Statistika

Vanja Wagner

5. Statistički testovi

Usporedba očekivanja dviju populacija

Uspoređujemo isto (numeričko) obilježje u dvije populacije - testiramo hipotezu o jednakosti očekivanja tog obilježja u tim dvijema populacijama.

Usporedba očekivanja dviju populacija

Uspoređujemo isto (numeričko) obilježje u dvije populacije - testiramo hipotezu o jednakosti očekivanja tog obilježja u tim dvijema populacijama.

Najčešće se ispituje efekt nekog tretmana - jedna populacija su jedinke na koje se primjenjuje tretman (uzorak je **eksperimentalna skupina**), a druga populacija su jedinke na koje se ne primjenjuje tretman (uzorak je **kontrolna skupina**).

Usporedba očekivanja dviju populacija

Uspoređujemo isto (numeričko) obilježje u dvije populacije - testiramo hipotezu o jednakosti očekivanja tog obilježja u tim dvijema populacijama.

Najčešće se ispituje efekt nekog tretmana - jedna populacija su jedinke na koje se primjenjuje tretman (uzorak je **eksperimentalna skupina**), a druga populacija su jedinke na koje se ne primjenjuje tretman (uzorak je **kontrolna skupina**).

Promotrit ćemo 3 različita testa:

- usporedba očekivanja dvaju normalno distribuiranih nezavisnih uzoraka s jednakim varijancama;
- usporedba očekivanja sparenih normalno distribuiranih uzoraka;
- usporedba proporcija dvaju uzoraka.

Usporedba očekivanja dviju populacija

Uspoređujemo isto (numeričko) obilježje u dvije populacije - testiramo hipotezu o jednakosti očekivanja tog obilježja u tim dvijema populacijama.

Najčešće se ispituje efekt nekog tretmana - jedna populacija su jedinke na koje se primjenjuje tretman (uzorak je **eksperimentalna skupina**), a druga populacija su jedinke na koje se ne primjenjuje tretman (uzorak je **kontrolna skupina**).

Promotrit ćemo 3 različita testa:

- usporedba očekivanja dvaju normalno distribuiranih nezavisnih uzoraka s jednakim varijancama;
- usporedba očekivanja sparenih normalno distribuiranih uzoraka;
- usporedba proporcija dvaju uzoraka.

Ovo su samo neki od primjera različitih testova usporedbe očekivanja dvaju populacija - postoje brojne modifikacije (ako uzorci nisu normalno distribuirani, ako varijance nisu jednake, neparametarske verzije testova i sl.).

Uzorci iz dvaju populacija

- Iz prve populacije izaberemo uzorak veličine n_X, a iz druge uzorak veličine n_Y.
- Uzorak iz prve populacije označimo s

$$X_1, X_2, \ldots, X_{n_X}$$

a uzorak iz druge populacije označimo s

$$Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_Y}.$$

- Srednje vrijednosti populacije označimo s μ_X i μ_Y a standardne devijacije s σ_X i σ_Y.
- Aritmetičke sredine uzoraka

$$\bar{X} = \frac{1}{n_X} \sum_i X_i \quad \text{i} \quad \bar{Y} = \frac{1}{n_Y} \sum_i Y_i$$

zadovoljavaju

$$\mathbf{E}(\bar{X}) = \mu_X, \quad \mathbf{E}(\bar{Y}) = \mu_Y, \quad \mathrm{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma_X^2}{n_X}, \quad \mathrm{Var}(\bar{Y}) = \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}.$$

Uzorci iz dvaju populacija

- Iz prve populacije izaberemo uzorak veličine n_X, a iz druge uzorak veličine n_Y.
- Uzorak iz prve populacije označimo s
$$X_1, X_2, \ldots, X_{n_X}$$
a uzorak iz druge populacije označimo s
$$Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_Y}.$$
- Srednje vrijednosti populacije označimo s μ_X i μ_Y a standardne devijacije s σ_X i σ_Y.
- Aritmetičke sredine uzoraka
$$\bar{X} = \frac{1}{n_X} \sum_i X_i \quad \text{i} \quad \bar{Y} = \frac{1}{n_Y} \sum_i Y_i$$
zadovoljavaju
$$\mathbf{E}(\bar{X}) = \mu_X, \quad \mathbf{E}(\bar{Y}) = \mu_Y, \quad \mathrm{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma_X^2}{n_X}, \quad \mathrm{Var}(\bar{Y}) = \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}.$$
- Razlika $D = \bar{X} - \bar{Y}$ zadovoljava
$$\mathbf{E}(D) = \mathbf{E}(\bar{X} - \bar{Y}) = \mathbf{E}(\bar{X}) - \mathbf{E}(\bar{Y}) = \mu_X - \mu_Y$$
$$\mathrm{Var}(D) = \mathrm{Var}(\bar{X} - \bar{Y}) = \mathrm{Var}(\bar{X}) + \mathrm{Var}(\bar{Y}) = \frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}.$$

Usporedba očekivanja dvaju normalnih populacija, jednake varijance - Odabir statistike

Nulta hipoteza se često formulira kao "nema razlike u očekivanjima dvaju populacija":

$$H_0: \ \mu_X = \mu_Y.$$

Pretpostavimo da su dva uzorka nezavisna normalno distribuirana. Tada je i slučajna varijabla $D = \overline{X} - \overline{Y}$ normalno distribuirana.

Usporedba očekivanja dvaju normalnih populacija, jednake varijance - Odabir statistike

Nulta hipoteza se često formulira kao "nema razlike u očekivanjima dvaju populacija":

$$H_0 : \ \mu_X = \mu_Y .$$

Pretpostavimo da su dva uzorka nezavisna normalno distribuirana. Tada je i slučajna varijabla $D = \overline{X} - \overline{Y}$ normalno distribuirana.

