac{1}{2}$ kuš dubina. $\frac{1}{3}$ sar zemlje radni učinak. 18 ljudi. Dani su što? [...] 11 dana i $\frac{1}{4}$ su dani.
$1\,\mathrm{sar} = 1\,\mathrm{nindan}^2$ *kuš*, $1\,\mathrm{nindan} = 12$ *kuš.*
Volumen kanala ispada $(1{,}7;30)_{60}\,\mathrm{sar}$. *S druge strane, 18 ljudi dnevno iskopa* $6\,\mathrm{sar}$ *pa se dobiva navedeno rješenje.*

Izračuni površine i opsega kruga

Najčešće odgovaraju modernoj aproksimaciji $\pi \approx 3$, ponekad $\pi \approx 3\frac{1}{8}$.
Npr., jedna pločica iz razdoblja 1900.–1600. pr. Kr. interpretira se kao tvrdnja da je opseg pravilnog šesterokuta jednaka $\frac{24}{25}$ opsega tom šesterokutu opisane kružnice:

$$r = a_6 \Rightarrow O_6 = 6a_6 = 6r \approx \frac{24}{25}O = \frac{24}{25} \cdot 2r\pi \Rightarrow \pi \approx \frac{25}{8}$$

Pitagora prije Pitagore

Tablica $\boxed{\text{Plimpton 322}}$ sadrži pitagorejske trojke: trojke prirodnih brojeva k, m, n takve da je $k^2 + m^2 = n^2$. Točnije, u toj je tablici u drugom stupcu kraća kateta b trokuta, u trećem hipotenuza c, a u prvom stupcu su kvadrati omjera c/a.

Pitagora prije Pitagore

Tablica $\boxed{\text{Plimpton 322}}$ sadrži pitagorejske trojke: trojke prirodnih brojeva k, m, n takve da je $k^2 + m^2 = n^2$. Točnije, u toj je tablici u drugom stupcu kraća kateta b trokuta, u trećem hipotenuza c, a u prvom stupcu su kvadrati omjera c/a.

Primjer

"4 je duljina i 5 dijagonala. Kolika je širina? Nije poznata. 4 puta 4 je 16. 5 puta 5 je 25. Oduzmeš 16 od 25 i ostaje 9. Što da uzmem da dobijem 9? 3 puta 3 je 9. 3 je širina."

Pitagora prije Pitagore

Tablica $\boxed{\text{Plimpton 322}}$ sadrži pitagorejske trojke: trojke prirodnih brojeva k, m, n takve da je $k^2 + m^2 = n^2$. Točnije, u toj je tablici u drugom stupcu kraća kateta b trokuta, u trećem hipotenuza c, a u prvom stupcu su kvadrati omjera c/a.

Primjer

"4 je duljina i 5 dijagonala. Kolika je širina? Nije poznata. 4 puta 4 je 16. 5 puta 5 je 25. Oduzmeš 16 od 25 i ostaje 9. Što da uzmem da dobijem 9? 3 puta 3 je 9. 3 je širina."

Primjer

Na jednoj starobabilonskoj pločici pronađenoj 1936. kod Suse nalazimo određivanje polumjera kružnice opisane jednakokračnom trokutu sa stranicama duljina 50, 50 i 60: $r = (31{,}15)_{60}$.

Primjer (BM 85 196)

Greda duljine $30'$ *kuš je naslonjena na zid. Gornji kraj je skliznuo za* $6'$ *kuš. Koliko je donji kraj udaljen od zida? Rješenje:* $18'$.

Primjer (BM 85 196)

Greda duljine $30'$ *kuš je naslonjena na zid. Gornji kraj je skliznuo za* $6'$ *kuš. Koliko je donji kraj udaljen od zida? Rješenje:* $18'$.

Babilonci su poznavali i Talesov teorem i koristili ga u kombinaciji s Pitagorinim, npr. za određivanje visine kružnog odsječka nad tetivom poznate duljine u krugu poznatog promjera. Neki su pak zadaci rješavani koristeći proporcionalnost ekvivalentnu kotangensu.

Primjer (BM 85 196)

Greda duljine $30'$ *kuš je naslonjena na zid. Gornji kraj je skliznuo za* $6'$ *kuš. Koliko je donji kraj udaljen od zida? Rješenje:* $18'$.

Babilonci su poznavali i Talesov teorem i koristili ga u kombinaciji s Pitagorinim, npr. za određivanje visine kružnog odsječka nad tetivom poznate duljine u krugu poznatog promjera. Neki su pak zadaci rješavani koristeći proporcionalnost ekvivalentnu kotangensu.

Heronova metoda za $\sqrt{.}$

$$a_{i+1} = \frac{1}{2}\left(a_i + \frac{n}{a_i}\right) \to \sqrt{n}$$

Heronova metoda za $\sqrt{\cdot}$

$$a_{i+1} = \frac{1}{2}\left(a_i + \frac{n}{a_i}\right) \to \sqrt{n}$$

Primjer

$$\sqrt{2} = ?$$

$1^2 \leq 2 \leq 2^2 \Rightarrow$ *prva aproksimacija za* $\sqrt{2}$ *je* $1 = \lfloor \sqrt{2} \rfloor$.

Druga aprosimacija je $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = 1{,}5$.

Heronova metoda za $\sqrt{\cdot}$

$$a_{i+1} = \frac{1}{2}\left(a_i + \frac{n}{a_i}\right) \to \sqrt{n}$$

Primjer

$$\sqrt{2} = ?$$

$1^2 \leq 2 \leq 2^2 \Rightarrow$ *prva aproksimacija za* $\sqrt{2}$ *je* $1 = \lfloor \sqrt{2} \rfloor$.
Druga aprosimacija je $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = 1{,}5$. *Nastavljamo dalje:*

$Korak$	a	$\sqrt{n} \approx$	$(.)_{60}$
1	1	$\frac{3}{2}$	$1; 30$
2	$\frac{3}{2}$	$\frac{17}{12}$	$1; 25$
3	$\frac{17}{12}$	$\frac{577}{408}$	$1; 25{,}51{,}10(,35,\ldots) \approx 1; 25{,}51{,}11$
4	$\frac{577}{408}$	$\frac{665857}{470832}$	$1; 25{,}51{,}10(,7,\ldots) \approx 1; 25{,}51{,}10$