Povijest matematike

riješeni pismeni ispit (21. lipnja 2024.)

F. M. Brčkler

1. (10) U svakom od sljedećih 10 pitanja 0–4 ponuđena odgovora su točna. Označite točne odgovore. Puni bod za pojedino pitanje ostarujete samo ako nijedna oznaka nije kriva.

   (a) U sljedećoj (ili sljedećim) povijesnim izvorima nalazimo vrlo dobru aproksimaciju iznosa $\sqrt{2}$: ☐ Plimpton 322 ☑ YBC7289 ☐ rukopis Bakhshali ☐ Rhindov papirus

   (b) Hipokrat s Hiosa ...

   ☐ je živio u 7. st. pr. Kr.

   ☐ je riješio problem kvadrature kruga.

   ☑ je sveo problem duplikacije kocke na konstrukciju srednjih geometrijskih proporcionala.

   ☐ je osmislio krivulju kvadratisu (trisektrisu).

   (c) Apolonije je ime elipsi ($\varepsilon\lambda\lambda\varepsilon\iota\psi\iota\varsigma$) dao

   ☐ jer je ovalnog oblika. ☑ jer u svakoj točki ima određeni manjak površine.

   ☑ u svom djelu *Konike*. ☐ u svom djelu *O dodirima*.

   (d) Prva tablica tetiva potječe od

   ☐ Aristarha sa Samosa ☑ Hiparha iz Niceje

   ☐ Menelaja Aleksandrijskog ☐ Klaudija Ptolemeja

   (e) Kronološki prvi opis računa s decimalnim razlomcima potječe od

   ☐ Al-Hvarizmija. ☑ Al-Kašija. ☐ Fibonaccija. ☐ S. Stevina.

   (f) *Prosthaphaeresis* je bila renesansna metoda za ...

   ☑ množenje. ☐ korjenovanje. ☐ logaritmiranje. ☐ potenciranje.

   (g) Među prvima koji je uočio međusobnu inverznost problema tangente i problema povšine, odnosno problema određivanja brzine iz puta i obrnuto, bio je (bili su)

   ☐ P. de Fermat. ☐ R. Descartes. ☐ J. Wallis. ☑ I. Barrow.

   (h) Prvi potpuni dokaz osnovnog teorema algebre za slučaj realnih i za slučaj kompleksnih koeficijenata dao je (dali su)

   ☐ G. W. Leibniz ☐ A. Girard ☑ J. C. F. Gauß ☑ J.-R. Argand

   (i) Grešku u Lagrangeovoj definiciji derivacije kao koeficijenta u Maclaurinovom redu, tj. u pretpostavci da se svaka funkcija podudara sa svojim Maclaurinovim redom, uočio(li) je (su)

   ☐ L. Euler. ☑ A.-L. Cauchy. ☐ E. Galois. ☐ B. Riemann.

   (j) Cantor je dokazao da su sljedeći skupovi prebrojivi:

   ☑ $\mathbb{Z}$. ☑ $\mathbb{Q}$. ☐ skup svih transcendentnih brojeva. ☐ $\mathbb{R}$.

2. (20) Nadopunite sljedeće rečenice:[1]

   (a) Rhindov i Moskovski papirus pisani su *hijeratskim* pismom.

   (b) Pitagora je pitagorejsku školu ustanovio u gradu *Krotonu* koji se nalazi u današnjoj državi *Italiji* .

   (c) Konstrukciju pravilnog petnaesterokuta Euklid je opisao u *IV.* knjizi svojih *Elemenata*.

   (d) Džang Hengovo pravilo za računanje površine kruga ekvivalentno je aproksimaciji $\pi \approx \sqrt{10}$.

   (e) Prvi matematičar koji je, bar prema većini izvora, potpuno odvojio algebru od geometrije bio je *al-Karadži*.

   (f) Algebarski izraz kojeg bi Rafael Bombelli zapisao kao $8m.Rc.\left\lfloor \begin{array}{ccc} 0 & & 2 \\ \smile & p. & \smile \\ 1 & & 6 \end{array} \right\rfloor$ danas bismo zapisali ovako: $8 - \sqrt[3]{1+6x^2}$.

   (g) Pojam očekivanje prvi je koristio *C. Huygens*.

   (h) Ono što danas nazivamo Bernoullijevim slabim zakonom velikih brojeva, Jacob Bernoulli je nazvao *zlatnim teoremom*.