Ukoliko je $\mu_X = \mu_X$ tada je $\mathbf{E}(D) = 0$ i standardizirana varijabla zadovoljava

$$\frac{D - \mathbf{E}(D)}{\sqrt{\mathrm{Var}(D)}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}} \sim N(0, 1).$$

Usporedba očekivanja dvaju normalnih populacija, jednake varijance - Odabir statistike

Nulta hipoteza se često formulira kao "nema razlike u očekivanjima dvaju populacija":

$$H_0: \ \mu_X = \mu_Y.$$

Pretpostavimo da su dva uzorka nezavisna normalno distribuirana. Tada je i slučajna varijabla $D = \overline{X} - \overline{Y}$ normalno distribuirana.

Ukoliko je $\mu_X = \mu_X$ tada je $\mathbf{E}(D) = 0$ i standardizirana varijabla zadovoljava

$$\frac{D - \mathbf{E}(D)}{\sqrt{\mathrm{Var}(D)}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}} \sim N(0, 1).$$

Ako pretpostavimo da je standardna devijacija u obe populacije jednaka, tj. $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma$, tada je

$$\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}} = \sigma\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}.$$

Usporedba očekivanja dvaju normalnih populacija, jednake varijance - Odabir statistike

Nulta hipoteza se često formulira kao "nema razlike u očekivanjima dvaju populacija":

$$H_0: \ \mu_X = \mu_Y.$$

Pretpostavimo da su dva uzorka nezavisna normalno distribuirana. Tada je i slučajna varijabla $D = \overline{X} - \overline{Y}$ normalno distribuirana.

Ukoliko je $\mu_X = \mu_X$ tada je $\mathbf{E}(D) = 0$ i standardizirana varijabla zadovoljava

$$\frac{D - \mathbf{E}(D)}{\sqrt{\mathrm{Var}(D)}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}} \sim N(0,1).$$

Ako pretpostavimo da je standardna devijacija u obe populacije jednaka, tj. $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma$, tada je

$$\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}} = \sigma\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}.$$

Usporedba očekivanja dvaju normalnih populacija, jednake varijance - Odabir statistike

Problem: Standardna devijacija populacija je najčešće nepoznata - procjenjujemo ju s

$$S_P^2 = \frac{(n_X - 1)S_X^2 + (n_Y - 1)S_Y^2}{n_X + n_Y - 2}.$$

Usporedba očekivanja dvaju normalnih populacija, jednake varijance - Odabir statistike

Problem: Standardna devijacija populacija je najčešće nepoznata - procjenjujemo ju s

$$S_P^2 = \frac{(n_X - 1)S_X^2 + (n_Y - 1)S_Y^2}{n_X + n_Y - 2}.$$

Sada za testnu statistiku možemo uzeti

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}} \sim t(n_X + n_Y - 2).$$

Usporedba očekivanja dvaju normalnih populacija, jednake varijance - Testiranje hipoteza

Hipoteza. Želimo donijeti statistički zaključak o razlici u očekivanjima nekog (numeričkog) obilježja u dvjema populacijama. Kao nultu hipotezu (najčešće) uzimamo

$$H_0 : \quad \mu_X = \mu_Y .$$

Ovisno o tome koju tvrdnju želimo testirati, odabiremo jednu od tri moguće hipoteze:

$$H_1 : \quad \mu_X \neq \mu_Y , \qquad H_1 : \quad \mu_X > \mu_Y , \qquad H_1 : \quad \mu_X < \mu_Y .$$

Usporedba očekivanja dvaju normalnih populacija, jednake varijance - Testiranje hipoteza

Hipoteza. Želimo donijeti statistički zaključak o razlici u očekivanjima nekog (numeričkog) obilježja u dvjema populacijama. Kao nultu hipotezu (najčešće) uzimamo

$$H_0 : \quad \mu_X = \mu_Y .$$

Ovisno o tome koju tvrdnju želimo testirati, odabiremo jednu od tri moguće hipoteze:

$$H_1 : \quad \mu_X \neq \mu_Y, \qquad H_1 : \quad \mu_X > \mu_Y, \qquad H_1 : \quad \mu_X < \mu_Y .$$

Statistika. Za statistiku biramo $T = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_P \sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}}$.

i znamo da ako je H_0 točna i vrijede pretpostavke testa, vrijedi $T \sim t(n_X + n_Y - 2)$ ili (ako je $n_X + n_Y \geqslant 30$) $T \sim N(0, 1)$.

Usporedba očekivanja dvaju normalnih populacija, jednake varijance - Testiranje hipoteza

Hipoteza. Želimo donijeti statistički zaključak o razlici u očekivanjima nekog (numeričkog) obilježja u dvjema populacijama. Kao nultu hipotezu (najčešće) uzimamo

$$H_0 : \quad \mu_X = \mu_Y .$$

Ovisno o tome koju tvrdnju želimo testirati, odabiremo jednu od tri moguće hipoteze:

$$H_1 : \quad \mu_X \neq \mu_Y, \qquad H_1 : \quad \mu_X > \mu_Y, \qquad H_1 : \quad \mu_X < \mu_Y .$$

Statistika. Za statistiku biramo $T = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_P \sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}}$.

i znamo da ako je H_0 točna i vrijede pretpostavke testa, vrijedi $T \sim t(n_X + n_Y - 2)$ ili (ako je $n_X + n_Y \geqslant 30$) $T \sim N(0,1)$.

Razina značajnosti i kritično područje. Sada za danu razinu značajnosti $\alpha \in (0,1)$ i odgovarajuću alternativu odaberemo odgovarajuće kritično područje:

$$\langle -\infty, -q_{1-\alpha/2} \rangle \cup \langle q_{1-\alpha/2}, \infty \rangle$$

$$\langle q_{1-\alpha}, \infty \rangle$$

$$\langle -\infty, -q_{1-\alpha} \rangle, \qquad \text{gdje je } q_\beta = t_\beta(n_X + n_Y - 2) \text{ ili } q_\beta = z_\beta .$$

Usporedba očekivanja dvaju normalnih populacija - sparene vrijednosti

U prethodnom testu važna je pretpostavka da su uzorci iz dvije populacije međusobno nezavisni. No često se susrećemo s dizajnom eksperimenta gdje se efekt tretmana mjeri usporedbom vrijednosti obilježja prije i poslije primjene tretmana (tako da se na svakoj jedinki iz uzorka obavljaju dva mjerenja, prije i poslije tretmana).

