Statistika

Vanja Wagner

4. Procjene parametara

Određivanje veličine uzorka za intervalnu procjenu očekivanja

Za danu razinu pouzdanosti $1-\alpha$ želimo odrediti veličinu uzorka potrebnu da $(1-\alpha)$%-tni pouzdani interval za očekivanje ne bude širi od od neke fiksne duljine $2d$.
Uzmimo $\alpha = 0.05$ i promotrimo 95%-tni interval pouzdanosti za očekivanje (varijanca poznata):

$$\left[\bar{X} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Određivanje veličine uzorka za intervalnu procjenu očekivanja

Za danu razinu pouzdanosti $1-\alpha$ želimo odrediti veličinu uzorka potrebnu da $(1-\alpha)$%-tni pouzdani interval za očekivanje ne bude širi od od neke fiksne duljine $2d$. Uzmimo $\alpha = 0.05$ i promotrimo 95%-tni interval pouzdanosti za očekivanje (varijanca poznata):

$$\left[\bar{X} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Širina intervala jednaka je:

$$2 \cdot 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

pa tražimo n takav da je

$$2 \cdot 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant 2d.$$

Određivanje veličine uzorka za intervalnu procjenu očekivanja

Za danu razinu pouzdanosti $1-\alpha$ želimo odrediti veličinu uzorka potrebnu da $(1-\alpha)$%-tni pouzdani interval za očekivanje ne bude širi od od neke fiksne duljine $2d$.
Uzmimo $\alpha = 0.05$ i promotrimo 95%-tni interval pouzdanosti za očekivanje (varijanca poznata):

$$\left[\bar{X} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Širina intervala jednaka je:

$$2 \cdot 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

pa tražimo n takav da je

$$2 \cdot 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant 2d.$$

odnosno

$$n \geqslant \left(1.96 \frac{\sigma}{d}\right)^2.$$

Određivanje veličine uzorka za intervalnu procjenu proporcije

Kod procjene proporcije, $(1-\alpha)\%$-tni interval pouzdanosti je dan s:

$$\left[\hat{p} - z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_{\hat{p}},\ \hat{p} + z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_{\hat{p}}\right]$$

gdje je

$$\sigma_{\hat{p}} = \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}.$$

Određivanje veličine uzorka za intervalnu procjenu proporcije

Kod procjene proporcije, $(1-\alpha)$%-tni interval pouzdanosti je dan s:

$$\left[\hat{p} - z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_{\hat{p}},\ \hat{p} + z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_{\hat{p}}\right]$$

gdje je

$$\sigma_{\hat{p}} = \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}.$$

Veličina uzorka bi trebala opet zadovoljavati

$$n \geqslant \left(z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{d}\right)^2,$$

no kako je p nepoznat, koristimo ocjenu $p \cdot (1-p) \geqslant 0.5$ da bismo zaključili da je

$$n \geqslant \left(z_{1-\alpha/2}\frac{0.5}{d}\right)^2.$$

Određivanje veličine uzorka za intervalnu procjenu proporcije

Kod procjene proporcije, $(1-\alpha)$%-tni interval pouzdanosti je dan s:

$$\left[\hat{p} - z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_{\hat{p}},\ \hat{p} + z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_{\hat{p}}\right]$$

gdje je

$$\sigma_{\hat{p}} = \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}.$$

Veličina uzorka bi trebala opet zadovoljavati

$$n \geqslant \left(z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{d}\right)^2,$$

no kako je p nepoznat, koristimo ocjenu $p \cdot (1-p) \geqslant 0.5$ da bismo zaključili da je

$$n \geqslant \left(z_{1-\alpha/2}\frac{0.5}{d}\right)^2.$$

Ovako dobiveni n je sigurno veći od optimalnog (dobivena točnost će biti veća od tražene).

Primjer. Odredite veličinu uzorka potrebnu da širina 95%-tnog intervala pouzdanosti bude manja od 2 postotna poena u procjeni udjela ženskih riba vrste tilapia u uzgajalištu.

Primjer. Odredite veličinu uzorka potrebnu da širina 95%-tnog intervala pouzdanosti bude manja od 2 postotna poena u procjeni udjela ženskih riba vrste tilapia u uzgajalištu.

Rješenje.

$2d = 2\% = 0.02$ pa je $d = 0.01$. Očekujemo $p \approx 0.5$ pa uočite da nećemo jako povećati uzorak ako iskoristimo ocjenu $p(1-p) \geqslant 0.5$. Dobivamo

$$n \geqslant \left(z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{d} \right)^2 =$$

Primjer. Odredite veličinu uzorka potrebnu da širina 95%-tnog intervala pouzdanosti bude manja od 2 postotna poena u procjeni udjela ženskih riba vrste tilapia u uzgajalištu.

Rješenje.

$2d = 2\% = 0.02$ pa je $d = 0.01$. Očekujemo $p \approx 0.5$ pa uočite da nećemo jako povećati uzorak ako iskoristimo ocjenu $p(1-p) \geqslant 0.5$. Dobivamo

$$n \geqslant \left(z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{d}\right)^2 = \left(1.96 \cdot \frac{0.5}{0.01}\right)^2 = 9604.$$

5. Statistički testovi

Testiranje hipoteze - primjer

Problem. Tilapija je jedna od najčešćih uzgajanih vrsta slatkovodne ribe u svijetu. Zbog raznih uvjeta uzgoja (gustoća riblje populacije u uzgajalištu, manjak aktivnosti riba, industrijska hrana), ribe vrste Tilapija su često pretile. Smatra se da je riba ove vrste pretila ako njena masa prelazi 700 g, Promatramo uzgajalište na kojem se nalazi oko 50 000 riba vrste Tilapija i želimo ispitati je li postotak pretilih riba jednak 0.4. Kako to učiniti?

Testiranje hipoteze - primjer

Problem. Tilapija je jedna od najčešćih uzgajanih vrsta slatkovodne ribe u svijetu. Zbog raznih uvjeta uzgoja (gustoća riblje populacije u uzgajalištu, manjak aktivnosti riba, industrijska hrana), ribe vrste Tilapija su često pretile. Smatra se da je riba ove vrste pretila ako njena masa prelazi 700 g, Promatramo uzgajalište na kojem se nalazi oko 50 000 riba vrste Tilapija i želimo ispitati je li postotak pretilih riba jednak 0.4. Kako to učiniti?

- Brojanje svih riba je prezahtjevan zadatak.
- Slučajno izaberemo određen broj (npr. $n = 100$) riba (uzorak) i izmjerimo im masu.
- Izračunamo udio pretilih riba u promatranom uzorku.
- **Cilj:** Provjeriti da li su vrijednosti iz uzorka u skladu s pretpostavkom da je 40% riba u uzgajalištu pretilo.

Testiranje hipoteze - primjer

Problem. Tilapija je jedna od najčešćih uzgajanih vrsta slatkovodne ribe u svijetu. Zbog raznih uvjeta uzgoja (gustoća riblje populacije u uzgajalištu, manjak aktivnosti riba, industrijska hrana), ribe vrste Tilapija su često pretile. Smatra se da je riba ove vrste pretila ako njena masa prelazi 700 g, Promatramo uzgajalište na kojem se nalazi oko 50 000 riba vrste Tilapija i želimo ispitati je li postotak pretilih riba jednak 0.4. Kako to učiniti?

- Brojanje svih riba je prezahtjevan zadatak.
- Slučajno izaberemo određen broj (npr. $n = 100$) riba (uzorak) i izmjerimo im masu.
- Izračunamo udio pretilih riba u promatranom uzorku.
- **Cilj:** Provjeriti da li su vrijednosti iz uzorka u skladu s pretpostavkom da je 40% riba u uzgajalištu pretilo.

Statističko zaključivanje:

Kako provjeriti da li su vrijednosti iz uzorka u skladu s pretpostavkom na statistički značajan način? Očito, ako je udio pretilih riba u uzorku

Testiranje hipoteze - primjer

Problem. Tilapija je jedna od najčešćih uzgajanih vrsta slatkovodne ribe u svijetu. Zbog raznih uvjeta uzgoja (gustoća riblje populacije u uzgajalištu, manjak aktivnosti riba, industrijska hrana), ribe vrste Tilapija su često pretile. Smatra se da je riba ove vrste pretila ako njena masa prelazi 700 g, Promatramo uzgajalište na kojem se nalazi oko 50 000 riba vrste Tilapija i želimo ispitati je li postotak pretilih riba jednak 0.4. Kako to učiniti?

- Brojanje svih riba je prezahtjevan zadatak.
- Slučajno izaberemo određen broj (npr. $n = 100$) riba (uzorak) i izmjerimo im masu.
- Izračunamo udio pretilih riba u promatranom uzorku.
- **Cilj:** Provjeriti da li su vrijednosti iz uzorka u skladu s pretpostavkom da je 40% riba u uzgajalištu pretilo.

Statističko zaključivanje:

Kako provjeriti da li su vrijednosti iz uzorka u skladu s pretpostavkom na statistički značajan način? Očito, ako je udio pretilih riba u uzorku

- **blizu** 0.4, zaključujemo da je udio pretilih riba u uzgajalištu jednak 0.4.

Testiranje hipoteze - primjer

Problem. Tilapija je jedna od najčešćih uzgajanih vrsta slatkovodne ribe u svijetu. Zbog raznih uvjeta uzgoja (gustoća riblje populacije u uzgajalištu, manjak aktivnosti riba, industrijska hrana), ribe vrste Tilapija su često pretile. Smatra se da je riba ove vrste pretila ako njena masa prelazi 700 g, Promatramo uzgajalište na kojem se nalazi oko 50 000 riba vrste Tilapija i želimo ispitati je li postotak pretilih riba jednak 0.4. Kako to učiniti?

- Brojanje svih riba je prezahtjevan zadatak.
- Slučajno izaberemo određen broj (npr. $n = 100$) riba (uzorak) i izmjerimo im masu.
- Izračunamo udio pretilih riba u promatranom uzorku.
- **Cilj:** Provjeriti da li su vrijednosti iz uzorka u skladu s pretpostavkom da je 40% riba u uzgajalištu pretilo.

Statističko zaključivanje:

Kako provjeriti da li su vrijednosti iz uzorka u skladu s pretpostavkom na statistički značajan način? Očito, ako je udio pretilih riba u uzorku

- **blizu** 0.4, zaključujemo da je udio pretilih riba u uzgajalištu jednak 0.4.
- **daleko** od 0.4, zaključujemo da udio pretilih riba u uzgajalištu nije jednak 0.4.