   (i) Kvaternione je osmislio *W. R. Hamilton*.

   (j) Prema Dedekindu i koristeći jedan Eulerov rezultata, par skupova (Dedekindov rez) $A = \{x \in \mathbb{Q} : \exists n \in \mathbb{N}\ x < 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2}\}$ i $B = \{x \in \mathbb{Q} : x \notin A\}$ može poslužiti kao definicija broja $\dfrac{\pi^2}{6}$.

3. (30) Na vlastitom papiru napišite kratki sastavak (1–2 stranice) na temu:

„Starogrčka geometrijska algebra“.

Glavne natuknice:

- stari Grci nisu poznavali algebru, nego je to moderni naziv za one njihove geometrijske rezultate koje je danas prirodnije izraziti algebarski
- osnovni princip je da se samo istovrsni (po fizikalnoj dimenziiji) objekti mogu uspoređivati, a jednaki su ako su jednaki po mjeri i ako se ta jednakost može dokazati konstrukcijama ravnalom i šestarom
- tri klasična problema
- primjer jednadžbi (moderne jednadžbe $a\,x = b^2$, konstrukcija zlatnog reza)
- svaki uglati lik se može kvadrirati ravnalom i šestarom
- EEII
- Apolonijeva teorija konika

[1] Za sva pitanja u kojima treba navesti ime europskog matematičara, traži se pravilno napisano prezime i bar jedan inicijal.

4. (10) Babilonskom (Heronovom) i starokineskom metodom izračunajte najveće cijelo od $\sqrt{31000}$. Rezultat zapišite klasičnom babilonskom te kineskom štapičastom brojkom.

Babilonski, ako krenemo od početne aproksimacije 150: $a_0 = 150$, $a_1 = \frac{1}{2} \cdot (150 + \frac{31000}{150}) = 178{,}3333\ldots$, $a_2 = \frac{1}{2} \cdot (a_1 + \frac{31000}{a_1}) = 176{,}0826\ldots$, $a_3 = \frac{1}{2} \cdot (a_2 + \frac{31000}{a_2}) = 176{,}0682\ldots$. *Stajemo jer se prva znamenka iza decimalnog zareza ponovila i zaključujemo* $\lfloor\sqrt{31000}\rfloor = 176$. *Za babilonski zapis treba prvo pretvoriti u seksagezimalno:* $176 = 2 \cdot 60^1 + 56 \cdot 60p$, *dakle*

Starokineskom metodom: Budući da je $100^2 < 31000 < 1000^2$, *znamo da je traženi broj troznamenkast, dakle* $(abc)_{10}$. *Imamo*

$$31000 = (100a + 10b + c)^2 = 10000a^2 + \ldots \Rightarrow a = 1;$$

$$31000 = (100 + 10b + c)^2 = 10000 + 100b^2 + 2000b + \ldots \Rightarrow 21000 = 100b(b + 20) + \ldots$$

Isprobamo $b = 1, 2, \ldots$, *vidimo da je za* $b = 7$ *još OK, a za* $b = 8$ *bi dobili preveliki broj, pa je* $b = 7$ *i to uvrstimo natrag:*

$$31000 = (170 + c)^2 = 170^2 + 340c + c^2 \Rightarrow 2100 = c \cdot (340 + c)$$

Isprobamo $c = 1, 2, \ldots$, *vidimo da je za* $c = 6$ *još OK, a za* $c = 7$ *bi dobili preveliki broj, pa je* $c = 6$. *Odgovarajuća štapićasta brojka je* $-\mathbb{T}\mathbb{L}$

5. (10) Na al-Hvarizmijev način (koristeći modernu simboliku, ali uz iste korake) riješite jednadžbu $3x^2 - 6x + 5 = 2x^2 + 2x - 2$. Navedite i al-Hvarizmijevu klasifikaciju jednadžbi.

Al-Hvarizmi je razmatrao samo linearne i kvadratne jednadžbe, koje je klasificirao s obzirom na njihov ,,sređeni“ oblik (ako su kvadratne moraju biti normirane, moraju moći imati bar jedno pozitivno rješenje i svi koeficijenti su pozitivni) na šest tipova: $b\,x = c$, $x^2 = c$, $x^2 = b\,x$, $x^2 + b\,x = c$, $x^2 = b\,x + c$, $x^2 + c = b\,x$.