Usporedba očekivanja dvaju normalnih populacija - sparene vrijednosti

U prethodnom testu važna je pretpostavka da su uzorci iz dvije populacije međusobno nezavisni. No često se susrećemo s dizajnom eksperimenta gdje se efekt tretmana mjeri usporedbom vrijednosti obilježja prije i poslije primjene tretmana (tako da se na svakoj jedinki iz uzorka obavljaju dva mjerenja, prije i poslije tretmana).

Označimo s X obilježje prije tretmana, i s Y obilježje poslije tretmana. Tada za svaku jedinku postoje dva mjerenja: (X_i, Y_i) i stoga su uzorci $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ su zavisni. No mjerenja na različitim jedinkama iz uzorka su i dalje nezavisna.

Usporedba očekivanja dvaju normalnih populacija - sparene vrijednosti

U prethodnom testu važna je pretpostavka da su uzorci iz dvije populacije međusobno nezavisni. No često se susrećemo s dizajnom eksperimenta gdje se efekt tretmana mjeri usporedbom vrijednosti obilježja prije i poslije primjene tretmana (tako da se na svakoj jedinki iz uzorka obavljaju dva mjerenja, prije i poslije tretmana).

Označimo s X obilježje prije tretmana, i s Y obilježje poslije tretmana. Tada za svaku jedinku postoje dva mjerenja: (X_i, Y_i) i stoga su uzorci $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ su zavisni. No mjerenja na različitim jedinkama iz uzorka su i dalje nezavisna.

Kako promatramo učinak tretmana na pojedinu jedinku, definiramo promjenu vrijednosti obilježja:

$$D_i = Y_i - X_i.$$

Usporedba očekivanja dvaju normalnih populacija - sparene vrijednosti

U prethodnom testu važna je pretpostavka da su uzorci iz dvije populacije međusobno nezavisni. No često se susrećemo s dizajnom eksperimenta gdje se efekt tretmana mjeri usporedbom vrijednosti obilježja prije i poslije primjene tretmana (tako da se na svakoj jedinki iz uzorka obavljaju dva mjerenja, prije i poslije tretmana).

Označimo s X obilježje prije tretmana, i s Y obilježje poslije tretmana. Tada za svaku jedinku postoje dva mjerenja: (X_i, Y_i) i stoga su uzorci $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ su zavisni. No mjerenja na različitim jedinkama iz uzorka su i dalje nezavisna.

Kako promatramo učinak tretmana na pojedinu jedinku, definiramo promjenu vrijednosti obilježja:

$$D_i = Y_i - X_i.$$

Sada nultu hipotezu

$$H_0: \; \mu_X = \mu_Y$$

možemo formulirati kao

$$H_0: \; \mu_D = 0.$$

Usporedba očekivanja dvaju normalnih populacija - sparene vrijednosti

U prethodnom testu važna je pretpostavka da su uzorci iz dvije populacije međusobno nezavisni. No često se susrećemo s dizajnom eksperimenta gdje se efekt tretmana mjeri usporedbom vrijednosti obilježja prije i poslije primjene tretmana (tako da se na svakoj jedinki iz uzorka obavljaju dva mjerenja, prije i poslije tretmana).

Označimo s X obilježje prije tretmana, i s Y obilježje poslije tretmana. Tada za svaku jedinku postoje dva mjerenja: (X_i, Y_i) i stoga su uzorci $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ su zavisni. No mjerenja na različitim jedinkama iz uzorka su i dalje nezavisna.

Kako promatramo učinak tretmana na pojedinu jedinku, definiramo promjenu vrijednosti obilježja:

$$D_i = Y_i - X_i.$$

Sada nultu hipotezu

$$H_0 : \ \mu_X = \mu_Y$$

možemo formulirati kao

$$H_0 : \ \mu_D = 0.$$

Uočimo, novi uzorak $D_1, D_2, \ldots, D_n$ je normalno distribuiran i varijanca nam je općenito nepoznata $\longrightarrow$ koristimo test o očekivanju za jednu populaciju, varijanca nepoznata.

Usporedba proporcija dvaju populacija

Promatramo određeni tip obilježja u dvjema populacijama - u prvoj populaciji je udio tog tipa obilježja jednak p_X, a u drugoj p_Y. Želimo testirati hipoteze

$$H_0 : \quad p_X = p_Y$$

uz jednu od alternativnih hipoteza

$$H_1 : \quad p_X \neq p_Y, \qquad H_1 : \quad p_X < p_Y, \qquad H_1 : \quad p_X > p_Y.$$

Usporedba proporcija dvaju populacija

Promatramo određeni tip obilježja u dvjema populacijama - u prvoj populaciji je udio tog tipa obilježja jednak p_X, a u drugoj p_Y. Želimo testirati hipoteze

$$H_0 : \quad p_X = p_Y$$

uz jednu od alternativnih hipoteza

$$H_1 : \quad p_X \neq p_Y, \qquad H_1 : \quad p_X < p_Y, \qquad H_1 : \quad p_X > p_Y.$$

Na osnovu uzoraka $X_1, \ldots, X_{n_X} \sim B(p_X)$ i $Y_1, \ldots, Y_{n_Y} \sim B(p_Y)$ procijenimo proporcije populacija:

$$\hat{p}_X = \overline{X}, \qquad \hat{p}_Y = \overline{Y},$$

Usporedba proporcija dvaju populacija

Promatramo određeni tip obilježja u dvjema populacijama - u prvoj populaciji je udio tog tipa obilježja jednak p_X, a u drugoj p_Y. Želimo testirati hipoteze

$$H_0: \quad p_X = p_Y$$

uz jednu od alternativnih hipoteza

$$H_1: \quad p_X \neq p_Y, \qquad H_1: \quad p_X < p_Y, \qquad H_1: \quad p_X > p_Y.$$