Testiranje hipoteze - primjer

Problem. Tilapija je jedna od najčešćih uzgajanih vrsta slatkovodne ribe u svijetu. Zbog raznih uvjeta uzgoja (gustoća riblje populacije u uzgajalištu, manjak aktivnosti riba, industrijska hrana), ribe vrste Tilapija su često pretile. Smatra se da je riba ove vrste pretila ako njena masa prelazi 700 g, Promatramo uzgajalište na kojem se nalazi oko 50 000 riba vrste Tilapija i želimo ispitati je li postotak pretilih riba jednak 0.4. Kako to učiniti?

- Brojanje svih riba je prezahtjevan zadatak.
- Slučajno izaberemo određen broj (npr. $n = 100$) riba (uzorak) i izmjerimo im masu.
- Izračunamo udio pretilih riba u promatranom uzorku.
- **Cilj:** Provjeriti da li su vrijednosti iz uzorka u skladu s pretpostavkom da je 40% riba u uzgajalištu pretilo.

Statističko zaključivanje:

Kako provjeriti da li su vrijednosti iz uzorka u skladu s pretpostavkom na statistički značajan način? Očito, ako je udio pretilih riba u uzorku

- **blizu** 0.4, zaključujemo da je udio pretilih riba u uzgajalištu jednak 0.4.
- **daleko** od 0.4, zaključujemo da udio pretilih riba u uzgajalištu nije jednak 0.4.

Kako statistički značajno odrediti što podrazumijevamo **blizu**, tj. **daleko** od 0.4?

Testiranje hipoteze - primjer

Na ovo pitanje možemo odgovoriti promatranjem pouzdanog intervala za nepoznati parametar $p =$ proporciju (udio) pretilih riba u uzgajalištu. Podsjetimo se, 95% pouzdani interval za proporciju temeljen na uzorku $X_1, \ldots, X_{100} \sim B(p)$ duljine $n = 100$ jednak je

$$\left[\overline{X}_n - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Testiranje hipoteze - primjer

Na ovo pitanje možemo odgovoriti promatranjem pouzdanog intervala za nepoznati parametar $p =$ proporciju (udio) pretilih riba u uzgajalištu. Podsjetimo se, 95% pouzdani interval za proporciju temeljen na uzorku $X_1, \dots, X_{100} \sim B(p)$ duljine $n = 100$ jednak je

$$\left[\overline{X}_n - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Podsjetimo se,

- $X_i = 0$ ako i-ta riba u uzorku nije pretila, odnosno $X_i = 1$ ako je pretila;
- ovdje je (točkovni) procjenitelj za proporciju $\hat{p} = \overline{X}_n$ prosjek od $X_1, \dots, X_n$ i procijenjena standardna devijacija za $\hat{p}$ je $\sigma = \hat{\sigma}_{\hat{p}} = \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}$;
- vjerojatnost da se proporcija pretilih riba u uzgajalištu nalazi u ovom intervalu je 95%.

Testiranje hipoteze - primjer

Na ovo pitanje možemo odgovoriti promatranjem pouzdanog intervala za nepoznati parametar $p =$ proporciju (udio) pretilih riba u uzgajalištu. Podsjetimo se, 95% pouzdani interval za proporciju temeljen na uzorku $X_1, \ldots, X_{100} \sim B(p)$ duljine $n = 100$ jednak je

$$\left[\overline{X}_n - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Podsjetimo se,

- $X_i = 0$ ako i-ta riba u uzorku nije pretila, odnosno $X_i = 1$ ako je pretila;
- ovdje je (točkovni) procjenitelj za proporciju $\hat{p} = \overline{X}_n$ prosjek od $X_1, \ldots, X_n$ i procijenjena standardna devijacija za $\hat{p}$ je $\sigma = \hat{\sigma}_{\hat{p}} = \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}$;
- vjerojatnost da se proporcija pretilih riba u uzgajalištu nalazi u ovom intervalu je 95%.

Statističko zaključivanje: Recimo da smo u uzorku duljine $n = 100$ imali 47 pretilih riba. Tada je udio pretilih riba u uzorku $\hat{p} = \overline{x} = 0.47$ i procjena za standardnu devijaciju od X_1 je $\hat{\sigma}_{\hat{p}} = \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})} \approx 0.5$.

Testiranje hipoteze - primjer

Na ovo pitanje možemo odgovoriti promatranjem pouzdanog intervala za nepoznati parametar $p =$ proporciju (udio) pretilih riba u uzgajalištu. Podsjetimo se, 95% pouzdani interval za proporciju temeljen na uzorku $X_1, \ldots, X_{100} \sim B(p)$ duljine $n = 100$ jednak je

$$\left[\overline{X}_n - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Podsjetimo se,

- $X_i = 0$ ako i-ta riba u uzorku nije pretila, odnosno $X_i = 1$ ako je pretila;
- ovdje je (točkovni) procjenitelj za proporciju $\hat{p} = \overline{X}_n$ prosjek od $X_1, \ldots, X_n$ i procijenjena standardna devijacija za $\hat{p}$ je $\sigma = \hat{\sigma}_{\hat{p}} = \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}$;
- vjerojatnost da se proporcija pretilih riba u uzgajalištu nalazi u ovom intervalu je 95%.

Statističko zaključivanje: Recimo da smo u uzorku duljine $n = 100$ imali 47 pretilih riba. Tada je udio pretilih riba u uzorku $\hat{p} = \overline{x} = 0.47$ i procjena za standardnu devijaciju od X_1 je $\hat{\sigma}_{\hat{p}} = \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})} \approx 0.5$. Slijedi da je 95% pouzdani interval za proporciju jednak

$$\left[0.47 - 1.96 \cdot \frac{0.5}{\sqrt{100}}, 0.47 + 1.96 \cdot \frac{0.5}{\sqrt{100}}\right] = [0.372, 0.568].$$

Testiranje hipoteze - primjer

Na ovo pitanje možemo odgovoriti promatranjem pouzdanog intervala za nepoznati parametar p = proporciju (udio) pretilih riba u uzgajalištu. Podsjetimo se, 95% pouzdani interval za proporciju temeljen na uzorku $X_1, \ldots, X_{100} \sim B(p)$ duljine $n = 100$ jednak je

$$\left[\overline{X}_n - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Podsjetimo se,

- $X_i = 0$ ako i-ta riba u uzorku nije pretila, odnosno $X_i = 1$ ako je pretila;
- ovdje je (točkovni) procjenitelj za proporciju $\hat{p} = \overline{X}_n$ prosjek od $X_1, \ldots, X_n$ i procijenjena standardna devijacija za $\hat{p}$ je $\sigma = \hat{\sigma}_{\hat{p}} = \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}$;
- vjerojatnost da se proporcija pretilih riba u uzgajalištu nalazi u ovom intervalu je 95%.

Statističko zaključivanje: Recimo da smo u uzorku duljine $n = 100$ imali 47 pretilih riba. Tada je udio pretilih riba u uzorku $\hat{p} = \overline{x} = 0.47$ i procjena za standardnu devijaciju od X_1 je $\hat{\sigma}_{\hat{p}} = \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})} \approx 0.5$. Slijedi da je 95% pouzdani interval za proporciju jednak

$$\left[0.47 - 1.96 \cdot \frac{0.5}{\sqrt{100}}, 0.47 + 1.96 \cdot \frac{0.5}{\sqrt{100}}\right] = [0.372, 0.568].$$

Kako je pretpostavljena proporcija $p_0 = 0.4$ unutar intervala $[0.372, 0.568]$ kažemo da **ne možemo odbaciti hipotezu da je proporcija pretilih riba u uzgajalištu (populaciji) jednaka p_0.**

Testiranje hipoteze - primjer

Analogno smo na isto pitanje mogli odgovoriti i direktno, bez promatranjja pouzdanog intervala. Naime, u pozadini prethodnog zaključivanja se nalazi rezultat da je statistika

$$Z = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim AN(0, 1),$$

odnosno približno standardno normalno distribuirana.

Testiranje hipoteze - primjer

Analogno smo na isto pitanje mogli odgovoriti i direktno, bez promatranjja pouzdanog intervala. Naime, u pozadini prethodnog zaključivanja se nalazi rezultat da je statistika

$$Z = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim AN(0,1),$$

odnosno približno standardno normalno distribuirana. Ovdje je:

- $\hat{p} = \overline{X}_n$ procjenitelj za proporciju na temelju uzorka;

Testiranje hipoteze - primjer

Analogno smo na isto pitanje mogli odgovoriti i direktno, bez promatranjja pouzdanog intervala. Naime, u pozadini prethodnog zaključivanja se nalazi rezultat da je statistika

$$Z = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim AN(0,1),$$

odnosno približno standardno normalno distribuirana. Ovdje je:

- $\hat{p} = \overline{X}_n$ procjenitelj za proporciju na temelju uzorka;
- $p_0 = \mu$ proporcija obilježja u populaciji (očekivanje od X_1) (nepoznata);

Testiranje hipoteze - primjer

Analogno smo na isto pitanje mogli odgovoriti i direktno, bez promatranjja pouzdanog intervala. Naime, u pozadini prethodnog zaključivanja se nalazi rezultat da je statistika

$$Z = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim AN(0,1),$$

odnosno približno standardno normalno distribuirana. Ovdje je:

- $\hat{p} = \overline{X}_n$ procjenitelj za proporciju na temelju uzorka;
- $p_0 = \mu$ proporcija obilježja u populaciji (očekivanje od X_1) (nepoznata);
- σ je standardna devijacija od X_1, odnosno $\sigma_{p_0} = \sqrt{p_0(1-p_0)}$ (nepoznata).

Testiranje hipoteze - primjer

Kako je standardizirana slučajna varijabla Z distribuirana približno prema jediničnoj normalnoj distribuciji $N(0,1)$ zaključujemo da je

$$\mathbf{P}\left(Z \in [-1.96, 1.96]\right) = \mathbf{P}\left(-1.96 \leqslant Z \leqslant 1.96\right) = 0.95.$$

Testiranje hipoteze - primjer

Kako je standardizirana slučajna varijabla Z distribuirana približno prema jediničnoj normalnoj distribuciji $N(0,1)$ zaključujemo da je

$$\mathbf{P}\left(Z \in [-1.96, 1.96]\right) = \mathbf{P}\left(-1.96 \leqslant Z \leqslant 1.96\right) = 0.95.$$

Statističko zaključivanje: Recimo da smo u uzorku duljine $n = 100$ imali 47 pretilih riba. Tada je udio pretilih riba u uzorku $\hat{p} = \overline{x} = 0.47$. Za proporciju pretilih riba u populaciju uzmemo testnu vrijednost $p_0 = 0.4$, pa je standardna devijacija od X_1 jednaka $\sigma = \sqrt{p_0(1-p_0)} = \sqrt{0.4 \cdot 0.6} \approx 0.49$.