Operacija al-džabr, dvaput primijenjena, daje $3x^2 + 5 + 2 = 2x^2 + 2x + 6x$, *odnosno* $3x^2 + 7 = 2x^2 + 8x$, *a zatim al-mukabala daje* $x^2 + 7 = 8x$.

Jednadžba je normirana pa primjenjujemo al-Hvarizmijev postupak u kojem računa redom: $\frac{8}{2} = 4$, $4^2 = 16$, $16 - 7 = 9$, $\sqrt{9} = 3$. *To se pribroji ili oduzme od* $\frac{8}{2} = 4$, *čime dobijemo dva rješenja* $4 + 3 = 7$ *i* $4 - 3 = 1$.

6. (10) Iz Napierove definicije izvedite modernu formulu za Napierov logaritam.

Neka se dvije čestice a i g gibaju se pravocrtno i kreću u istom trenutku. Čestica a se giba jednoliko, konstatnom brzinom 10^7*, a čestica g ima početnu brzinu* 10^7 *i u svakom trenutku t joj je brzina* v_t *razmjerna trenutnoj udaljenosti* x_t *do cilja S (slika* **??***). Napier definira: Udaljenost* y_t *koju je do trenutka t prešla čestica a je logaritam od* x_t*.*

Označimo $y = \mathrm{NapLog}\, x$*. Očito je* $\mathrm{NapLog} 10^7 = 0$*. Neka je v brzina čestice g u trenutku kad još treba prijeći put x, dakle kad je prešla put* $10^7 - x$*. Po definiciji brzine je* $v = \frac{\mathrm{d}(10^7 - x)}{\mathrm{d}t} = -\dot{x}$*. S druge strane, po Napierovoj pretpostavci o gibanju čestice g znamo da je* $v = k\,x$ $x(0) = 10^7$ *i* $v(0) = 10^7$*. Dakle, imamo diferencijalnu jednadžbu* $-\dot{x} = k\,x$*, koju lako riješimo separacijom varijabli:* $\frac{\mathrm{d}x}{x} = -k\,\mathrm{d}t$*,* $\ln|x| = -k\,t + C_0$*,* $x \geq 0$*,* $\ln x = C_0 - k\,t$*,* $x = C\exp(-k\,t)$*,* $x(0) = C = 10^7$*. Dakle,* $x = 10^7 \exp(-k\,t)$*. Deriviramo li to po t, dobit ćemo* $-v = -10^7 k \exp(-k\,t)$*. Zbog početnog uvjeta* $v_0 = 10^7$ *sad slijedi* $k = 1$*, tj.* $x_t = 10^7 \exp(-t)$*. S druge je strane, zbog jednolikog gibanja čestice a,* $\dot{y} = 10^7$ *za svaki t i* $y(0) = 0$*, odnosno* $y = 10^7 t$*. Po definiciji je stoga* $\mathrm{NapLog}(10^7 e^{-t}) = 10^7 t$*. Iz* $x = 10^7 \exp(-t)$ *vidimo da je* $t = \ln \frac{10^7}{x}$*, dakle zaključujemo*

$$\mathrm{NapLog}\, x = 10^7 \ln \frac{10^7}{x}.$$

7. (10) Dokažite osnovni Cantorov teorem teorije skupova.

Osnovni Cantorov teorem teorije skupova glasi: Svaki skup ima manje elemenata nego njegov partitivni skup.

Dokaz: Neka je A *neki skup i* $\mathcal{P}(A)$ *njegov partitivni skup, tj. skup svih podskupova od* A*. Funkcija* $x \mapsto \{x\}$ *je očito injekcija s* A *u* $\mathcal{P}(A)$*, dakle skup* A *nema više elemenata nego* $\mathcal{P}(A)$*. Pretpostavimo da postoji bijekcija* $f : A \to \mathcal{P}(A)$*. Onda je* f *surjekcija. Neka je* $M = \{x \in A : x \notin f(x)\}$*. Očito je* $M \in \mathcal{P}(A)$*. Zbog surjektivnosti postoji* $a \in A$ *takav da je* $f(a) = M$*. Tada je ili* $a \in M$ *ili* $a \notin M$*. Ako* $a \in M$*, po definiciji skupa* M *vrijedi* $a \notin f(a) = M$ *i obrnuto, ako* $a \notin M$*, onda po definiciji skupa* M *slijedi* $a \in M$*. Dakle, u oba slučaja dobili smo kontradikciju te je dokazan osnovni teorem teorije skupova.*