Na osnovu uzoraka $X_1, \ldots, X_{n_X} \sim B(p_X)$ i $Y_1, \ldots, Y_{n_Y} \sim B(p_Y)$ procijenimo proporcije populacija:

$$\hat{p}_X = \overline{X}, \qquad \hat{p}_Y = \overline{Y},$$

Na sličan način kao i prije, za dovoljno veliki uzorak, uz pretpostavku da je $p_X = p_Y = p$, možemo pokazati da za slučajnu varijablu $D = \hat{p}_X - \hat{p}_Y$ vrijedi

$$\frac{D - \mathbf{E}(D)}{\sqrt{\mathrm{Var}(D)}} = \frac{\hat{p}_X - \hat{p}_Y}{\sqrt{p \cdot (1-p)}\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}} \sim N(0,1).$$

Usporedba proporcija dvaju populacija

Promatramo određeni tip obilježja u dvjema populacijama - u prvoj populaciji je udio tog tipa obilježja jednak p_X, a u drugoj p_Y. Želimo testirati hipoteze

$$H_0: \quad p_X = p_Y$$

uz jednu od alternativnih hipoteza

$$H_1: \quad p_X \neq p_Y, \qquad H_1: \quad p_X < p_Y, \qquad H_1: \quad p_X > p_Y.$$

Na osnovu uzoraka $X_1, \ldots, X_{n_X} \sim B(p_X)$ i $Y_1, \ldots, Y_{n_Y} \sim B(p_Y)$ procijenimo proporcije populacija:

$$\hat{p}_X = \overline{X}, \qquad \hat{p}_Y = \overline{Y},$$

Na sličan način kao i prije, za dovoljno veliki uzorak, uz pretpostavku da je $p_X = p_Y = p$, možemo pokazati da za slučajnu varijablu $D = \hat{p}_X - \hat{p}_Y$ vrijedi

$$\frac{D - \mathbf{E}(D)}{\sqrt{\mathrm{Var}(D)}} = \frac{\hat{p}_X - \hat{p}_Y}{\sqrt{p \cdot (1-p)}\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}} \sim N(0,1).$$

Proporcija populacije je nepoznata pa je procijenjujemo na osnovu cijelog uzorka s

$$\hat{p} = \frac{m_X + m_Y}{n_X + n_Y} = \frac{n_X \cdot \hat{p}_X + n_Y \cdot \hat{p}_Y}{n_X + n_Y},$$

gdje je m_X, odnosno m_Y, broj jedinki s promatranim tipom obilježja u prvom, odnosno drugom, uzorku.

Usporedba proporcija dvaju populacija

Time dolazimo do statistike

$$Z = \frac{\hat{p}_X - \hat{p}_Y}{\sqrt{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}},$$

koja je uz H_0 distribuirana prema jediničnoj normalnoj distribuciji.

Usporedba proporcija dvaju populacija

Time dolazimo do statistike

$$Z = \frac{\hat{p}_X - \hat{p}_Y}{\sqrt{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})} \sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}},$$

koja je uz H_0 distribuirana prema jediničnoj normalnoj distribuciji.

Ovisno o odabranoj alternativnoj hipotezi, za danu razinu značajnosti α kritično područje je oblika:

$$\begin{aligned}
&\langle -\infty, -z_{1-\alpha/2} \rangle \cup \langle z_{1-\alpha/2}, \infty \rangle \\
&\langle -\infty, -z_{1-\alpha} \rangle, \\
&\langle z_{1-\alpha}, \infty \rangle.
\end{aligned}$$

Primjer. U istraživanju utjecaja stimulansa na krvni tlak, istraživači su dvanaestorici pacijenata dali stimulans. Svakom pacijentu je krvni tlak izmjeren prije i poslije davanja stimulansa.

Postoji li opravdanje za tvrdnju da stimulans povečava krvni tlak? Odgovorite uz razinu značajnosti 5%.

Primjer. U istraživanju utjecaja stimulansa na krvni tlak, istraživači su dvanaestorici pacijenata dali stimulans. Svakom pacijentu je krvni tlak izmjeren prije i poslije davanja stimulansa.

Postoji li opravdanje za tvrdnju da stimulans povećava krvni tlak? Odgovorite uz razinu značajnosti 5%.

Pacijent	Krvni tlak	
	Prije (X)	Poslije (Y)
1	120	128
2	124	131
3	130	131
4	118	127
5	140	132
6	128	125

Pacijent	Krvni tlak	
	Prije (X)	Poslije (Y)
7	140	141
8	135	137
9	126	118
10	130	132
11	126	129
12	127	135

Rješenje. U Excelu provodimo spareni t-test. Bitno je provjeriti uvjet o normalnosti uzoraka (kasnije!), Formiramo hipoteze: $H_0: \quad \mu_X \geqslant \mu_Y$, $H_1: \quad \mu_X < \mu_Y$

U Excelu pozivamo proceduru **t-Test: Paired Two Sample for Means** gdje je varijabla 1 uzorak X, a varijabla 2 uzorak Y. Dobijemo ispis:

t-Test: Paired Two Sample for Means

	X	Y
Mean	128,6666667	130,5
Variance	48,06060606	35
Observations	12	12
Pearson Correlation	0,598470069	
Hypothesized Mean Difference	0	
df	11	
t Stat	-1,089647988	
$\mathbf{P}(T \leqslant t)$ one-tail	0,149581749	
t Critical one-tail	1,795884819	
$\mathbf{P}(T \leqslant t)$ two-tail	0,299163499	
t Critical two-tail	2,20098516	

Usporedbe očekivanja - Pretpostavke o uzorku

- Glavna pretpostavka je **nezavisnost** uzorka. $\rightarrow$ Izbor jedinki u uzorak je nezavisan.

Usporedbe očekivanja - Pretpostavke o uzorku

- Glavna pretpostavka je **nezavisnost** uzorka. $\rightarrow$ Izbor jedinki u uzorak je nezavisan.
- U slučaju dva uzorka to vrijedi za jedinke u oba uzorka, osim kada je riječ o sparenim uzorcima.

