Povijest matematike

riješeni pismeni ispit (21. lipnja 2024.)

F. M. Brčkler

Napomena. Za rješenje 3. zadatka navedene su samo najbitnije natuknice.

1. (10) U svakom od sljedećih 10 pitanja 0–4 ponuđena odgovora su točna. Označite točne odgovore. Puni bod za pojedino pitanje ostarujete samo ako nijedna oznaka nije kriva.

   (a) Metoda korjenovanja u kojoj se svaka sljedeća aproksimacija izračunava kao pola zbroja prethodne aproksimacije i recipročne prethodne aproksimacije pomnožene s brojem koji se korjenuje poznata je pod nazivom (nazivima) ...

   ☐ egipatska. ☑ babilonska. ☐ Arhimedova. ☑ Heronova.

   (b) U atenskom razdoblju djelovao je (djelovali su):

   ☐ Apolonije ☑ Eudoks ☐ Euklid ☐ Pitagora

   (c) Trigonometrija je ...

   ☐ nastala u klasičnom helenizmu. ☑ isprva imala formu računa tetiva.
   ☐ sistematizirana u Indiji. ☑ starija od dekadskog pozicijskog sustava.

   (d) Metodu fang čeng danas nazivamo ...

   ☐ Hornerovim algoritmom. ☐ linearnom interpolacijom.
   ☐ metodom najmanjih kvadrata. ☑ Gaußovom metodom eliminacija.

   (e) Nula (kao znamenka) ...

   ☐ se pojavljuje u Sulvasutrama. ☑ se pojavljuje u rukopisu Bakshali.
   ☑ se pojavljuje na hramu u Gwalioru. ☐ se pojavljuje kod Aryabhate I.

   (f) Baza Napierovog logaritma je ...

   ☐ 10. ☐ e. ☐ 1/e. ☐ 2.

   (g) Osim po utemeljenju infinitezimalnog računa, Leibniz je poznat i po tome što je

   ☑ uveo binarne brojke. ☐ imao ideju simboličke algebre.
   ☑ među prvima koristio determinante. ☑ uveo simbol $\int$.

   (h) Évariste Galois je uveo (utemeljio)...

   ☐ neeuklidsku geometriju. ☐ teoriju grafova. ☑ teoriju grupa. ☐ topologiju.

   (i) Izraz 'vektor' potječe od ...

   ☑ W. R. Hamiltona. ☐ C. F. Gaußa. ☐ J. J. Sylvestera. ☐ J.-L. Lagrangea.

   (j) Cantor je dokazao da je skup $\mathbb{R}$ ...

   ☐ prebrojiv. ☐ ekvipotentan s $\mathbb{Q}$.
   ☐ ekvipotentan sa svojim partitivnim skupom. ☐ rednog (ordinalnog) broja ω.

2. (20) Nadopunite sljedeće rečenice:[1]

   (a) Dva najpoznatija rovaša koji potječu iz kamenog doba su *kost iz Lebomba* i *kost iz Išanga*.

   (b) Broj kojeg danas zapisujemo kao 854, starogrčkom akrofonskom brojkom zapisan je 𐅅HHH𐅄||||, a starogrčkom alfabetskom brojkom zapisan je $\omega\nu\delta'$ (ili $\overline{\omega\nu\delta}$).

   (c) Mezolabij potječe od *Eratostena (iz Kirene)*, a služi za *duplikaciju kocke*.

   (d) Izraz *al-džabr* kod al-Hvarizimija predstavlja *prebacivanje negativnih članova jednadžbe na drugu stranu jednakosti*.

   (e) Za povijest matematike, tj. za dalji razvoj matematike u njegovo doba, najvažniji doprinos Leonarda iz Pise je *opis (popularizacija) dekadskog pozicijskog sustava*.

   (f) Pravo (tj. na njegovom narodnom jeziku) ime Regiomontanusa je *Johann Müller*.

   (g) Prvi model neeuklidske (hiperboličke) geometrije dao je *Eugenio Beltrami*.

   (h) Teorem da se za veliki broj pokusa binomna raspodjela (s $p = 1/2$) približava normalnoj prvi je uočio i dokazao *Abraham de Moivre*.

   (i) Geometrijsku interpretaciju kompleksnih brojeva, tj. kompleksnu ravninu, uveli su *Caspar Wessel*, *Carl Friedrich Gauß* i *Jean-Robert Argand*.

   (j) Hipoteza kontinuuma je tvrdnja[2] *da je najmanji beskonačni (kardinalni) broj veći od kardinalnog broja skupa svih prirodnih brojeva ($\aleph_0$) kardinalni broj skupa svih realnih brojeva ($\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$) (odnosno, $\aleph_1 = \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$, gdje je $\aleph_1$ najmanji kardinalni broj veći od $\aleph_0$)*.

