Povijest matematike

riješen pismeni ispit (28. kolovoza 2024.)

F. M. Brčkler

1. (10) U svakom od sljedećih 10 pitanja 0–4 ponuđena odgovora su točna. Označite točne odgovore. Puni bod za pojedino pitanje ostvarujete samo ako nijedna oznaka nije kriva.

   (a) U Rhindovom papirusu nalazimo ...

   ☐ postupak za računanje volumena krnje kvadratne piramide.

   ☑ tablicu s egipatskim zapisom nekih razlomaka.

   ☐ aproksimaciju broja π.

   ☐ hijeroglifske brojke.

   (b) Označite primjere Euklidovih aksioma (ne postulata):

   ☐ Točka je ono što nema dijela.

   ☑ Ako jednakom dodamo jednako, dobit ćemo jednako.

   ☐ Svi pravi kutovi su jednaki.

   ☑ Cjelina je veća od dijela.

   (c) Arhimed iz Sirakuze ...

   ☐ je živio u 4. st. pr. Kr. ☐ je dokazao formulu za volumen valjka.

   ☐ je riješio problem kvadrature kruga. ☐ je izračunao π na 10 decimala.

   (d) Poredajte po godini rođenja, od starijeg prema mlađem, matematičare Talesa iz Mileta (T), al-Hvarizmija (H), Brahmaguptu (B) i Liu Huija (L).

   ☐ THBL ☑ TLBH ☐ HTBL ☐ BTHL

   (e) Gerbert iz Aurillaca je ...

   ☑ postao papa Silvestar II. ☑ bio upoznat s indoarapskim brojkama.

   ☑ bio optužen za pakt s vragom. ☐ živio nakon Fibonaccija.

   (f) Napierov logaritam ...

   ☐ je logaritam s bazom e. ☑ je osmišljen u prvoj polovici 17. st.

   ☐ je logaritam s bazom 1/e. ☐ je definiran kao inverz eksponencijalne funkcije.

   (g) *Ars Conjectandi* ...

   ☐ je napisao Johann Bernoulli. ☑ sadrži prvu verziju zakona velikih brojeva.

   ☐ je objavljena u 16. st. ☐ sadrži prvu pojavu normalne razdiobe.

   (h) Bar jedan par prijateljskih brojeva našao je

   ☑ Tabit ibn Kurra ☑ P. de Fermat ☑ R. Descartes ☑ L. Euler

   (i) Janos Bolyai je ...

   ☐ dokazao da postoje hiperboličke geometrije. ☐ bio alkoholičar.

   ☐ dokazao da je Euklidov postulat o paralelama teorem. ☑ umro u 19. stoljeću.

(j) Niels Henrik Abel je poznat po tom što je prvi ...

☐ dokazao da nijedna jednadžba 5. stupnja nije rješiva u radikalima.

☑ dokazao da postoje jednadžbe 5. stupnja koje nisu rješive u radikalima.

☐ našao rješenje jednadžbi 5. stupnja u radikalima.

☐ našao primjer jednadžbe 5. stupnja rješive u radikalima.

2. (20) Nadopunite sljedećih 10 rečenica:[1]

   (a) Broj kojeg danas zapisujemo kao 7210, u klasičnom babilonskom brojevnom sustavu bio bi zapisan brojkom VV <.

   (b) Tema III. knjige Euklidovih *Elemenata* je *planimetrija kružnice i kruga*.

   (c) Trigonometriju kao samostalnu matematičku disciplinu utemeljio (odvojio) je u 13. stoljeću matematičar *Nasir al-Tusi*.

   (d) Starokineska metoda *fang čeng* danas se zove *Gaußova metoda eliminacija*.

   (e) Alkuin iz Yorka bio je savjetnik znamenitog vladara *Karla Velikog*.

   (f) Abu al-Wafa je jedini poznati matematičar arapskog doba u čijem jednom djelu se mogu naći *negativni* brojevi.

   (g) Izraz koeficijent (u jednadžbama) uveo je *François Viète (Vieta)*.

   (h) Prema osnovnom teoremu algebre, jednadžba $2x^7 - 5x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ ima najviše 7 realnih rješenja, od kojih je prema Descartesovom pravilu najviše 2 pozitivno.

   (i) Riemannova hipoteza spada u sljedeću matematičku disciplinu: *teorija brojeva*.

   (j) Osnovni teorem aritmetike prvi je potpuno precizno dokazao *Carl Friedrich Gauß*.

3. (30) Na vlastitom papiru napišite kratki sastavak (1–2 stranice) na temu:

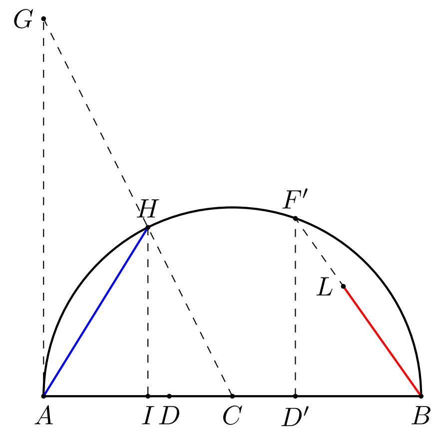
,,Kako je nastala teorija skupova¿‘.

Glavne natuknice:

- rane ideje o beskonačnosti (antika, srednji vijek)
- ideja beskonačnih skupova i prividni paradoksi (Galileo, Bolzano)
- Cantor — definicija jednakobrojnosti, prebrojivost, je li $\mathbb{R}$ prebrojiv — nije, jednakobrojnost dužine i kvadrata, osnovni Cantorov teorem teorije skupova, hipoteza kontinuuma
- tri velika paradoksa (Burali-Forti, Russell, Cantor) — ima li teorija skupova smisla?
- aksiomatizacija

[1] Za sva pitanja u kojima treba navesti ime europskog matematičara, traži se pravilno napisano prezime i bar jedan inicijal.