Usporedbe očekivanja - Pretpostavke o uzorku

- Glavna pretpostavka je **nezavisnost** uzorka. $\rightarrow$ Izbor jedinki u uzorak je nezavisan.
- U slučaju dva uzorka to vrijedi za jedinke u oba uzorka, osim kada je riječ o sparenim uzorcima.
- Pretpostavka o jednakosti varijanci (gdje postoji) se također treba testirati. Ako nije zadovoljena, potrebno je koristiti modifikaciju testa (u Excelu je to procedura t-Test: Two-Sample Assuming Unequal Variances).

Usporedbe očekivanja - Pretpostavke o uzorku

- Glavna pretpostavka je **nezavisnost** uzorka. $\rightarrow$ Izbor jedinki u uzorak je nezavisan.
- U slučaju dva uzorka to vrijedi za jedinke u oba uzorka, osim kada je riječ o sparenim uzorcima.
- Pretpostavka o jednakosti varijanci (gdje postoji) se također treba testirati. Ako nije zadovoljena, potrebno je koristiti modifikaciju testa (u Excelu je to procedura t-Test: Two-Sample Assuming Unequal Variances).
- Pretpostavka o **normalnosti uzorka** se treba testirati (kasnije!). Ako pretpostavka nije zadovoljena, može se koristiti modifikacija testa za dovoljno velike uzorke (centralni granični teorem, $n \geqslant 30$)
- Kod testova o proporciji uvjet je dovoljno velika velečina uzorka ($n \geqslant 30$).

Neke krive interpretacije

- p-vrijednost je vjerojatnost da je nul hipoteza netočna.

Neke krive interpretacije

- p-vrijednost je vjerojatnost da je nul hipoteza netočna. **Krivo.**

  Ispravna interpretacija. p-vrijednost je vjerojatnost da statistika ima vrijednost veću od dobivene vrijednosti ukoliko je nul hipoteza točna.

Neke krive interpretacije

- p-vrijednost je vjerojatnost da je nul hipoteza netočna. **Krivo.**

  Ispravna interpretacija. p-vrijednost je vjerojatnost da statistika ima vrijednost veću od dobivene vrijednosti ukoliko je nul hipoteza točna.

- Neznačajan rezultat znači da je nul hipoteza vjerojatno točna.

Neke krive interpretacije

- p-vrijednost je vjerojatnost da je nul hipoteza netočna. **Krivo.**

  Ispravna interpretacija. p-vrijednost je vjerojatnost da statistika ima vrijednost veću od dobivene vrijednosti ukoliko je nul hipoteza točna.

- Neznačajan rezultat znači da je nul hipoteza vjerojatno točna. **Krivo.**

  Ispravna interpretacija. Neznačajan rezultat znači da podaci ne pokazuju da je nul hipoteza netočna.

Neke krive interpretacije

- p-vrijednost je vjerojatnost da je nul hipoteza netočna. **Krivo.**

  Ispravna interpretacija. p-vrijednost je vjerojatnost da statistika ima vrijednost veću od dobivene vrijednosti ukoliko je nul hipoteza točna.

- Neznačajan rezultat znači da je nul hipoteza vjerojatno točna. **Krivo.**

  Ispravna interpretacija. Neznačajan rezultat znači da podaci ne pokazuju da je nul hipoteza netočna.

- Ukoliko odbacimo nul hipotezu uz $\alpha = 0.05$ tada smo 95% sigurni da je alternativna hipoteza točna.

Neke krive interpretacije

- p-vrijednost je vjerojatnost da je nul hipoteza netočna. **Krivo.**

  Ispravna interpretacija. p-vrijednost je vjerojatnost da statistika ima vrijednost veću od dobivene vrijednosti ukoliko je nul hipoteza točna.

- Neznačajan rezultat znači da je nul hipoteza vjerojatno točna. **Krivo.**

  Ispravna interpretacija. Neznačajan rezultat znači da podaci ne pokazuju da je nul hipoteza netočna.

- Ukoliko odbacimo nul hipotezu uz $\alpha = 0.05$ tada smo 95% sigurni da je alternativna hipoteza točna. **Krivo.**

  Ispravna interpretacija. α određuje vjerojatnost da odbacimo nul hipotezu ukoliko je ona točna. Analogno, $1 - \alpha$ je vjerojatnost ne odbacivanja nul hipoteze ukoliko je ona točna. Vjerojatnosti da su nul hipoteza ili alternativna hipoteza točne su nam nepoznate (gornje vjerojatnosti su).

Neke krive interpretacije

- p-vrijednost je vjerojatnost da je nul hipoteza netočna. **Krivo.**

  Ispravna interpretacija. p-vrijednost je vjerojatnost da statistika ima vrijednost veću od dobivene vrijednosti ukoliko je nul hipoteza točna.

- Neznačajan rezultat znači da je nul hipoteza vjerojatno točna. **Krivo.**

  Ispravna interpretacija. Neznačajan rezultat znači da podaci ne pokazuju da je nul hipoteza netočna.

- Ukoliko odbacimo nul hipotezu uz $\alpha = 0.05$ tada smo 95% sigurni da je alternativna hipoteza točna. **Krivo.**

  Ispravna interpretacija. α određuje vjerojatnost da odbacimo nul hipotezu ukoliko je ona točna. Analogno, $1 - \alpha$ je vjerojatnost ne odbacivanja nul hipoteze ukoliko je ona točna. Vjerojatnosti da su nul hipoteza ili alternativna hipoteza točne su nam nepoznate (gornje vjerojatnosti su).

- Odbacivanje nul hipoteze uz $\alpha = 0.05$ znači da vjerojatnost da smo napravili pogrešku I. vrste iznosi 5%.

Neke krive interpretacije

- p-vrijednost je vjerojatnost da je nul hipoteza netočna. **Krivo.**

  Ispravna interpretacija. p-vrijednost je vjerojatnost da statistika ima vrijednost veću od dobivene vrijednosti ukoliko je nul hipoteza točna.

- Neznačajan rezultat znači da je nul hipoteza vjerojatno točna. **Krivo.**

  Ispravna interpretacija. Neznačajan rezultat znači da podaci ne pokazuju da je nul hipoteza netočna.

