Povijest matematike

riješen pismeni ispit (11. rujna 2024.)

F. M. Brčkler

1. (10) U svakom od sljedećih 10 pitanja 0–4 ponuđena odgovora su točna. Označite točne odgovore. Puni bod za pojedino pitanje ostvarujete samo ako nijedna oznaka nije kriva.

   (a) Što od sljedećeg je empirijski bilo poznato Babiloncima (u starobabilonskom carstvu)?

   ☑ Heronova metoda za korjenovanje. ☐ Decimalni razlomci.
   ☑ Talesov poučak o kutu nad promjerom kruga. ☐ Postojanje 5 Platonovih tijela.

   (b) Broj koji je u akrofonskom (atičkom) brojevnom sustavu predstavljen brojkom 𐅅ΔΠ, u alfabetskom (miletskom) brojevnom sustavu bio bi zapisan brojkom ...

   ☐ $\overline{\zeta\nu\omega}$. ☐ $\overline{\gamma\gamma\gamma\gamma\gamma\beta\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha}$. ☑ $\overline{\varphi\iota\varepsilon}$. ☐ $\overline{\varepsilon\alpha\varepsilon}$.

   (c) Za ranu povijest infinitezimalnog računa bitni su sljedeći matematičari:

   ☐ Tales iz Mileta ☑ Zenon iz Eleje ☑ Eudoks s Knida ☐ Klaudije Ptolemej

   (d) Al-Hvarizmi je ...

   ☑ djelovao u Kući mudrosti. ☐ živio u 7. st.
   ☑ utemeljio algebru. ☐ uveo izraz algoritam.

   (e) Omar Khayyam je bio matematičar i ...

   ☐ liječvnik ☐ pravnik ☐ kemičar ☑ pjesnik

   (f) Leonardo iz Pise je napisao ...

   ☑ *Liber Abaci* ☐ *Liber de Ludo Aleae* ☐ *Practica Trigonometriae* ☑ *Flos*

   (g) Među renesansnim matematičarima, sljedeći je/su jedno vrijeme djelovao/li u Zadru:

   ☐ Regiomontanus ☑ fra Luca Pacioli ☐ Michael Stifel ☐ Rafael Bombelli

   (h) Prema Descartesovom pravilu, mogući brojevi pozitivnih realnih rješenja jednadžbe $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$ su

   ☐ 1 ☑ 2 ☐ 3 ☑ 4

   (i) Prvu pojavu onog što danas nazivamo konvergentnim nepravim integralom nalazimo kod

   ☐ J. Wallisa ☑ E. Torricellija ☐ R. Descartesa ☐ I. Barrowa

   (j) Cantor je dokazao prebrojivost ...

   ☑ skupa svih algebarskih brojeva ☐ skupa svih transcendentnih brojeva
   ☐ segmenta realnih brojeva (dužine) ☐ kvadrata

2. (20) Nadopunite sljedećih 10 rečenica:[1]

   (a) Zapisati neki (pozitivni) razlomak na egipatski način znači zapisati ga kao *zbroj različitih jediničnih razlomaka*.

   (b) Naziv *quadrivium* označava sljedeće matematičke discipline: *aritmetiku, geometriju, astronomiju, glazba*.

   (c) Ako Euklidov algoritam primijenjen na dvije istovrsne veličine ne staje, nego se iza svakog koraka može nastaviti, te dvije veličine su *nesumjerljive*.

   (d) Hipokratovi mjeseci definiraju se kao *geometrijski likovi omeđeni lukovima dviju kružnica (različitih središta i polumjera) koji se mogu kvadrirati ravnalom i šestarom*.

   (e) Konike je otkrio *Menehmo*, a nazive im je dao *Apolonije iz Perge*.

   (f) Naziv *Sulvasutre* u prijevodu znači *pravila konopa*.

   (g) Najstariji poznat dokaz divergencije harmonijskog reda potječe od *N. d'Oresmea*.