4. (10) Opišite (uz prikladni crtež) Euklidovu konstrukciju bridova dodekaedra i ikozaedra upisanih u istu sferu.



Neka je dan promjer sfere $\overline{AB}$. Ucrtajmo polukružnicu nad tim polumjerom, odredimo središte C te ucrtamo polumjer $\overline{CE}$ okomit na promjer $\overline{AB}$.

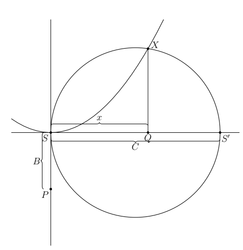
Za konstrukciju brida pravilnog ikozaedra potrebno je prvo konstruirati okomicu na $\overline{AB}$ u jednom od krajeva, recimo u A, te na nju nanijeti duljinu promjera da dobijemo točku G. Tu točku spojimo sa središtem C, ta spojnica siječe polukružnicu u točci H. Tada je $\overline{HA}$ (plavo na slici) brid pravilnog ikozaedra upisanog u sferu promjera $\overline{AB}$.

Za brid pravilnog dodekaedre potrebno je $\overline{AB}$ podijeliti na tri jednaka dijela (točkama D i D'). Iz jedne od njih, recimo D', povuče se okomica na $\overline{AB}$ i odredi sjecište F' te okomice s polukružnicom. Sada točkom L u omjeru zlatnog reza podijelimo $\overline{F'B}$ te je $\overline{BL}$ (crveno na slici) brid pravilnog dodekaedra upisanog u sferu promjera $\overline{AB}$.

5. (10) Fibonacci je našao jed(i)no realno rješenje Omar Khayyamove jednadžbe $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. Svedite ju na oblik bez kvadratnog člana i dobivenu jednadžbu riješite na Omar Khayyamov način.

Prvo supstitucijom $y = x - \frac{2}{3}$ eliminiramo kvadratni član i dobijemo $3y^3 + 26y = \frac{704}{9}$. Khayyam je, kao i al-Hvarizmi, normirao jednadžbe, dakle rješavamo $y^3 + \frac{26}{3}y = \frac{704}{27}$.

Uzimamo da je $B = \sqrt{\frac{26}{3}}$ i $C = \frac{352}{117}$ (dakle, $b = B^2$, $c = B^2C$). Uzmimo kružnicu promjera C i parabolu s tjemenom S na toj kružnici. Pritom je os parabole tangenta na kružnicu, a razmak fokusa i ravnalice jednak je $\frac{B}{2}$. Neka je X sjecište kružnice i parabole, Q projekcija X na promjer kružnice $\overline{SS'}$ te P točka na osi parabole sa svojstvom $|SP| = B$. Tada je $y = |SQ|$ rješenje jednadžbe $y^3 + \frac{26}{3}y = \frac{704}{27}$.



6. (10) Biografija Évariste Galoisa.

Rođen 1811. u republikanski nastrojenoj obitelji. Do dvanaeste godine podučavala ga je majka, a zatim je pohađao internat. Kad je imao 16 godina mu je dozvoljeno da upiše tečaj matematike, koja ga je ubrzo tako očarala da ostaloj nastavi više nije posvećivao pažnju.

Pokušao se 1828. upisati na École Polytéechnique*, ali zbog nedovoljne pripremljenosti nije uspio. Tad se pošeo baviti pitanjem rješivosti algebarskih jednadžbi u radikalima. Kao recenzent za njegovih nekoliko članaka imenovan je Cauchy, koji je te radove zagubio, i nikad više nisu pronađeni. Nakon što mu se ubio otac, ponovno se neuspješno pokušao u pisati na* École Polytéechnique*, pri čemu je navodno ispitivaču bacio spužvu u lice. Upisao se na* École Normale *i nastavio sa svojim znanstvenim radom. Sljedeći članak mu je ponovno zagubljen te je postao uvjeren da je problem sustav koji onemogućava genijalne pojedince.*

Stoga se uključio u republikanske pobune tijekom i nakon srpanjske revolucije 1830. U dva je navrata uhapšen, jednom zbog navodne prijetnje kralju tijekom jedne proslave, no taj put je oslobođen optužbe, a zatim u srpnju 1831. na dan Bastille zbog nošenja zabranjene uniforme Nacionalne garde i oružja. Tijekom boravka u zatvoru zaljubio se u kćer zatvorskog liječnika, koja se od njega distancirana kad je pušten iz zatvora 1832. Ubrzo zatim izazvan je na dvoboj, nominalno za obranu njezine časti, ali vjerojatno politički motivirano, u kojem je poginuo.

7. (10) Objasnite grešku u Lagrangeovoj definiciji derivacije i dajte primjer funkcije za koju ta definicija nije dobra.

Lagrange je derivaciju $f'(x)$ od funkcije f u točki x definirao kao koeficijent linearnog člana u Taylorovom razvoju funkcije f oko točke x.

Ta definicija nije dobra jer postoje funkcije koje posjeduju prvu (i više) derivacije u x, ali se s pripadnim Taylorovim razvojem ne podudaraju nigdje osim u točki x. Primjer je Cauchyjeva funkcija zadana kao

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Ona nije nulfunkcija, ali je njezin Taylorov red oko nule jednak nulfunkciji.