- Ukoliko odbacimo nul hipotezu uz $\alpha = 0.05$ tada smo 95% sigurni da je alternativna hipoteza točna. **Krivo.**

  Ispravna interpretacija. α određuje vjerojatnost da odbacimo nul hipotezu ukoliko je ona točna. Analogno, $1 - \alpha$ je vjerojatnost ne odbacivanja nul hipoteze ukoliko je ona točna. Vjerojatnosti da su nul hipoteza ili alternativna hipoteza točne su nam nepoznate (gornje vjerojatnosti su).

- Odbacivanje nul hipoteze uz $\alpha = 0.05$ znači da vjerojatnost da smo napravili pogrešku I. vrste iznosi 5%. **Krivo.**

  Ispravna interpretacija. To je uvjetna vjerojatnost. Vjerojatnost da smo napravili pogrešku I. vrste ukoliko je nul hipoteza točna.

Neke krive interpretacije

- Neodbacivanje nul hipoteze znači da je ona točna.

Neke krive interpretacije

- Neodbacivanje nul hipoteze znači da je ona točna. **Krivo.**

  Ispravna interpretacija. Neodbacivanje nul hipoteze znači da podaci ne podupiru zaključak da je ona netočna.

Neke krive interpretacije

- Neodbacivanje nul hipoteze znači da je ona točna. **Krivo.**

  Ispravna interpretacija. Neodbacivanje nul hipoteze znači da podaci ne podupiru zaključak da je ona netočna.

- Ako je snaga testa 80% i mi ne odbacimo nul hipotezu to znači da vjerojatnost da je nul hipoteza istinita iznosi 20%.

Neke krive interpretacije

- Neodbacivanje nul hipoteze znači da je ona točna. **Krivo.**

  Ispravna interpretacija. Neodbacivanje nul hipoteze znači da podaci ne podupiru zaključak da je ona netočna.

- Ako je snaga testa 80% i mi ne odbacimo nul hipotezu to znači da vjerojatnost da je nul hipoteza istinita iznosi 20%. **Krivo.**

  Ispravna interpretacija. 20% je vjerojatnost prihvaćanja nul hipoteze ukoliko je ona netočna.

  Bez obzira na rezultat testa mi ne znamo je li nul hipoteza točna ili nije.

Neke krive interpretacije

- Neodbacivanje nul hipoteze znači da je ona točna. **Krivo.**

  Ispravna interpretacija. Neodbacivanje nul hipoteze znači da podaci ne podupiru zaključak da je ona netočna.

- Ako je snaga testa 80% i mi ne odbacimo nul hipotezu to znači da vjerojatnost da je nul hipoteza istinita iznosi 20%. **Krivo.**

  Ispravna interpretacija. 20% je vjerojatnost prihvaćanja nul hipoteze ukoliko je ona netočna.

  Bez obzira na rezultat testa mi ne znamo je li nul hipoteza točna ili nije.

- Ako je snaga testa 80% i mi odbacimo nul hipotezu to znači da vjerojatnost da je alternativna hipoteza istinita iznosi 80%.

Neke krive interpretacije

- Neodbacivanje nul hipoteze znači da je ona točna. **Krivo.**

  Ispravna interpretacija. Neodbacivanje nul hipoteze znači da podaci ne podupiru zaključak da je ona netočna.

- Ako je snaga testa 80% i mi ne odbacimo nul hipotezu to znači da vjerojatnost da je nul hipoteza istinita iznosi 20%. **Krivo.**

  Ispravna interpretacija. 20% je vjerojatnost prihvaćanja nul hipoteze ukoliko je ona netočna.

  Bez obzira na rezultat testa mi ne znamo je li nul hipoteza točna ili nije.

- Ako je snaga testa 80% i mi odbacimo nul hipotezu to znači da vjerojatnost da je alternativna hipoteza istinita iznosi 80%. **Krivo.**

  Ispravna interpretacija. 80% je vjerojatnost prihvaćanja alternativne hipoteze ukoliko je ona točna.

Testiranje hipoteze o varijanci - osnovni pojmovi

Kod usporedbe srednjih vrijednosti dvije populcije u slučaju kada standardna devijacija populacije nije poznata odabir statistike ovisio je o jednakosti varijance dvije populacije. Sjetimo se, ako je nepoznata, varijancu procjenjujemo s:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i \left(X_i - \bar{X}\right)^2 .$$

Testiranje hipoteze o varijanci - osnovni pojmovi

Kod usporedbe srednjih vrijednosti dvije populcije u slučaju kada standardna devijacija populacije nije poznata odabir statistike ovisio je o jednakosti varijance dvije populacije. Sjetimo se, ako je nepoznata, varijancu procjenjujemo s:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i (X_i - \bar{X})^2 .$$

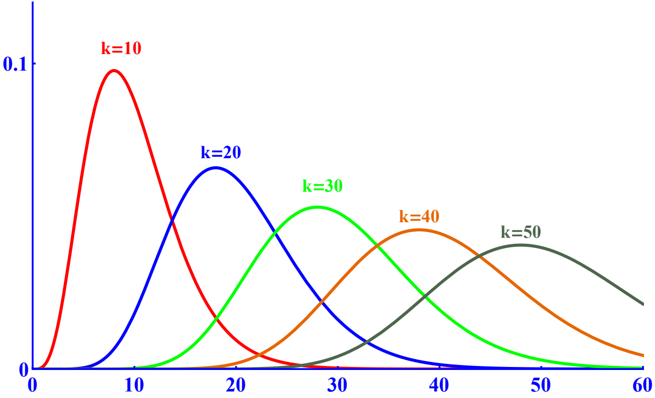
Ako je populacija normalna, varijabla

$$(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

distribuirana je prema χ^2 distribuciji s $n-1$ stupnjeva slobode, gdje je n duljina uzorka.