3. (30) Na vlastitom papiru napišite kratki sastavak (1–2 stranice) na temu ,,Iracionalni brojevi kroz povijest“.

   Glavne natuknice:

   - pitagorejci — nesumjerljivost dijagonale i stranice pravilnog četverokuta odnosno peterokuta; Teodor iz Kirene
   - Eudoksova teorija omjera i razmjera
   - Euklidove kvadratne iracionalnosti i nazivi racionalan i iracionalan (EEX)
   - Arhimedov iterativni postupak za računanje omjera opsega i promjera kruga
   - Egipat, Babilon, Indija, Kina — nerazlikovanje racionalnih od iracionalnih brojava, razne metode računanja aproksimacija drugih i trećih korijena i omjera opsega i promjera kruga
   - Michael Stifel — razlikovanje iracionalnih i racionalnih *brojeva*
   - Leonhard Euler — $e = \sum \frac{1}{n!}$ je iracionalan
   - Johann Heinrich Lambert — π je iracionalan
   - gustoća racionalnih u realnim brojevima: Michael Stifel, Josip Ruđer Bošković
   - formalna definicija — Dedekindovi rezovi

[1] Za sva pitanja u kojima treba navesti ime europskog matematičara, traži se pravilno napisano prezime i bar jedan inicijal.

[2] Ako ju iskažete formulom, objasnite značenje korištenih oznaka.

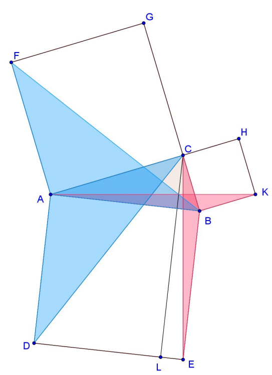
4. (10) Na staroegipatski način (ali koristeći suvremene brojke) pomnožite i podijelite 123 s 24. Konačne rezultate zapišite hijeroglifksim brojkama.

1	123	
2	246	
4	492	$24 \cdot 123 = 984 + 1968 = 2952$
8	**984**	
16	**1968**	

24	1	
48	2	$123 - 96 - 24 = 3 \Rightarrow 123 : 24 = 5\dfrac{3}{24} = 5\dfrac{1}{8}$
96	**4**	

Umnožak zapisan hijeroglifima je 𓆼𓆼𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢∩∩∩∩∩||, *a kvocijent zapisan hijeroglifima je* ||||| *i pokraj toga znak otvorenih usta povrh* |||||||| *(jer je* $\frac{3}{24} = \frac{1}{8}$*).*

5. (10) Pitagorin poučak dokažite na pitagorejski, tj. Euklidov način.



Dokaz prema EEI47, koji je vjerojatno pitagorejski: Neka je dakle dan pravokutni trokut $\triangle ABC$ *s pravim kutom pri vrhu* C*. Nad sve tri stranice konstruirani su i kvadrati* $ACGF$*,* $BCHK$ *i* $ABED$*. Nadalje, ucrtana je i visina* CL *na hipotenuzu, od vrha* C *do nasuprotne stranice kvadrata nad hipotenuzom. Ta visina dijeli kvadrat nad hipotenuzom na dva pravokutnika. Dokazujemo da je jedan od njih jednak (po površini) kvadratu nad jednom katetom. Zatim se analogno dokaže da je drugi jednak kvadratu nad drugom katetom, iz čega slijedi tvrdnja. Dokažimo recimo da je lijevi pravokutnik* $ADLT$ *jednak kvadratu* $ACGF$*: Ucrtajmo trokute* ADC *i* ABF*. Ta dva trokuta imaju jednu zajedničku stranicu (*AB*), zatim još jednu stranicu jednake duljine (*$|AF| = |AC|$ *jer je* $ACGF$ *kvadrat), a i kut među tim dvjema stranicama je jednak (*$\angle FAB$ *je pravi kut uvećan za kut* $\angle CAB$*, a takav je i* $\angle CAD$*). Po SKS-teoremu*[3] *ta dva trokuta su ne samo u smislu geometrijske algebre jednaka, nego i sukladna. Budući da trokut* $\triangle ACD$ *ima jednaku jednu stranicu i visinu na nju kao pravokutnik*

[3] Ako je ovaj dokaz pitagorejski, to znači da su pitagorejci znali i SKS-teorem. Budući da se i on može naći u I. knjizi EE kao EEI4, to je vrlo vjerojatno.

ADLT (stranica AD je zajednička, a visina je DL) slijedi da je taj trokut jednak pola pravokutnika. S druge strane trokut $\triangle AFB$ ima s kvadratom ACGF zajedničku stranicu AF i visinu AC, dakle je taj trokut jednak pol tog kvadrata. Budući da su trokuti jednaki, slijedi da je kvadrat ACGF jednak pravokutnik ADLT, što je i trebalo dokazati.