Testiranje hipoteze - primjer

Kako je standardizirana slučajna varijabla Z distribuirana približno prema jediničnoj normalnoj distribuciji $N(0,1)$ zaključujemo da je

$$\mathbf{P}\left(Z \in [-1.96, 1.96]\right) = \mathbf{P}\left(-1.96 \leqslant Z \leqslant 1.96\right) = 0.95.$$

Statističko zaključivanje: Recimo da smo u uzorku duljine $n = 100$ imali 47 pretilih riba. Tada je udio pretilih riba u uzorku $\hat{p} = \overline{x} = 0.47$. Za proporciju pretilih riba u populaciju uzmemo testnu vrijednost $p_0 = 0.4$, pa je standardna devijacija od X_1 jednaka $\sigma = \sqrt{p_0(1-p_0)} = \sqrt{0.4 \cdot 0.6} \approx 0.49$. Slijedi da je vrijednost (realizacija) statistike Z na našem uzorku jednaka

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0 \cdot (1-p_0)}/\sqrt{n}} = \frac{0.47 - 0.4}{\sqrt{0.4 \cdot (1-0.4)}/\sqrt{100}} \approx 1.429.$$

Testiranje hipoteze - primjer

Kako je standardizirana slučajna varijabla Z distribuirana približno prema jediničnoj normalnoj distribuciji $N(0,1)$ zaključujemo da je

$$\mathbf{P}\left(Z \in [-1.96, 1.96]\right) = \mathbf{P}\left(-1.96 \leqslant Z \leqslant 1.96\right) = 0.95.$$

Statističko zaključivanje: Recimo da smo u uzorku duljine $n = 100$ imali 47 pretilih riba. Tada je udio pretilih riba u uzorku $\hat{p} = \overline{x} = 0.47$. Za proporciju pretilih riba u populaciju uzmemo testnu vrijednost $p_0 = 0.4$, pa je standardna devijacija od X_1 jednaka $\sigma = \sqrt{p_0(1-p_0)} = \sqrt{0.4 \cdot 0.6} \approx 0.49$. Slijedi da je vrijednost (realizacija) statistike Z na našem uzorku jednaka

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0 \cdot (1-p_0)}/\sqrt{n}} = \frac{0.47 - 0.4}{\sqrt{0.4 \cdot (1-0.4)}/\sqrt{100}} \approx 1.429.$$

Kako se realizacija testne statistike $z = 1.429$ nalazi unutar intervala (tzv. **kritičnog područja**) $[-1.96, 1.96]$ kažemo da **ne možemo odbaciti hipotezu da je proporcija pretilih riba u uzgajalištu (populaciji) jednaka $p_0 = 0.4$.**

Testiranje hipoteze - primjer

Što ako pretpostavka $p_0 = 0.4$ nije točna? Kolika je vjerojatnost da ćemo pogriješiti (odnosno ne odbaciti krivu pretpostavku)?

Testiranje hipoteze - primjer

Što ako pretpostavka $p_0 = 0.4$ nije točna? Kolika je vjerojatnost da ćemo pogriješiti (odnosno ne odbaciti krivu pretpostavku)?

Pretpostavimo da je stvarna vrijednost proporcije jednaka $p = 0.55$. Tada znamo da je

$$\frac{\hat{p} - p}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\overline{X}_{100} - 0.55}{\sqrt{0.55 \cdot (1 - 0.55)}/\sqrt{100}} \sim AN(0, 1),$$

odnosno

$$\overline{X}_{100} \sim N(0.55, \sqrt{0.55 \cdot (1 - 0.55)}/\sqrt{100}) = N(0.55, 0.0497^2),$$

Testiranje hipoteze - primjer

Što ako pretpostavka $p_0 = 0.4$ nije točna? Kolika je vjerojatnost da ćemo pogriješiti (odnosno ne odbaciti krivu pretpostavku)?

Pretpostavimo da je stvarna vrijednost proporcije jednaka $p = 0.55$. Tada znamo da je

$$\frac{\hat{p} - p}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{\overline{X}_{100} - 0.55}{\sqrt{0.55 \cdot (1 - 0.55)} / \sqrt{100}} \sim AN(0, 1),$$

odnosno

$$\overline{X}_{100} \sim N(0.55, \sqrt{0.55 \cdot (1 - 0.55)} / \sqrt{100}) = N(0.55, 0.0497^2),$$

Sjetimo se, nećemo odbaciti hipotezu da je stvarna vrijednost parametra jednaka $p_0 = 0.4$ dok god je

$$Z = \frac{\overline{X}_{100} - p_0}{\sqrt{p_0 \cdot (1 - p_0)} / \sqrt{n}} = \frac{\overline{X}_{100} - 0.4}{\sqrt{0.4 \cdot (1 - 0.4)} / \sqrt{100}} = \frac{\overline{X}_{100} - 0.4}{0.0498} \in [-1.96, 1.96].$$

Testiranje hipoteze - primjer

Kako je $\overline{X}_{100} \sim N(0.55, 0.0497^2)$ slijedi da je

$$Z = \frac{\overline{X}_{100} - 0.4}{0.0498} \sim N((0.55 - 0.4)/0.0498, 0.0497^2/0.0498^2) = N(3.01, 0.996).$$

Testiranje hipoteze - primjer

Kako je $\overline{X}_{100} \sim N(0.55, 0.0497^2)$ slijedi da je

$$Z = \frac{\overline{X}_{100} - 0.4}{0.0498} \sim N((0.55 - 0.4)/0.0498, 0.0497^2/0.0498^2) = N(3.01, 0.996).$$

Zaključujemo da je vjerojatnost da nećemo odbaciti hipotezu da je stvarna vrijednost parametra jednaka $p_0 = 0.4$ ako je stvarna vrijednost parametra proporcije zapravo $p = 0.55$ jednaka

$$\mathbf{P}(Z \in [-1.96, 1.96]) = F_Z(1.96) - F_Z(-1.96)$$
$$= NORMDIST(1.96, 3.01, \sqrt{0.996}, TRUE) - NORMDIST(-1.96, 3.01, \sqrt{0.996}, TRUE)$$
$$= 0.1464 - 0.0000003 = 0.1463996.$$

Statististički testovi - osnovni pojmovi

Hipoteza - pretpostavka o populaciji - mora postojati mogućnost provjere statističkim metodama - statistička hipoteza je najčešće pretpostavka o tipu distibucije nekog obilježja, parametrima te distribucije, te o zavisnosti/koreliranosti dvaju ili više obilježja.

Statististički testovi - osnovni pojmovi

Hipoteza - pretpostavka o populaciji - mora postojati mogućnost provjere statističkim metodama - statistička hipoteza je najčešće pretpostavka o tipu distibucije nekog obilježja, parametrima te distribucije, te o zavisnosti/koreliranosti dvaju ili više obilježja.

Pod formiranjem hipoteze zapravo mislimo na formiranje dvaju hipoteza: **Nul hipoteza (H_0)** i **alternativna hipoteza (H_a, H_1)**:

- **Alternativna hipoteza** - ono što želimo pokazati.
- **Nul hipoteza** - želimo kontrolirati vjerojatnost da ćemo odbaciti ovu pretpostavku ako je istinita, u korist alternativne hipoteze. Najčešće je riječ o negaciji alternativne hipoteze ili njenoj jednostavnoj inačici.

Statististički testovi - osnovni pojmovi

Hipoteza - pretpostavka o populaciji - mora postojati mogućnost provjere statističkim metodama - statistička hipoteza je najčešće pretpostavka o tipu distibucije nekog obilježja, parametrima te distribucije, te o zavisnosti/koreliranosti dvaju ili više obilježja.

Pod formiranjem hipoteze zapravo mislimo na formiranje dvaju hipoteza: **Nul hipoteza (H_0)** i **alternativna hipoteza (H_a, H_1)**:

- **Alternativna hipoteza** - ono što želimo pokazati.
- **Nul hipoteza** - želimo kontrolirati vjerojatnost da ćemo odbaciti ovu pretpostavku ako je istinita, u korist alternativne hipoteze. Najčešće je riječ o negaciji alternativne hipoteze ili njenoj jednostavnoj inačici.

Statistički test - formalni postupak kojim određujemo hoćemo li odbaciti nul hipotezu u korist alternativne hipoteze. Uočite, ovisno o rezultatu testa **nul hipotezu odbacujemo** ili **ne odbacujemo**, ali nikad ne zaključujemo da vrijedi alternativna ili nul hipoteza!

Primjer

Recimo da želimo testirati je li populacija riba u uzgajalištu primjerene kilaže za tržište. To će biti slučaj ako je manje od 50% riba u uzgajalištu pretilo.

Primjer

Recimo da želimo testirati je li populacija riba u uzgajalištu primjerene kilaže za tržište. To će biti slučaj ako je manje od 50% riba u uzgajalištu pretilo.

Formiranje hipoteza - Želimo testirati da je $p < 0.5$, pa će nam to biti alternativna hipoteza. Kao nul hipotezu stavimo komplementarnu tvrdnju $p \geqslant 0.5$. Pokaže se da je to analogno formiranju jednostavne nul hipoteze da je $p = 0.5$.

Primjer

Recimo da želimo testirati je li populacija riba u uzgajalištu primjerene kilaže za tržište. To će biti slučaj ako je manje od 50% riba u uzgajalištu pretilo.

Formiranje hipoteza - Želimo testirati da je $p < 0.5$, pa će nam to biti alternativna hipoteza. Kao nul hipotezu stavimo komplementarnu tvrdnju $p \geqslant 0.5$. Pokaže se da je to analogno formiranju jednostavne nul hipoteze da je $p = 0.5$.