χ^2 distribucija

Funkcija gustoće za χ^2 distribuciju s k stupnjeva slobode ($k = 10,\ 20,\ 30,\ 40,\ 50$)



Uočimo da χ^2 distribucija nije simetrična kao npr. normalna distribucija i Studentove distribucije. χ^2 slučajna varijabla poprima samo nenegativne vrijednosti.

Interval pouzdanosti za σ^2

Interval pouzdanosti za σ^2

$$P\left(\chi^2_{\alpha/2}(n-1) \leqslant (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \leqslant \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\right) = \alpha$$

Interval pouzdanosti za σ^2

$$P\left(\chi^2_{\alpha/2}(n-1) \leqslant (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \leqslant \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\right) = \alpha$$

$$P\left(\frac{\sigma^2}{n-1}\chi^2_{\alpha/2}(n-1) \leqslant S^2 \leqslant \frac{\sigma^2}{n-1}\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\right) = \alpha$$

Interval pouzdanosti za σ^2

$$P\left(\chi^2_{\alpha/2}(n-1) \leqslant (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \leqslant \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\right) = \alpha$$

$$P\left(\frac{\sigma^2}{n-1}\chi^2_{\alpha/2}(n-1) \leqslant S^2 \leqslant \frac{\sigma^2}{n-1}\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\right) = \alpha$$

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right) = \alpha$$

Interval pouzdanosti za σ^2

$$P\left(\chi^2_{\alpha/2}(n-1) \leqslant (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \leqslant \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\right) = \alpha$$

$$P\left(\frac{\sigma^2}{n-1}\chi^2_{\alpha/2}(n-1) \leqslant S^2 \leqslant \frac{\sigma^2}{n-1}\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\right) = \alpha$$

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right) = \alpha$$

$100(1-\alpha)$%-tni interval pouzdanosti za S^2:

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \; \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right]$$

Testiranje hipoteze o varijanci - jedna populacija.

Hipoteza. Varijanca populacije jednaka je referentnoj vrijednosti σ_0:

Nul hipoteza: $H_0: \quad \sigma^2 = \sigma_0^2$

Jedna od alternativnih hipoteza: $H_1: \quad \sigma^2 \neq \sigma_0^2$, $H_1: \quad \sigma^2 < \sigma_0^2$, $H_1: \quad \sigma^2 > \sigma_0^2$.

Statistika i distribucija uz H_0: $\chi^2 = \dfrac{S^2}{\sigma_0^2}(n-1) \sim \chi^2(n-1)$.

Kritično područje uz razinu značajnosti α (ovisno o alt. hipotezi):

$$\begin{aligned}
&\langle -\infty, \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\rangle \cup \langle \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1), \infty\rangle, \\
&\langle -\infty, \chi^2_{\alpha}(n-1)\rangle, \\
&\langle \chi^2_{1-\alpha}(n-1), \infty\rangle.
\end{aligned}$$

Primjer. Proizvođač satova želi nešto saznati o varijabilnosti svojih proizvoda. Da bi to ustanovio, odlučio je odrediti interval pouzdanosti za σ dobiven na osnovu slučajnog uzorka od 10 satova izabranih iz mnogo većeg broja satova koji su prošli završnu kontrolu. Odstupanje tih satova od standardnog sata sata je zabilježeno nakon jednog mjeseca i izračunate su sljedeće statistike:

$$\bar{X} = 0.7 \text{ s}, \qquad S = 0.4 \text{ s}.$$

Pretpostavimo da razdioba mjerenja može biti dobro aproksimirana normalnom razdiobom.
Nađite 90%-tni interval pouzdanosti za σ.

Primjer. Proizvođač satova želi nešto saznati o varijabilnosti svojih proizvoda. Da bi to ustanovio, odlučio je odrediti interval pouzdanosti za σ dobiven na osnovu slučajnog uzorka od 10 satova izabranih iz mnogo većeg broja satova koji su prošli završnu kontrolu. Odstupanje tih satova od standardnog sata sata je zabilježeno nakon jednog mjeseca i izračunate su sljedeće statistike:

$$\bar{X} = 0.7 \text{ s}, \qquad S = 0.4 \text{ s}.$$

Pretpostavimo da razdioba mjerenja može biti dobro aproksimirana normalnom razdiobom.
Nađite 90%-tni interval pouzdanosti za σ.

90%-tni interval pouzdanosti za σ:

$$\left[\sqrt{0.085},\ \sqrt{0.433}\right] = [0.29,\ 0.66]$$

Uočite. $S = 0.4$ nije u sredini intervala pouzdanosti za standardnu devijaciju (kao niti $S^2 = 0.16$)

Primjer. Proizvođač satova želi nešto saznati o varijabilnosti svojih proizvoda. Da bi to ustanovio, odlučio je odrediti interval pouzdanosti za σ dobiven na osnovu slučajnog uzorka od 10 satova izabranih iz mnogo većeg broja satova koji su prošli završnu kontrolu. Odstupanje tih satova od standardnog sata sata je zabilježeno nakon jednog mjeseca i izračunate su sljedeće statistike:

$$\bar{X} = 0.7 \text{ s}, \qquad S = 0.4 \text{ s}.$$

Pretpostavimo da razdioba mjerenja može biti dobro aproksimirana normalnom razdiobom.
Nađite 90%-tni interval pouzdanosti za σ.

90%-tni interval pouzdanosti za σ:

$$\left[\sqrt{0.085},\ \sqrt{0.433}\right] = [0.29,\ 0.66]$$

Uočite. $S = 0.4$ nije u sredini intervala pouzdanosti za standardnu devijaciju (kao niti $S^2 = 0.16$)

Razlog tome je nesimetričnost funkcije gustoće za χ^2 distribuciju.

Primjer. Nastavnik je uzorku studenata dao standardizirani test. Rezultati na testu su:

39	37	57	61	50	47	48	46
69	61	65	54	53	48	44	56

Testirajte hipotezu da je varijanca populacije veća od 100 uz razinu značajnosti $\alpha = 0.05$. Pretpostavljamo da je razdioba rezultata u populaciji normalna.