6. (10) Jednadžbu $x^3 + 3x^2 + 8x - 12 = 0$ riješite Tartaglia-Cardanovom metodom. Također, pripadnu reduciranu jednadžbu koju dobijete u toj metodi riješite i Khayyamovom metodom.

Prvo ju treba reducirati, tj. riješiti se kvadratnog člana supstitucijom $x = y - 1$:

$$(y-1)^3 + 3(y-1)^2 + 8(y-1) - 12 = 0 \Leftrightarrow y^3 + 5y - 18 = 0$$

Nastavak Tartaglia-Cardanovom metodom: $y = u + v$ daje

$$u^3 + 3u^2\, v + 3u\, v^2 + v^3 + 5(u+v) - 18 = 0 \Leftrightarrow u^3 + v^3 + (3u\, v + 5)(u+v) - 18 = 0,$$

$$3u\, v + 5 = 0 \Rightarrow u^3 + v^3 - 18 = 0 :$$

$$u^3 + v^3 = 18 \,\&\, u^3\, v^3 = -\frac{125}{27} \Rightarrow v^3 = -\frac{125}{27u^3} \Rightarrow$$

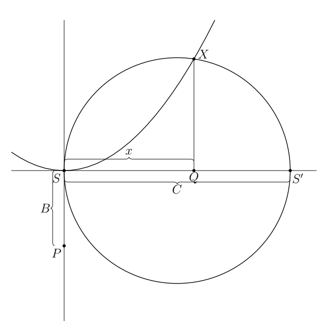
$$u^3 - \frac{125}{27u^3} = 18 \Rightarrow 27(u^3)^2 - 18u^3 - 125 = 0 \Rightarrow u^3, v^3 = \frac{1}{3} \pm \frac{8}{9}\sqrt{6} \Rightarrow$$

$$x = u + v - 1 = \sqrt[3]{\frac{1}{3} + \frac{8}{9}\sqrt{6}} + \sqrt[3]{\frac{1}{3} - \frac{8}{9}\sqrt{6}} - 1$$

Rješenje Khayyamovom metodom: $x^3 + 5x = 18$ znači da je $5 = B^2$, tj. $B = \sqrt{5}$ i $18 = 5C$, tj. promjer kružnice je $C = \frac{18}{5}$, a parabola ima tjeme S na njoj, os parabole je tangenta na kružnicu, a razmak fokusa i ravnalice jednak je $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Neka je X sjecište kružnice i parabole, Q projekcija X na promjer kružnice $\overline{SS'}$ te P točka na osi parabole sa svojstvom $|SP| = \sqrt{5}$. Budući da X leži na paraboli, vrijedi $|SQ|^2 = |SP| \cdot |XQ|$, tj. $|SQ| : |XQ| = \sqrt{5} : |SQ|$. No, X je i na kružnici pa je $\triangle SS'X$ pravokutan. Slijedi da je $\triangle SQX \sim \triangle XQS'$, pa vrijedi $|SQ| : |XQ| = |XQ| : |QS'|$. Stoga je

$$\sqrt{5} : |SQ| = \frac{|SQ|^2}{\sqrt{5}} : \left(\frac{18}{5} - |SQ|\right),$$

dakle je $x = |SQ|$ rješenje jednadžbe $x^3 + 5x = 18$.



7. (10) Na Fermatov način odredite jednadžbu tangente na krivulju $y = x^3 - x^2$ u točki $(2, 4)$.

$A = (2, 4)$; tangenta ima jednadžbu $y = k\,x + l$ i siječe os apscisa u točki O; $k = \frac{4}{|OX|}$, dakle treba izračunati $|OX|$.

Za mali prirast E uzmimo točku $B = (2 + E, f(2 + E))$. Tada su $\triangle OXA$ i $\triangle OYB$ približno slični jer je $f(2 + E) \approx k\,(2 + E) + l$ (tangenta je pravac koji najbolje aproksimira krivulju oko dane točke), dakle

$$|OX| : (|OX| + E) \approx 4 : ((2 + E)^3 - (2 + E)^2) = 4 : (E^3 + 5E^2 + 8E + 4),$$

odnosno

$$|OX| \approx \frac{4}{\frac{E^3+5E^2+8E+4-4}{E}} = \frac{4}{E^2 + 5E + 8}.$$

Sad se uzme $E = 0$ i tako dobiva $|OX| = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. Stoga je $k = 8$ i tražena tangenta je pravac s koeficijentom smjera 8 kroz točku $(2, 4)$, dakle $y - 4 = 8 \cdot (x - 2)$, odnosno $y = 8x - 12$.