Zapis:

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \quad p = 0.5 \\
H_1 &: \quad p < 0.5
\end{aligned}
$$

Pogreške statističkog testa

Uočimo da postoje dva načina kako možemo napraviti pogrešku pri provođenju statističkog testa:

	Nul hipoteza	
	Točna	**Netočna**
Ne odbacujemo	**Ispravno**	**Pogrešno (β)**
Odbacujemo	**Pogrešno (α)**	**Ispravno**

Koja pogreška je gora? (uzmite za primjer nul hipotezu "osumnjičenik je nedužan")

Pogreške statističkog testa

Uočimo da postoje dva načina kako možemo napraviti pogrešku pri provođenju statističkog testa:

Nul hipoteza		
	Točna	**Netočna**
Ne odbacujemo	**Ispravno**	**Pogrešno (β)**
Odbacujemo	**Pogrešno (α)**	**Ispravno**

Koja pogreška je gora? (uzmite za primjer nul hipotezu "osumnjičenik je nedužan")

- Ako odbacimo točnu nul hipotezu - **pogreška I. vrste (α)**;
- Ako je nul hipoteza netočna, a mi je ne odbacimo - **pogreška II. vrste (β)**.

Pogreške statističkog testa

Uočimo da postoje dva načina kako možemo napraviti pogrešku pri provođenju statističkog testa:

	Nul hipoteza	
	Točna	**Netočna**
Ne odbacujemo	**Ispravno**	**Pogrešno** (β)
Odbacujemo	**Pogrešno** (α)	**Ispravno**

Koja pogreška je gora? (uzmite za primjer nul hipotezu "osumnjičenik je nedužan")

- Ako odbacimo točnu nul hipotezu - **pogreška I. vrste** (α);
- Ako je nul hipoteza netočna, a mi je ne odbacimo - **pogreška II. vrste** (β).

Matematički te pogreške označavamo kao:

$$\alpha = \mathbf{P}(H_0 \text{ odbacimo } | H_0 \text{ točna}),$$
$$\beta = \mathbf{P}(H_0 \text{ ne odbacimo } | H_1 \text{ točna}).$$

Pogreške statističkog testa

Problemi:

Iako bismo htjeli odabrati statistički test koji ima najmanje vrijednosti obaju pogrešaka, to nije moguće obzirom da manja vrijednost pogreške I. vrste povlači veće vrijednosti pogreške II. vrste. Stoga se često uzima test koji ima najmanju pogrešku II. vrste (tzv. najsnažniji test) uz uvjet da pogreška I. vrste ne prelazi neku unaprijed zadanu (malu) vrijednost koju nazivamo **razina značajnosti**.

Pogreške statističkog testa

Problemi:

Iako bismo htjeli odabrati statistički test koji ima najmanje vrijednosti obaju pogrešaka, to nije moguće obzirom da manja vrijednost pogreške I. vrste povlači veće vrijednosti pogreške II. vrste. Stoga se često uzima test koji ima najmanju pogrešku II. vrste (tzv. najsnažniji test) uz uvjet da pogreška I. vrste ne prelazi neku unaprijed zadanu (malu) vrijednost koju nazivamo **razina značajnosti**.

Nadalje, koliko nul hipoteza nije točna, ne znamo o kojoj se točno distribuciji radi, pa ni ne možemo izračunati vjerojatnost β.

Pogreške statističkog testa

Problemi:

Iako bismo htjeli odabrati statistički test koji ima najmanje vrijednosti obaju pogrešaka, to nije moguće obzirom da manja vrijednost pogreške I. vrste povlači veće vrijednosti pogreške II. vrste. Stoga se često uzima test koji ima najmanju pogrešku II. vrste (tzv. najsnažniji test) uz uvjet da pogreška I. vrste ne prelazi neku unaprijed zadanu (malu) vrijednost koju nazivamo **razina značajnosti**.

Nadalje, koliko nul hipoteza nije točna, ne znamo o kojoj se točno distribuciji radi, pa ni ne možemo izračunati vjerojatnost β.

Snaga testa $= 1 - \beta$ - vjerojatnost ne odbacivanja nul hipoteze ukoliko je ona točna.

Provođenje statističkog testiranja:

1. **Izbor statistike i određivanje njene vrijednosti** - biramo odgovarajuću statistiku (slučajnu varijablu) koja će biti osnova za donošenje statističkog zaključka.

Provođenje statističkog testiranja:

1. **Izbor statistike i određivanje njene vrijednosti** - biramo odgovarajuću statistiku (slučajnu varijablu) koja će biti osnova za donošenje statističkog zaključka. U prethodnom primjeru biramo statistiku

$$Z = \frac{\hat{p} - 0.5}{\sqrt{0.5 \cdot (1 - 0.5)}/\sqrt{n}}$$

jer je za veliku duljinu uzorka n, uz pretpostavku da je H_0 točna, Z približno jedinično normalno distribuirana.

Provođenje statističkog testiranja:

1. **Izbor statistike i određivanje njene vrijednosti** - biramo odgovarajuću statistiku (slučajnu varijablu) koja će biti osnova za donošenje statističkog zaključka. U prethodnom primjeru biramo statistiku

$$Z = \frac{\hat{p} - 0.5}{\sqrt{0.5 \cdot (1 - 0.5)}/\sqrt{n}}$$

   jer je za veliku duljinu uzorka n, uz pretpostavku da je H_0 točna, Z približno jedinično normalno distribuirana.

2. **Izbor razine značajnosti.** - zadajemo α, koji predstavlja gornju ogradu za pogrešku I. vrste. Time dobivamo da je vjerojatnost odbacivanja nulte hipoteze, ako je ona točna, najviše α. Često se uzima $\alpha = 0.05$ ili manje.

Provođenje statističkog testiranja:

1. **Izbor statistike i određivanje njene vrijednosti** - biramo odgovarajuću statistiku (slučajnu varijablu) koja će biti osnova za donošenje statističkog zaključka. U prethodnom primjeru biramo statistiku

$$Z = \frac{\hat{p} - 0.5}{\sqrt{0.5 \cdot (1 - 0.5)} / \sqrt{n}}$$

jer je za veliku duljinu uzorka n, uz pretpostavku da je H_0 točna, Z približno jedinično normalno distribuirana.

2. **Izbor razine značajnosti.** - zadajemo α, koji predstavlja gornju ogradu za pogrešku I. vrste. Time dobivamo da je vjerojatnost odbacivanja nulte hipoteze, ako je ona točna, najviše α. Često se uzima $\alpha = 0.05$ ili manje.

3. **Određivanje kritičnog područja i donošenje statističkog zaključka** - uz pretpostavku da je H_0 točna, na osnovu distribucije statistike i odabrane razine značajnosti definiramo odgovarajući interval u kojem će se statistika nalaziti s vjerojatnošću $1 - \alpha$.

Provođenje statističkog testiranja:

1. **Izbor statistike i određivanje njene vrijednosti** - biramo odgovarajuću statistiku (slučajnu varijablu) koja će biti osnova za donošenje statističkog zaključka. U prethodnom primjeru biramo statistiku

$$Z = \frac{\hat{p} - 0.5}{\sqrt{0.5 \cdot (1 - 0.5)}/\sqrt{n}}$$

jer je za veliku duljinu uzorka n, uz pretpostavku da je H_0 točna, Z približno jedinično normalno distribuirana.

2. **Izbor razine značajnosti.** - zadajemo α, koji predstavlja gornju ogradu za pogrešku I. vrste. Time dobivamo da je vjerojatnost odbacivanja nulte hipoteze, ako je ona točna, najviše α. Često se uzima $\alpha = 0.05$ ili manje.

3. **Određivanje kritičnog područja i donošenje statističkog zaključka** - uz pretpostavku da je H_0 točna, na osnovu distribucije statistike i odabrane razine značajnosti definiramo odgovarajući interval u kojem će se statistika nalaziti s vjerojatnošću $1 - \alpha$. Ako je vrijednost testne statistike izvan tog intervala (odnosno, u kritičnom području), odbacujemo nul hipotezu. Ako je vrijednost testne statistike u tom intervalu, ne odbacujemo nul hipotezu.

Određivanje kritičnog područja

Određivanje kritičnog područja ovisi o alternativnoj hipotezi. Promotrimo tri moguće alternative u prethodnom primjeru za nultu hipotezu $H_0 : \quad p = 0.5$:

[1] Sjetimo se da je $-z_{1-\alpha} = z_\alpha$

Određivanje kritičnog područja

Određivanje kritičnog područja ovisi o alternativnoj hipotezi. Promotrimo tri moguće alternative u prethodnom primjeru za nultu hipotezu $H_0 : \quad p = 0.5$:

- $H_1 : \quad p < 0.5$ - uočimo da ako je stvarna vrijednost parametra p manja od 0.5, tada će statistika Z biti negativna, pa želimo da kritično područje obuhvaća samo negativne vrijednosti. Kritično područje će biti određeno intervalom

  $$\langle -\infty, -z_{1-\alpha} \rangle. \quad [1]$$

  jer je $\mathbf{P}(Z < -z_{1-\alpha} | H_0) = \alpha$, odnosno $\mathbf{P}(Z > -z_{1-\alpha} | H_0) = 1 - \alpha$.

[1] Sjetimo se da je -$z_{1-\alpha} = z_\alpha$

Određivanje kritičnog područja

Određivanje kritičnog područja ovisi o alternativnoj hipotezi. Promotrimo tri moguće alternative u prethodnom primjeru za nultu hipotezu $H_0 : \quad p = 0.5$:

- $H_1 : \quad p < 0.5$ - uočimo da ako je stvarna vrijednost parametra p manja od 0.5, tada će statistika Z biti negativna, pa želimo da kritično područje obuhvaća samo negativne vrijednosti. Kritično područje će biti određeno intervalom

$$\langle -\infty, -z_{1-\alpha} \rangle.$$ [1]

  jer je $\mathbf{P}(Z < -z_{1-\alpha} | H_0) = \alpha$, odnosno $\mathbf{P}(Z > -z_{1-\alpha} | H_0) = 1 - \alpha$.