   (h) Kompleksne brojeve, kao druge korijene negativnih brojeva, prvi put susrećemo u 15. stoljeću kod *G. Cardana*.

   (i) Hrvatski znanstvenik *M. Getaldić* neposredni je prethodnih utemeljenja analitičke geometrije.

   (j) Diferencijalni i integralni račun na Newtonov način naziva se *računom fluksija*.

3. (30) Na vlastitom papiru napišite kratki sastavak (1–2 stranice) na temu:

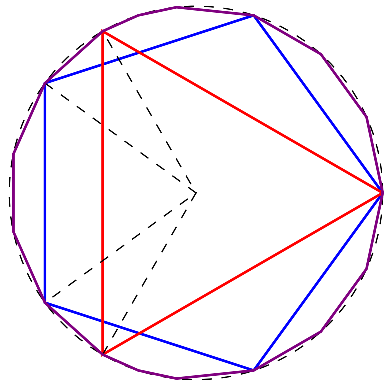
„Algebarske jednadžbe kroz povijest".

Glavne natuknice:

- Egipat i Babilon — linearne i kvadratne jednadžbe izražene riječima
- Al-Hvarizmi, Al-Karadži, Omar Khayyam i dr. arapski matematičari — utemeljenje algebre kao discipline koja se bavi algebarskim jednadžbama, klasifikacije do stupnja 3 (zahtjev pozitivnih rješenja i koeficijenata), rješenja linearnih i kvadratnih jednadžbi u radikalima
- Kina — numeričke metode korjenovanja, Hornerov algoritam
- talijanska renesansa (del Ferro, Tartaglia, Cardano, Ferrari) — rješenja jednadžbi 3. i 4. stupnja u radikalima
- 17. st. iskaz osnovnog teorema algebre koji je krivo usmjerio dokaz na dokaz da su rješenja kompleksna, Descartesovo pravilo i popularizacija činjenice da ako je c rješenje, iz jednadžbe se može izlučiti faktor $x - c$
- Gauß i Argand — dokaz osnovnog teorema algebre
- Abel i Galois (ali i Lagrange, Ruffini) — opća jednadžba stupnja 5 ili većeg nema rješenja u radikalima

[1] Za sva pitanja u kojima treba navesti ime europskog matematičara, traži se pravilno napisano prezime i bar jedan inicijal.

4. (10) Euklidova konstrukcija pravilnog 15-erokuta (s dokazom ispravnosti konstrukcije).



Ako su u kružnici upisani (konstruirani) pravilni trokut i peterokut sa zajedničkim vrhom, spojnica dvaju susjednih od ostalih vrhova ta dva lika je stranica pravilnog petnaesterokuta upisanog u istu kružnicu. Naime, kako se vidi sa slike, toj spojnici odgovara središnji kut koji je pola od razlike središnjih kutova pravilnog trokuta i peterokuta, tj. kut $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{5}\right) = \frac{2\pi}{15}$.

5. (10) Na Arhimedov način pokažite da je omjer opsega i promjera kruga između $3\frac{10}{71}$ i $3\frac{1}{7}$.

U nultom ($n = 0$) *koraku danom krugu upišemo i opišemo pravilni šesterokut. Neka je u* n*-tom koraku* o_n *opseg upisanog, a* O_n *opseg opisanog* $6 \cdot 2^n$*-erokuta (u svakom koraku se udvostručuje broj stranica). Početne su vrijednosti* $o_0 = 6$ *(polumjera kruga) i* $O_0 = 4\sqrt{3}$ *(polumjera kruga).*

Uočimo da za sve n *vrijedi* $o_0 < o_1 < \ldots < o_n < \ldots < o < \ldots < O_n < \ldots < O_1 < O_0$*, gdje je* o *opseg kruga (bez smanjenja općenitosti neka je polumjer tog kruga* 1*).*