Primjer. Nastavnik je uzorku studenata dao standardizirani test. Rezultati na testu su:

39	37	57	61	50	47	48	46
69	61	65	54	53	48	44	56

Testirajte hipotezu da je varijanca populacije veća od 100 uz razinu značajnosti $\alpha = 0.05$. Pretpostavljamo da je razdioba rezultata u populaciji normalna.

Vrijednost statistike:

$$\chi^2 = \frac{S^2}{\sigma_0^2}(n-1) = \frac{S^2}{100}15 = \frac{81.36}{100}15 = 12.20$$

Primjer. Nastavnik je uzorku studenata dao standardizirani test. Rezultati na testu su:

39	37	57	61	50	47	48	46
69	61	65	54	53	48	44	56

Testirajte hipotezu da je varijanca populacije veća od 100 uz razinu značajnosti $\alpha = 0.05$. Pretpostavljamo da je razdioba rezultata u populaciji normalna.

Vrijednost statistike:

$$\chi^2 = \frac{S^2}{\sigma_0^2}(n-1) = \frac{S^2}{100}15 = \frac{81.36}{100}15 = 12.20 > 7.26.$$

Nultu hipotezu ne odbacujemo.

Usporedba varijanci dvije populacije

Promatramo dva nezavisna uzorka iz dvije normalno distribuirane populacije:

Uzorak iz prve populacije označimo s $X_1, X_2, \ldots, X_{n_X}$, a iz druge s $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_Y}$.

Za procjenitelje varijanci

$$S_X^2 = \frac{1}{n_X - 1} \sum_i \left(X_i - \bar{X}\right)^2, \qquad S_Y^2 = \frac{1}{n_Y - 1} \sum_i \left(Y_i - \bar{Y}\right)^2$$

vrijedi

$$\frac{(n_X - 1)S_X^2}{\sigma_X^2} \sim \chi^2(n_X - 1), \qquad \frac{(n_Y - 1)S_Y^2}{\sigma_Y^2} \sim \chi^2(n_Y - 1).$$

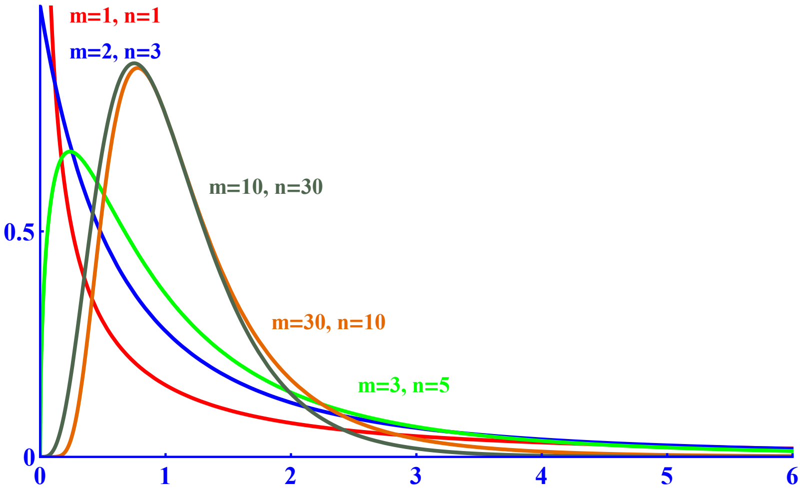
Uz pretpostavku da je $\sigma_X = \sigma_Y$ tada slijedi

$$\frac{\frac{\frac{(n_X-1)S_X^2}{\sigma_X^2}}{n_X-1}}{\frac{\frac{(n_Y-1)S_Y^2}{\sigma_Y^2}}{n_Y-1}} = \frac{S_X^2}{S_Y^2} \sim F(n_X - 1, n_Y - 1),$$

gdje je $F(n, m)$ Fisherova distribucija s n i m stupnjeva slobode.

Fisherova distribucija

Funkcija gustoće za F distribuciju s različitim brojem stupnjeva slobode



Testiranje hipoteze o varijanci - dvije populacije.

Hipoteza. Za nultu hipotezu uzmemo da su varijance populacija jednake.

Nul hipoteza: $H_0: \quad \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$

Alternativna hipoteza: npr. $H_1: \quad \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$

Statistika i njena distribucija uz H_0:

$$f = \frac{S_X^2}{S_Y^2} \sim\sim F(n_X - 1, n_Y - 1)$$

gdje je n_X veličina uzorka iz prve a n_Y veličina uzorka iz druge populacije.

Testiranje hipoteze o varijanci - dvije populacije.

Hipoteza. Za nultu hipotezu uzmemo da su varijance populacija jednake.

Nul hipoteza: $H_0 : \quad \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$

Alternativna hipoteza: npr. $H_1 : \quad \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$

Statistika i njena distribucija uz H_0:

$$f = \frac{S_X^2}{S_Y^2} \sim\sim F(n_X - 1, n_Y - 1)$$

gdje je n_X veličina uzorka iz prve a n_Y veličina uzorka iz druge populacije.

Kritično područje uz razinu značajnosti α: $\quad f < F_{\alpha/2}(n_X - 1, n_Y - 1)$ ili $f > F_{1-\alpha/2}(n_X - 1, n_Y - 1)$.

Primjer. U studiji o razlici u apsolutnoj pogrešci kod pozicioniranja aktivne i pasivne ruke istraživači su testirali 20 studenata. Kod 10 studenata su mjerili apsolutnu pogrešku kod pozicioniranja aktivne ruke a kod preostalih 10 pogrešku kod pozicioniranja pasivne ruke. Rezultati mjerenja (u cm) prikazani su u tablici:

Ispitanik	Aktivna ruka	Ispitanik	Pasivna ruka
1	2.65	11	3.30
2	2.42	12	2.00
3	3.30	13	0.09
4	0.19	14	0.04
5	1.25	15	4.56
6	2.00	16	3.33
7	3.34	17	1.02
8	4.08	18	0.89
9	0.70	19	2.78
10	2.89	20	1.65

Postoji li razlika između aktivne i pasivne ruke u apsolutnoj pogrešci kod pozicioniranja? ($\alpha = 5\%$)