- $H_1 : \quad p > 0.5$ - analogno kao u prethodnom slučaju, alternativnu hipotezu podupiru velike pozitivne vrijednosti statistike Z. Kritično područje će biti određeno intervalom

$$\langle z_{1-\alpha}, \infty \rangle.$$

[1] Sjetimo se da je -$z_{1-\alpha} = z_\alpha$

Određivanje kritičnog područja

Određivanje kritičnog područja ovisi o alternativnoj hipotezi. Promotrimo tri moguće alternative u prethodnom primjeru za nultu hipotezu $H_0: \quad p = 0.5$:

- $H_1: \quad p < 0.5$ - uočimo da ako je stvarna vrijednost parametra p manja od 0.5, tada će statistika Z biti negativna, pa želimo da kritično područje obuhvaća samo negativne vrijednosti. Kritično područje će biti određeno intervalom
$$\langle -\infty, -z_{1-\alpha} \rangle.$$ [1]
jer je $\mathbf{P}(Z < -z_{1-\alpha} | H_0) = \alpha$, odnosno $\mathbf{P}(Z > -z_{1-\alpha} | H_0) = 1 - \alpha$.
- $H_1: \quad p > 0.5$ - analogno kao u prethodnom slučaju, alternativnu hipotezu podupiru velike pozitivne vrijednosti statistike Z. Kritično područje će biti određeno intervalom
$$\langle z_{1-\alpha}, \infty \rangle.$$
- $H_1: \quad p \neq 0.5$ - alternativnu hipotezu podupiru velike vrijednosti statistike $|Z|$. Kritično područje će biti određeno unijom intervala
$$\langle -\infty, -z_{1-\alpha/2} \rangle \cup \langle z_{1-\alpha/2}, \infty \rangle,$$
jer je $\mathbf{P}(|Z| > z_{1-\alpha/2} | H_0) = \alpha$, odnosno $\mathbf{P}(|Z| < z_{1-\alpha/2} | H_0) = 1 - \alpha$.

[1] Sjetimo se da je $-z_{1-\alpha} = z_\alpha$

p-vrijednost testa

Uočimo, što je odabrana razina značajnosti manja, to je manja vjerojatnost da ćemo odbaciti nultu hipotezu (odnosno, kritično područje je manje). Iz ove opservacije slijedi:

$$\text{manji } \alpha \implies \text{statistički značajniji zaključak ako odbacimo } H_0$$

p-vrijednost testa

Uočimo, što je odabrana razina značajnosti manja, to je manja vjerojatnost da ćemo odbaciti nultu hipotezu (odnosno, kritično područje je manje). Iz ove opservacije slijedi:

$$\text{manji } \alpha \implies \text{statistički značajniji zaključak ako odbacimo } H_0$$

Stoga se prirodno postavlja pitanje koja je najmanja razina značajnosti za koju ćemo odbaciti nultu hipotezu? To je ujedno i vjerojatnost da mjerenje rezultira dobivenim podacima, ako je nulta hipoteza točna.

p-vrijednost testa

Uočimo, što je odabrana razina značajnosti manja, to je manja vjerojatnost da ćemo odbaciti nultu hipotezu (odnosno, kritično područje je manje). Iz ove opservacije slijedi:

$$\text{manji } \alpha \implies \text{statistički značajniji zaključak ako odbacimo } H_0$$

Stoga se prirodno postavlja pitanje koja je najmanja razina značajnosti za koju ćemo odbaciti nultu hipotezu? To je ujedno i vjerojatnost da mjerenje rezultira dobivenim podacima, ako je nulta hipoteza točna. $\longrightarrow$ ***p*-vrijednost**

p-vrijednost testa

Uočimo, što je odabrana razina značajnosti manja, to je manja vjerojatnost da ćemo odbaciti nultu hipotezu (odnosno, kritično područje je manje). Iz ove opservacije slijedi:

$$\text{manji } \alpha \implies \text{statistički značajniji zaključak ako odbacimo } H_0$$

Stoga se prirodno postavlja pitanje koja je najmanja razina značajnosti za koju ćemo odbaciti nultu hipotezu? To je ujedno i vjerojatnost da mjerenje rezultira dobivenim podacima, ako je nulta hipoteza točna. $\longrightarrow$ ***p*-vrijednost**

p-vrijednost računamo ovisno o alternativnoj hipotezi. Promotrimo tri moguće alternative u prethodnom primjeru za nultu hipotezu $H_0: \quad p = 0.5$

p-vrijednost testa

Uočimo, što je odabrana razina značajnosti manja, to je manja vjerojatnost da ćemo odbaciti nultu hipotezu (odnosno, kritično područje je manje). Iz ove opservacije slijedi:

$$\text{manji } \alpha \implies \text{statistički značajniji zaključak ako odbacimo } H_0$$

Stoga se prirodno postavlja pitanje koja je najmanja razina značajnosti za koju ćemo odbaciti nultu hipotezu? To je ujedno i vjerojatnost da mjerenje rezultira dobivenim podacima, ako je nulta hipoteza točna. $\longrightarrow$ ***p*-vrijednost**

p-vrijednost računamo ovisno o alternativnoj hipotezi. Promotrimo tri moguće alternative u prethodnom primjeru za nultu hipotezu $H_0: \quad p = 0.5$

- $H_1: \quad p < 0.5$
$$p = \mathbf{P}(Z \leqslant z | H_0) = \Phi(z).$$
- $H_1: \quad p > 0.5$
$$p = \mathbf{P}(Z \geqslant z | H_0) = 1 - \Phi(z).$$
- $H_1: \quad p \neq 0.5$
$$p = \mathbf{P}(|Z| \geqslant |z||H_0) = 2\mathbf{P}(Z \geqslant |z||H_0) = 2(1 - \Phi(|z|)).$$

Donošenje statističkog zaključka temeljem p-vrijednosti

p-vrijednost je najmanja razina značajnosti za koju ćemo odbaciti nultu hipotezu. Stoga temeljem p-vrijednosti možemo donijeti zaključak statističkog testa za danu razinu značajnosti α:

Donošenje statističkog zaključka temeljem *p*-vrijednosti

p-vrijednost je najmanja razina značajnosti za koju ćemo odbaciti nultu hipotezu. Stoga temeljem *p*-vrijednosti možemo donijeti zaključak statističkog testa za danu razinu značajnosti α:

- Ako je $\alpha < p$ ne odbacujemo nultu hipotezu u korist alternativne hipoteze na razini značajnosti α.
- Ako je $\alpha \geqslant p$ odbacujemo nultu hipotezu u korist alternativne hipoteze na razini značajnosti α.

Donošenje statističkog zaključka temeljem p-vrijednosti

p-vrijednost je najmanja razina značajnosti za koju ćemo odbaciti nultu hipotezu. Stoga temeljem p-vrijednosti možemo donijeti zaključak statističkog testa za danu razinu značajnosti α:

- Ako je $\alpha < p$ ne odbacujemo nultu hipotezu u korist alternativne hipoteze na razini značajnosti α.
- Ako je $\alpha \geqslant p$ odbacujemo nultu hipotezu u korist alternativne hipoteze na razini značajnosti α.

Zaključujemo da manje p-vrijednosti daju statistički značajnije rezultate testa.

Određivanje pogreške II. vrste

Problem određivanja vjerojatnosti pogreške II. vrste, odnosno snage testa, ilustrirat ćemo na prethodnom primjeru. Provodimo test proporcije za hipoteze

$$H_0 : \quad p = 0.5, \quad H_0 : \quad p < 0.5$$

na uzorku duljine $n = 100$ uz razinu značajnosti 5%. Nultu hipotezu nećemo odbaciti ako je $Z = \frac{\overline{X}_n - 0.5}{\sqrt{\frac{0.5\cdot(1-0.5)}{100}}} = 20\overline{X}_n - 10 \geqslant -z_{0.05} = -1.64$.

Određivanje pogreške II. vrste

Problem određivanja vjerojatnosti pogreške II. vrste, odnosno snage testa, ilustrirat ćemo na prethodnom primjeru. Provodimo test proporcije za hipoteze

$$H_0 : \quad p = 0.5, \quad H_0 : \quad p < 0.5$$

na uzorku duljine $n = 100$ uz razinu značajnosti 5%. Nultu hipotezu nećemo odbaciti ako je $Z = \frac{\overline{X}_n - 0.5}{\sqrt{\frac{0.5\cdot(1-0.5)}{100}}} = 20\overline{X}_n - 10 \geqslant -z_{0.05} = -1.64$.

Da bismo mogli odrediti pogrešku druge vrste

$$\beta = \mathbf{P}(\text{ne odbacimo } H_0 | H_0 \text{ nije točna}) = \mathbf{P}(Z \geqslant -1.64 | H_0 \text{ nije točna})$$

treba nam informacija o distribuciji slučajne varijable Z uz uvjet da H_0 nije točna. Ali da bismo mogli odrediti distribuciju od Z moramo imati informaciju o stvarnom parametru proporcije p (različite vrijednosti parametra p daju različite vrijednosti β). Ako znamo p tada znamo da je

$$\overline{X}_n \sim N(p, p \cdot (1-p)/n),$$

pa je

$$Z \sim N(20p - 10, 400p \cdot (1-p)/n).$$

Određivanje pogreške II. vrste

Problem određivanja vjerojatnosti pogreške II. vrste, odnosno snage testa, ilustrirat ćemo na prethodnom primjeru. Provodimo test proporcije za hipoteze

$$H_0: \quad p = 0.5, \quad H_0: \quad p < 0.5$$

na uzorku duljine $n = 100$ uz razinu značajnosti 5%. Nultu hipotezu nećemo odbaciti ako je $Z = \frac{\overline{X}_n - 0.5}{\sqrt{\frac{0.5\cdot(1-0.5)}{100}}} = 20\overline{X}_n - 10 \geqslant -z_{0.05} = -1.64$.