Arhimed je uočio sljedeće rekurzivne veze među opsezima upisanih i opisanih $6 \cdot 2^n$*-erokuta u dva uzastopna koraka:* $O_{n+1} = \frac{2O_n\, o_n}{O_n + o_n}$, $o_{n+1} = \sqrt{o_n\, O_{n+1}}$*. U četiri koraka dobijemo da su ti opsezi (dakle, procjene za* $o = 2\pi r = 2\pi$*):*

n	O_n	o_n
0	$4\sqrt{3}$	6
1	$48 - 24\sqrt{3} \approx 6{,}43078$	$\sqrt{288 - 144\sqrt{3}} \approx 6{,}211657$
2	$6{,}3193195\ldots$	$6{,}265257\ldots$
3	$6{,}292172\ldots$	$6{,}2787\ldots$
4	$6{,}2854\ldots$	$6{,}28206\ldots$

Budući da je $2 \cdot 3\frac{10}{71} = \frac{446}{71} = 6{,}28169\ldots$ *i* $2 \cdot 3\frac{1}{7} = \frac{44}{7} = 6{,}2857\ldots$*, vidimo da to odgovara našem računu. Razlika u iznosima potječe od toga što mi koristimo decimalni zapis brojeva, dok je Arhimed znao računati samo s razlomcima i eventualno seksagezimalno, ali je zasigurno u svakom koraku rezultate opisivao razlomcima.*

6. (10) Dva igrača igraju igru na sreću. Igra se po krugovima i u svakom krugu jednako je vjerojatno da u njemu pobijedi prvi ili drugi igrač. Na početku igre obojica su uložili jednake iznose, svaki po 6,40 € i dogovorili da će taj novac, dakle ukupno 12,80 €, osvojiti onaj od njih koji prvi dođe do ukupno 15 pobjeda. Igra je morala biti prekinuta u trenutku kad je prvi imao 11, a drugi 10 pobjeda po krugovima. Koliko novaca treba dobiti prvi, a koliko drugi igrač?

Prvom igraču treba još 4*, a drugom još* 5 *pobjeda do ukupne pobjede. Da se igra mogla nastaviti, završila bi najkasnije za* 8 *krugova (ako bi* 4 *puta uzastopno pobijedio drugi pa onda* 4 *puta uzastopno prvi).*

U tih 8 *krugova moglo bi nastupiti* 2^8 *jednako vjerojatnih nizova pobjeda. Ako je* k *od njih u korist prvog igrača, a preostalih* l *u korist drugog, pravedna podjela uloga je u omjeru* $k : l$*.*

Gledamo 8*. red Pascalovog trokuta, u kojem su redom brojevi* 1*,* 8*,* 28*,* 56*,* 70*,* 56*,* 28*,* 8*,* 1*. Pretpostavimo da pobjede prvog bilježimo s* A*, a pobjede drugog s* B*. U korist prvog igrača je ako se slovo koje predstavlja njega (*A*) u nizu od 8 slova pojavljuje bar* 4 *puta. Npr.,* 70 *slučajeva imamo niz s po 4 slova* A *i* B*, što znači pobjedu prvog igrača. Stoga je pravedna podjela uloga u omjeru* $(70 + 56 + 28 + 8 + 1) : (56 + 28 + 8 + 1) = 163 : 93$*. Dakle, prvi treba dobiti* 8,15 *€, a drugi* 4,65 *€.*

7. (10) Riemannova hipoteza.

To je do danas nedokazana hipoteza iz (analitičke) teorije brojeva: Sve netrivijalne nultočke ζ*-funkcije imaju realni dio jednak* $\frac{1}{2}$*.*

Pritom, ζ*-funkcija je proširenje funkcije definirane s*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

za realne brojeve $s > 1$ *do holomorfne funkcije s domenom* $\mathbf{C} \setminus \{1\}$*.*

Riemann je znao da ta funkcija ima beskonačno mnogo trivijalnih nultočki, koje negativni parni brojevi, i da to su jedine nultočke s negativnim realnim dijelom, te da ne postoje ni nultočke s realnim dijelom većim od 1*. Sve ostale nultočke za koje je znao imale su realni dio jednak* $\frac{1}{2}$*, i do danas nisu nađene drugačije.*