Da bismo mogli odrediti pogrešku druge vrste

$$\beta = \mathbf{P}(\text{ne odbacimo } H_0 | H_0 \text{ nije točna}) = \mathbf{P}(Z \geqslant -1.64 | H_0 \text{ nije točna})$$

treba nam informacija o distribuciji slučajne varijable Z uz uvjet da H_0 nije točna. Ali da bismo mogli odrediti distribuciju od Z moramo imati informaciju o stvarnom parametru proporcije p (različite vrijednosti parametra p daju različite vrijednosti β). Ako znamo p tada znamo da je

$$\overline{X}_n \sim N(p, p\cdot(1-p)/n),$$

pa je

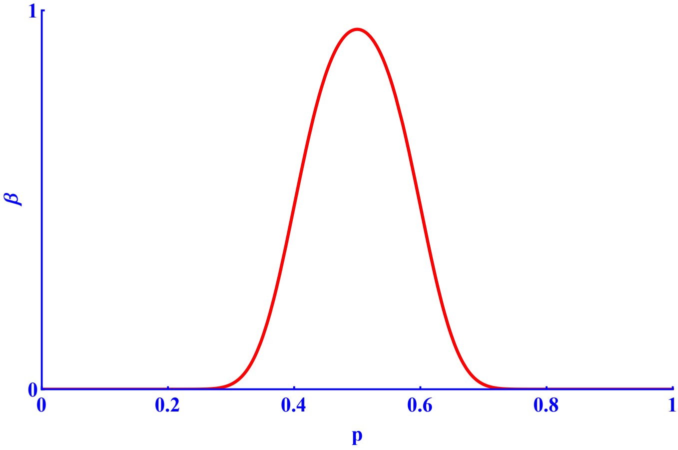
$$Z \sim N(20p - 10, 400p\cdot(1-p)/n).$$

Pretpostavimo da je stvarna vrijednost parametra $p = 0.4$ (uočite da tada H_0 nije točna). Tada je $Z \sim N(-2, 0.96)$ pa je

$$\beta(0.4) = \mathbf{P}(Z \geqslant -1.64 | p = 0.4) = 1 - NORMDIST(-1.64, -2, \sqrt{0.96}) = 0.3605.$$

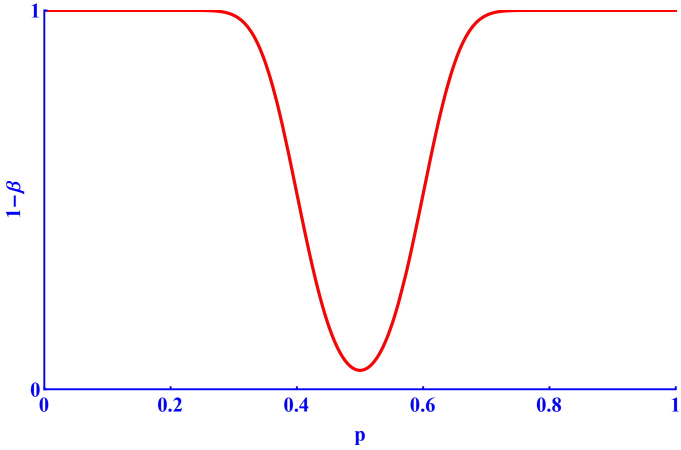
Ovisnost pogreške II. vrste $\beta(p)$ o stvarnoj proporciji

$n = 100, \quad p_0 = 0.5$



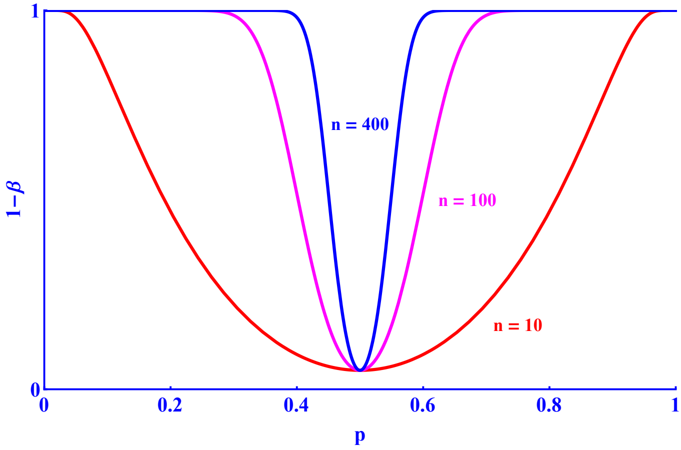
Krivulja snage testa

$n = 100, \quad p_0 = 0.5$



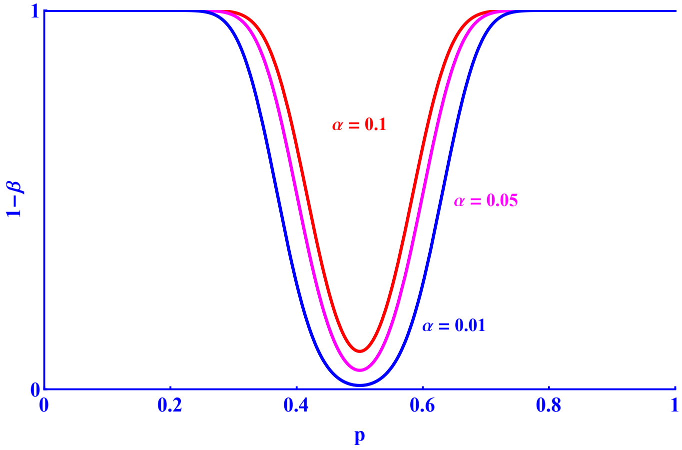
Ovisnost snage testa $\gamma(p) = 1 - \beta(p)$ o veličini uzorka

$p_0 = 0.5$



Ovisnost snage testa o razini značajnosti α

$n = 100, \quad p_0 = 0.5$



Zaključci o snazi testa:

- povećanje veličine uzorka povećava snagu testa

Zaključci o snazi testa:

- povećanje veličine uzorka povećava snagu testa
- manja razina značajnosti

  $\rightarrow$ manje kritično područje

Zaključci o snazi testa:

- povećanje veličine uzorka povećava snagu testa
- manja razina značajnosti
  - $\rightarrow$ manje kritično područje
  - $\rightarrow$ veća vjerojatnost ne odbacivanja nul hipoteze
  - $\rightarrow$ manja vjerojatnost odbacivanja nul hipoteze (makar ona bila točna)

Zaključci o snazi testa:

- povećanje veličine uzorka povećava snagu testa
- manja razina značajnosti

  $\rightarrow$ manje kritično područje

  $\rightarrow$ veća vjerojatnost ne odbacivanja nul hipoteze

  $\rightarrow$ manja vjerojatnost odbacivanja nul hipoteze (makar ona bila točna)

  $\rightarrow$ manja snaga testa

Testiranje hipoteze o proporciji - jedna populacija (veliki uzorak)

Hipoteza. Želimo donijeti statistički zaključak o parametru proporcije p koji predstavlja udio nekog tipa obilježja u nekoj populaciji. Referentna vrijednost za parametar proporcije je neki p_0. Kao nultu hipotezu uzimamo

$$H_0 : \quad p = p_0.$$

Ovisno o tome koju tvrdnju želimo testirati, odabiremo jednu od tri moguće hipoteze:

$$H_1 : \quad p \neq p_0, \qquad H_1 : \quad p > p_0, \qquad H_1 : \quad p < p_0.$$

Testiranje hipoteze o proporciji - jedna populacija (veliki uzorak)

Hipoteza. Želimo donijeti statistički zaključak o parametru proporcije p koji predstavlja udio nekog tipa obilježja u nekoj populaciji. Referentna vrijednost za parametar proporcije je neki p_0. Kao nultu hipotezu uzimamo

$$H_0 : \quad p = p_0.$$

Ovisno o tome koju tvrdnju želimo testirati, odabiremo jednu od tri moguće hipoteze:

$$H_1 : \quad p \neq p_0, \qquad H_1 : \quad p > p_0, \qquad H_1 : \quad p < p_0.$$

Statistika. Za statistiku biramo

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0 \cdot (1 - p_0)}/\sqrt{n}},$$

gdje je $\hat{p} = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$ i znamo da ako je H_0 točna i n velik vrijedi $Z \sim N(0, 1)$.

Testiranje hipoteze o proporciji - jedna populacija (veliki uzorak)

Hipoteza. Želimo donijeti statistički zaključak o parametru proporcije p koji predstavlja udio nekog tipa obilježja u nekoj populaciji. Referentna vrijednost za parametar proporcije je neki p_0. Kao nultu hipotezu uzimamo

$$H_0: \quad p = p_0.$$

Ovisno o tome koju tvrdnju želimo testirati, odabiremo jednu od tri moguće hipoteze:

$$H_1: \quad p \neq p_0, \qquad H_1: \quad p > p_0, \qquad H_1: \quad p < p_0.$$

Statistika. Za statistiku biramo

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0 \cdot (1 - p_0)}/\sqrt{n}},$$

gdje je $\hat{p} = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$ i znamo da ako je H_0 točna i n velik vrijedi $Z \sim N(0, 1)$.

Razina značajnosti i kritično područje. Sada za danu razinu značajnosti $\alpha \in (0, 1)$ (najčešće $\alpha = 0.05, 0.01$) i odgovarajuću alternativu odaberemo odgovarajuće kritično područje:

$$\langle -\infty, -z_{1-\alpha/2} \rangle \cup \langle z_{1-\alpha/2}, \infty \rangle$$
$$\langle z_{1-\alpha}, \infty \rangle$$
$$\langle -\infty, -z_{1-\alpha} \rangle.$$

Testiranje hipoteze o proporciji - jedna populacija

Jednom kada završimo mjerenje podataka (realizacija uzorka) provodimo testiranje:

1. Izračunamo vrijednost procjenitelja $\hat{p}$ i vrijednost statistike

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0 \cdot (1 - p_0)/n}}$$

Testiranje hipoteze o proporciji - jedna populacija

Jednom kada završimo mjerenje podataka (realizacija uzorka) provodimo testiranje:

1. Izračunamo vrijednost procjenitelja $\hat{p}$ i vrijednost statistike

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0 \cdot (1 - p_0)/n}}$$

2. Ako se vrijednost z nalazi u kritičnom području - nultu hipotezu odbacujemo uz razinu značajnosti α. Ako se vrijednost z ne nalazi u kritičnom području - nultu hipotezu ne odbacujemo uz razinu značajnosti α.

Testiranje hipoteze o proporciji - jedna populacija

Jednom kada završimo mjerenje podataka (realizacija uzorka) provodimo testiranje:

1. Izračunamo vrijednost procjenitelja $\hat{p}$ i vrijednost statistike

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0 \cdot (1 - p_0)/n}}$$

2. Ako se vrijednost z nalazi u kritičnom području - nultu hipotezu odbacujemo uz razinu značajnosti α. Ako se vrijednost z ne nalazi u kritičnom području - nultu hipotezu ne odbacujemo uz razinu značajnosti α.
   Na primjer za $H_1 : \quad p \neq p_0$, vrijednost z upada u kritično područje ako je

$$z \in \langle -\infty, -z_{1-\alpha/2} \rangle \cup \langle z_{1-\alpha/2}, \infty \rangle,$$

   odnosno ako vrijedi $z < -z_{1-\alpha/2} = z_{\alpha/2}$ **ili** $z > z_{1-\alpha/2}$.

Primjer. Biolozi proučavaju otpornost bakterije E. coli na antibiotike. Hipoteza je da 30% bakterija E. coli u određenom okolišu pokazuje otpornost na određeni antibiotik. Želimo testirati je li opaženi udio otpornih bakterija značajno različit od pretpostavljenog udjela (30%) i to na razini značajnosti 5%. Za testiranje ove hipoteze biolozi su prikupili uzorak od 200 bakterija E. coli iz okoliša i otkrili da je 80 njih u uzorku otporno na antibiotik.

Primjer. Biolozi proučavaju otpornost bakterije E. coli na antibiotike. Hipoteza je da 30% bakterija E. coli u određenom okolišu pokazuje otpornost na određeni antibiotik. Želimo testirati je li opaženi udio otpornih bakterija značajno različit od pretpostavljenog udjela (30%) i to na razini značajnosti 5%. Za testiranje ove hipoteze biolozi su prikupili uzorak od 200 bakterija E. coli iz okoliša i otkrili da je 80 njih u uzorku otporno na antibiotik.
Rješenje: Test proporcija (jedan uzorak). Postavljanje nul i alternativne hipoteze:

$$H_0: \ p = 0.3, \quad H_1: p \neq 0.3$$

Vidimo da je riječ o dvostranom testu (alternativa). Procijenjena proprcija jednaka je $\hat{p} = \frac{80}{200} = 0.4$. Testnu statistiku za test proporcija dobivamo pomoću formule:

$$z = \frac{0.4 - 0.3}{\sqrt{0 - 3 * 0.7/200}} = 3.09.$$

Ovdje ćemo slijediti pristup preko određivanja p-vrijednosti - za dvostrani test je

$$p = 2\mathbf{P}(Z > 3.09) = 2(1 - \Phi(3.09)) = 2(1 - 0.999) = 0.002.$$

Kako je $\alpha = 0.05 \geqslant 0.002 = p$ zaključujemo da odbacujemo nultu hipotezu u korist alternative, tj da na razini značajnosti 5% odbacujemo pretpostavku da je 30% bakterija otporno na antibiotik. Možemo li isti zaključak donijeti i na razini značajnosti 1%?

Testiranje hipoteze o očekivanju - jedna populacija - standardna devijacija poznata

Općenito imamo dva slučaja u kojima možemo testirati hipotezu vezanu uz očekivanje (srednju vrijednost obilježja u populaciji) - kada uzorak dolazi iz normalne razdiobe ili neovisno o distribuciji uzorka ako imamo dovoljno velik uzorak!

Testiranje hipoteze o očekivanju - jedna populacija - standardna devijacija poznata

Općenito imamo dva slučaja u kojima možemo testirati hipotezu vezanu uz očekivanje (srednju vrijednost obilježja u populaciji) - kada uzorak dolazi iz normalne razdiobe ili neovisno o distribuciji uzorka ako imamo dovoljno velik uzorak!

Razlikujemo dva slučaja - kada je varijanca (ekvicalentno, standardna devijacija) poznata i nepoznata, promotrimo za početak slučaj kada je varijanca poznata.

Testiranje hipoteze o očekivanju - jedna populacija - standardna devijacija poznata

Općenito imamo dva slučaja u kojima možemo testirati hipotezu vezanu uz očekivanje (srednju vrijednost obilježja u populaciji) - kada uzorak dolazi iz normalne razdiobe ili neovisno o distribuciji uzorka ako imamo dovoljno velik uzorak!

Razlikujemo dva slučaja - kada je varijanca (ekvicalentno, standardna devijacija) poznata i nepoznata, promotrimo za početak slučaj kada je varijanca poznata.

Pretpostavke:

- obilježje je distribuirano normalno ili je uzorak velik (veći od 30)
- poznata je standardna devijacija populacije (σ)

Testiranje hipoteze o očekivanju - jedna populacija - standardna devijacija poznata

Općenito imamo dva slučaja u kojima možemo testirati hipotezu vezanu uz očekivanje (srednju vrijednost obilježja u populaciji) - kada uzorak dolazi iz normalne razdiobe ili neovisno o distribuciji uzorka ako imamo dovoljno velik uzorak!

Razlikujemo dva slučaja - kada je varijanca (ekvicalentno, standardna devijacija) poznata i nepoznata, promotrimo za početak slučaj kada je varijanca poznata.

Pretpostavke:

- obilježje je distribuirano normalno ili je uzorak velik (veći od 30)
- poznata je standardna devijacija populacije (σ)

Zbog prve pretpostavke, aritmetička sredina ($\bar{X}_n$) uzorka je distribuirana normalno (ili približno normalno).

Testiranje hipoteze o očekivanju - jedna populacija - standardna devijacija poznata

Općenito imamo dva slučaja u kojima možemo testirati hipotezu vezanu uz očekivanje (srednju vrijednost obilježja u populaciji) - kada uzorak dolazi iz normalne razdiobe ili neovisno o distribuciji uzorka ako imamo dovoljno velik uzorak!

Razlikujemo dva slučaja - kada je varijanca (ekvicalentno, standardna devijacija) poznata i nepoznata, promotrimo za početak slučaj kada je varijanca poznata.

Pretpostavke:

- obilježje je distribuirano normalno ili je uzorak velik (veći od 30)
- poznata je standardna devijacija populacije (σ)

Zbog prve pretpostavke, aritmetička sredina ($\bar{X}_n$) uzorka je distribuirana normalno (ili približno normalno).

Ako pretpostavimo da je točna hipoteza da je srednja vrijednost populacije jednaka nekom zadanom broju μ_0, tada je

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1).$$

Testiranje hipoteze o srednjoj vrijednosti - jedna populacija - standardna devijacija poznata

Hipoteza. Želimo donijeti statistički zaključak o očekivanju μ nekog (numeričkog) obilježja u populaciji, referentna vrijednost za očekivanje je neki broj μ_0. Kao nultu hipotezu uzimamo

$$H_0 : \quad \mu = \mu_0.$$

Ovisno o tome koju tvrdnju želimo testirati, odabiremo jednu od tri moguće hipoteze:

$$H_1 : \quad \mu \neq \mu_0, \qquad H_1 : \quad \mu > \mu_0, \qquad H_1 : \quad \mu < \mu_0.$$

[2] $\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$

Testiranje hipoteze o srednjoj vrijednosti - jedna populacija - standardna devijacija poznata

Hipoteza. Želimo donijeti statistički zaključak o očekivanju μ nekog (numeričkog) obilježja u populaciji, referentna vrijednost za očekivanje je neki broj μ_0. Kao nultu hipotezu uzimamo

$$H_0 : \quad \mu = \mu_0.$$

Ovisno o tome koju tvrdnju želimo testirati, odabiremo jednu od tri moguće hipoteze:

$$H_1 : \quad \mu \neq \mu_0, \qquad H_1 : \quad \mu > \mu_0, \qquad H_1 : \quad \mu < \mu_0.$$

Statistika. Za statistiku biramo

$$Z = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}},$$ [2]

i znamo da ako je H_0 točna i vrijede pretpostavke testa, vrijedi $Z \sim N(0,1)$.

[2] $\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$

Testiranje hipoteze o srednjoj vrijednosti - jedna populacija - standardna devijacija poznata

Hipoteza. Želimo donijeti statistički zaključak o očekivanju μ nekog (numeričkog) obilježja u populaciji, referentna vrijednost za očekivanje je neki broj μ_0. Kao nultu hipotezu uzimamo

$$H_0 : \quad \mu = \mu_0.$$

Ovisno o tome koju tvrdnju želimo testirati, odabiremo jednu od tri moguće hipoteze:

$$H_1 : \quad \mu \neq \mu_0, \qquad H_1 : \quad \mu > \mu_0, \qquad H_1 : \quad \mu < \mu_0.$$

Statistika. Za statistiku biramo

$$Z = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}},$$ [2]

i znamo da ako je H_0 točna i vrijede pretpostavke testa, vrijedi $Z \sim N(0,1)$.

Razina značajnosti i kritično područje. Sada za danu razinu značajnosti $\alpha \in (0,1)$ (najčešće $\alpha = 0.05, 0.01$) i odgovarajuću alternativu odaberemo odgovarajuće kritično područje:

$$\langle -\infty, -z_{1-\alpha/2} \rangle \cup \langle z_{1-\alpha/2}, \infty \rangle$$
$$\langle z_{1-\alpha}, \infty \rangle$$
$$\langle -\infty, -z_{1-\alpha} \rangle.$$

[2] $\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$

Jednom kada završimo mjerenje podataka (realizacija uzorka) provodimo testiranje:

1. Izračunamo srednju vrijednost $\bar{x}$ i vrijednost statistike

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Jednom kada završimo mjerenje podataka (realizacija uzorka) provodimo testiranje:

1. Izračunamo srednju vrijednost $\bar{x}$ i vrijednost statistike

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

2. Ako se vrijednost z nalazi u kritičnom području - nultu hipotezu odbacujemo uz razinu značajnosti α. Ako se vrijednost z ne nalazi u kritičnom području - nultu hipotezu ne odbacujemo uz razinu značajnosti α.

Jednom kada završimo mjerenje podataka (realizacija uzorka) provodimo testiranje:

1. Izračunamo srednju vrijednost $\bar{x}$ i vrijednost statistike

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

2. Ako se vrijednost z nalazi u kritičnom području - nultu hipotezu odbacujemo uz razinu značajnosti α. Ako se vrijednost z ne nalazi u kritičnom području - nultu hipotezu ne odbacujemo uz razinu značajnosti α.
   Na primjer za $H_1: \quad \mu < \mu_0$, vrijednost z upada u kritično područje ako je

$$z \in \langle -\infty, -z_{1-\alpha} \rangle,$$

   odnosno ako vrijedi $z < -z_{1-\alpha} = z_\alpha$.

Primjer. U istraživanju je mjerena frekvencija otkucaja srca prije treninga. Na 57 ispitanika izmjerena je srednja vrijednost od 70.42 otkucaja srca u minuti. Možemo li na razini značajnosti 5% zaključiti da je frekvencija otkucaja srca ove populacije manja od standardnih 72 otkucaja u minuti? Standardna devijacija otkucaja srca u populaciji je 10.

Primjer. U istraživanju je mjerena frekvencija otkucaja srca prije treninga. Na 57 ispitanika izmjerena je srednja vrijednost od 70.42 otkucaja srca u minuti. Možemo li na razini značajnosti 5% zaključiti da je frekvencija otkucaja srca ove populacije manja od standardnih 72 otkucaja u minuti? Standardna devijacija otkucaja srca u populaciji je 10.

Rješenje.

Nul hipoteza: $\mu = 72$

Alternativna hipoteza: $\mu < 72$

$$n = 57,\ \sigma = 10,\ \bar{x} = 70.42,\ \alpha = 0.05.$$

Kritično područje: $z < -1.64$. Odredimo vrijednost statistike

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{70.42 - 72}{10/\sqrt{57}} = -1.192873841.$$

Jer je $-1.64 \leqslant z$ nul hipotezu ne odbacujemo na razini značajnosti 5%.

Na razini značajnosti od 5% ne možemo odbaciti hipotezu da je srednja vrijednost frekvencije otkucaja srca u populaciji (veća ili) jednaka standardnih 72 otkucaja u minuti.

Testiranje hipoteze o srednjoj vrijednosti - jedna populacija - standardna devijacija nepoznata

Ako je standardna devijacija σ nepoznata, tada ne možemo odrediti distribuciju statistike

$$X = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

Testiranje hipoteze o srednjoj vrijednosti - jedna populacija - standardna devijacija nepoznata

Ako je standardna devijacija σ nepoznata, tada ne možemo odrediti distribuciju statistike

$$X = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

No standardnu devijaciju možemo procijeniti:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_i \left(X_i - \bar{X}_n\right)^2}$$

i kada σ zamijenimo sa S dobivamo statistika

$$T = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S/\sqrt{n}}.$$

Testiranje hipoteze o srednjoj vrijednosti - jedna populacija - standardna devijacija nepoznata

Ako je standardna devijacija σ nepoznata, tada ne možemo odrediti distribuciju statistike

$$X = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

No standardnu devijaciju možemo procijeniti:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_i \left(X_i - \bar{X}_n\right)^2}$$

i kada σ zamijenimo sa S dobivamo statistika

$$T = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S/\sqrt{n}}.$$

Distribuciju statistike T možemo odrediti uz jednu od dvije pretpostavke:

- obilježje je distribuirano normalno

Testiranje hipoteze o srednjoj vrijednosti - jedna populacija - standardna devijacija nepoznata

Ako je standardna devijacija σ nepoznata, tada ne možemo odrediti distribuciju statistike

$$X = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

No standardnu devijaciju možemo procijeniti:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_i \left(X_i - \bar{X}_n\right)^2}$$

i kada σ zamijenimo sa S dobivamo statistika

$$T = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S/\sqrt{n}}.$$

Distribuciju statistike T možemo odrediti uz jednu od dvije pretpostavke:

- obilježje je distribuirano normalno- tada T ima studentovu distribuciju s $n-1$ stupnjeva slobode

$$T \sim t(n-1).$$

Testiranje hipoteze o srednjoj vrijednosti - jedna populacija - standardna devijacija nepoznata

Ako je standardna devijacija σ nepoznata, tada ne možemo odrediti distribuciju statistike

$$X = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

No standardnu devijaciju možemo procijeniti:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_i \left(X_i - \bar{X}_n\right)^2}$$

i kada σ zamijenimo sa S dobivamo statistika

$$T = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S/\sqrt{n}}.$$

Distribuciju statistike T možemo odrediti uz jednu od dvije pretpostavke:

- obilježje je distribuirano normalno- tada T ima studentovu distribuciju s $n-1$ stupnjeva slobode

$$T \sim t(n-1).$$

- uzorak je velik (veći od 30)

Testiranje hipoteze o srednjoj vrijednosti - jedna populacija - standardna devijacija nepoznata

Ako je standardna devijacija σ nepoznata, tada ne možemo odrediti distribuciju statistike

$$X = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

No standardnu devijaciju možemo procijeniti:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_i \left(X_i - \bar{X}_n\right)^2}$$

i kada σ zamijenimo sa S dobivamo statistika

$$T = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S/\sqrt{n}}.$$

Distribuciju statistike T možemo odrediti uz jednu od dvije pretpostavke:

- obilježje je distribuirano normalno- tada T ima studentovu distribuciju s $n-1$ stupnjeva slobode
$$T \sim t(n-1).$$
- uzorak je velik (veći od 30)- tada T ima standardnu normalnu razdiobu
$$T \sim N(0,1).$$

Testiranje hipoteze o srednjoj vrijednosti - jedna populacija - standardna devijacija nepoznata

Hipoteza. Želimo donijeti statistički zaključak o očekivanju μ nekog (numeričkog) obilježja u populaciji, referentna vrijednost za očekivanje je neki broj μ_0. Kao nultu hipotezu uzimamo

$$H_0 : \quad \mu = \mu_0.$$

Ovisno o tome koju tvrdnju želimo testirati, odabiremo jednu od tri moguće hipoteze:

$$H_1 : \quad \mu \neq \mu_0, \qquad H_1 : \quad \mu > \mu_0, \qquad H_1 : \quad \mu < \mu_0.$$

---

[3] $\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$, $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_i (X_i - \bar{X}_n)^2}$

Testiranje hipoteze o srednjoj vrijednosti - jedna populacija - standardna devijacija nepoznata

Hipoteza. Želimo donijeti statistički zaključak o očekivanju μ nekog (numeričkog) obilježja u populaciji, referentna vrijednost za očekivanje je neki broj μ_0. Kao nultu hipotezu uzimamo

$$H_0 : \quad \mu = \mu_0.$$

Ovisno o tome koju tvrdnju želimo testirati, odabiremo jednu od tri moguće hipoteze:

$$H_1 : \quad \mu \neq \mu_0, \qquad H_1 : \quad \mu > \mu_0, \qquad H_1 : \quad \mu < \mu_0.$$

Statistika. Za statistiku biramo

$$T = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{S/\sqrt{n}},$$ [3]

i znamo da ako je H_0 točna i vrijede pretpostavke testa, vrijedi $T \sim t(n-1)$ ili (ako je $n \geqslant 30$) $T \sim N(0,1)$.

[3] $\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$, $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_i (X_i - \bar{X}_n)^2}$

Testiranje hipoteze o srednjoj vrijednosti - jedna populacija - standardna devijacija nepoznata

Hipoteza. Želimo donijeti statistički zaključak o očekivanju μ nekog (numeričkog) obilježja u populaciji, referentna vrijednost za očekivanje je neki broj μ_0. Kao nultu hipotezu uzimamo

$$H_0 : \quad \mu = \mu_0.$$

Ovisno o tome koju tvrdnju želimo testirati, odabiremo jednu od tri moguće hipoteze:

$$H_1 : \quad \mu \neq \mu_0, \qquad H_1 : \quad \mu > \mu_0, \qquad H_1 : \quad \mu < \mu_0.$$

Statistika. Za statistiku biramo

$$T = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{S/\sqrt{n}},$$ [3]

i znamo da ako je H_0 točna i vrijede pretpostavke testa, vrijedi $T \sim t(n-1)$ ili (ako je $n \geqslant 30$) $T \sim N(0,1)$.

Razina značajnosti i kritično područje. Sada za danu razinu značajnosti $\alpha \in (0,1)$ i odgovarajuću alternativu odaberemo odgovarajuće kritično područje:

$$\langle -\infty, -q_{1-\alpha/2} \rangle \cup \langle q_{1-\alpha/2}, \infty \rangle$$

$$\langle q_{1-\alpha}, \infty \rangle$$

$$\langle -\infty, -q_{1-\alpha} \rangle, \qquad \text{gdje je } q_\beta = t_\beta(n-1) \text{ ili } q_\beta = z_\beta.$$

[3] $\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$, $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_i \left(X_i - \bar{X}_n\right)^2}$

Jednom kada završimo mjerenje podataka (realizacija uzorka) provodimo testiranje:

1. Izračunamo srednju vrijednost $\bar{x}$ i standardnu devijaciju s, te vrijednost statistike

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Jednom kada završimo mjerenje podataka (realizacija uzorka) provodimo testiranje:

1. Izračunamo srednju vrijednost $\bar{x}$ i standardnu devijaciju s, te vrijednost statistike

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

2. Ako se vrijednost z nalazi u kritičnom području - nultu hipotezu odbacujemo uz razinu značajnosti α. Ako se vrijednost z ne nalazi u kritičnom području - nultu hipotezu ne odbacujemo uz razinu značajnosti α.

Jednom kada završimo mjerenje podataka (realizacija uzorka) provodimo testiranje:

1. Izračunamo srednju vrijednost $\bar{x}$ i standardnu devijaciju s, te vrijednost statistike
$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$
2. Ako se vrijednost z nalazi u kritičnom području - nultu hipotezu odbacujemo uz razinu značajnosti α. Ako se vrijednost z ne nalazi u kritičnom području - nultu hipotezu ne odbacujemo uz razinu značajnosti α.
Na primjer za $H_1 : \quad \mu < \mu_0$, vrijednost t upada u kritično područje ako je
$$t \in \langle -\infty, -q_{1-\alpha} \rangle,$$
odnosno ako vrijedi $t < -q_{1-\alpha} = q_\alpha$. Ovdje je kao i prije $q_\beta = t_\beta(n-1)$ ili $q_\beta = z_\beta$.

Primjer. U istraživanju je mjerena frekvencija otkucaja srca prije treninga. Na 57 ispitanika izmjerena je srednja vrijednost od 70.42 otkucaja srca u minuti uz standardnu devijaciju 9.9480. Možemo li na razini značajnosti 5% zaključiti da je frekvencija otkucaja srca ove populacije manja od standardnih 72 otkucaja u minuti?

Primjer. U istraživanju je mjerena frekvencija otkucaja srca prije treninga. Na 57 ispitanika izmjerena je srednja vrijednost od 70.42 otkucaja srca u minuti uz standardnu devijaciju 9.9480. Možemo li na razini značajnosti 5% zaključiti da je frekvencija otkucaja srca ove populacije manja od standardnih 72 otkucaja u minuti?

Rješenje.

Nul hipoteza: $\mu = 72$

Alternativna hipoteza: $\mu \neq 72$

$$n = 57,\ S = 9.9480,\ \bar{X} = 70.42,\ \alpha = 0.05.$$

Kritično područje: $t < t_{\alpha/2}(56) = -2.003241$

Statistika

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{70.42 - 72}{9.9480/\sqrt{57}} = -1.199109209$$

Kako je $-2.003241 \leqslant z$ nul hipotezu ne odbacujemo. Ne možemo odbaciti hipotezu da je srednja vrijednost frekvencije otkucaja srca u populaciji (veća ili) jednaka standardnih 72 otkucaja u minuti.