Zad 1: a) Tvrdnja nije istinita. Npr.

$a_n = -\frac{1}{n}$ $\qquad \lim_n a_n = 0$

U $[0,1\rangle$ nije niti jedan član

niza (a_n)

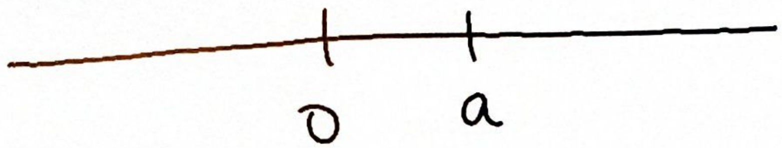
b) Tvrdnja je istinita.

dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj da je $(a_n)_n$ ograničen niz. Po BW-teoremu, $(a_n)_n$ ima konvergentan podniz $(a_{p_n})_n$. Neka je $a = \lim_n a_{p_n}$. Tada je a gomilište niza $(a_n)_n$ pa $\forall \varepsilon > 0$ interval $\langle a-\varepsilon, a+\varepsilon \rangle$ sadrži beskonačno mnogo članova niza (a_n), suprotno pretpostavci zadatka.

$\Longrightarrow$ $(a_n)_n$ je neograničen

c) Istina.

dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. da je $a > 0$



$(\forall \varepsilon > 0)$ $\langle a-\varepsilon, a+\varepsilon \rangle$ sadrži gotovo sve članove niza $(a_n)_n$ (jer je $a = \lim_n a_n$).

Međutim, za $\varepsilon = a > 0$ interval $\langle a-a, a+a \rangle = \langle 0, 2a \rangle$ ne sadrži niti jedan član niza.

d) Nije istina. Npr. niz $a_n = \frac{1}{n+1}$

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$ je niz u $\langle 0, 1 \rangle$ i svaki njegov podniz konvergira u $0 \notin \langle 0, 1 \rangle$

e) Istina. Neka je $a_n \in [0,1]$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow (a_n)_n$ je ograničen niz $\Rightarrow$ po BW tm.

(a_n) ima kvg. podniz $(a_{p_n})_n$.

Neka je $a = \lim_n a_{p_n}$.

$$0 \le a_{p_n} \le 1 \qquad / \lim$$

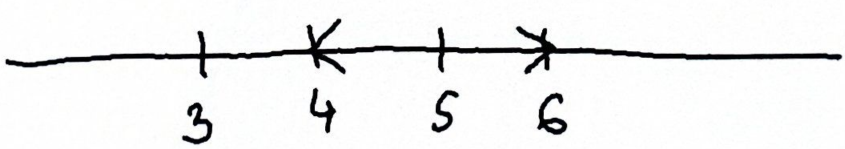
(po teoremu o predznaku) $\Rightarrow 0 \le a \le 1$

$\Rightarrow a \in [0, 1]$

f) Nije istina.

Ako je $\lim_n a_n = 5$, onda

$(\forall \varepsilon > 0)$ $\langle 5-\varepsilon, 5+\varepsilon \rangle$ sadrži gotovo sve članove niza.



Posebno, za $\varepsilon = 1$ $\langle 4, 6 \rangle$ sadrži gotovo sve članove niza $\Rightarrow$ $\langle 3, 6 \rangle$ sadrži gotovo sve članove niza $\Rightarrow$ izvan intervala $\langle 3, 6 \rangle$ može biti samo konačno mnogo članova niza.

g) $(\forall b \in \mathbb{R})$ $(\exists m \in \mathbb{N})$ t.d.

$\langle b - \frac{1}{m}, b + \frac{1}{m} \rangle$ sadrži konačno mnogo članova niza. $\Longrightarrow$ (b_n) je neograničen

Istina!

Pretpostavimo suprotno, tj. da je $(b_n)_n$ ograničen. Tada $(b_n)_n$ po BW-tmu ima konvergentan podniz $(b_{p_n})_n$.
Neka je $b = \lim_n b_{p_n}$. Tada je b gomilište niza (b_n) pa $\forall \varepsilon > 0$
$\langle b - \varepsilon, b + \varepsilon \rangle$ sadrži beskonačno mnogo članova niza. Posebno, $\forall m \in \mathbb{N}$ $\varepsilon = \frac{1}{m}$
$\langle b - \frac{1}{m}, b + \frac{1}{m} \rangle$ sadrži beskonačno mnogo članova niza, što je u suprotnosti s pretpostavkom zadatka.

h) Nije istina!

Npr.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	2	1	2	1	2

$$a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ neparan} \\ 2, & n \text{ paran} \end{cases}$$

2	3	2	3	2	3
c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6

$$c_n = \begin{cases} 2, & n \text{ neparan} \\ 3, & n \text{ paran} \end{cases}$$

b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
1.5	2.5	1.5	2.5	1.5	2.5

$$b_n = \begin{cases} 1.5, & n \text{ neparan} \\ 2.5, & n \text{ paran} \end{cases}$$

Vrijedi $a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2 je gomilište niza $(a_n)_n$ i $(c_n)_n$, ali nije gomilište niza $(b_n)_n$ jer su gomilišta niza $(b_n)_n$ 1.5 i 2.5.

2.b) $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ 1, & n = 4k-3 \\ -1, & n = 4k-1 \end{cases}$

$$a_{2k} = \frac{(2k)^4 \cos(0) + 10\,(2k)^4 \sin 0 + (2k)^2}{((2k)^2 - 1)\,((2k)^2 + 1)}$$

$$= \frac{(2k)^4 + (2k)^2}{((2k)^2 - 1)\,((2k)^2 + 1)} \quad \begin{matrix} |:(2k)^4 \\ |:(2k)^4 \end{matrix}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{(2k)^2}}{\left(1 - \frac{1}{(2k)^2}\right)\left(1 + \frac{1}{(2k)^2}\right)} \to \boxed{1}$$

$$a_{4k-3} = \frac{(4k-3)^4 \cos(\pi) + 10\,(4k-3)^4 + (4k-3)^2}{((4k-3)^2 - 1)\,((4k-3)^2 + 1)} \quad \begin{matrix} |:(4k-3)^4 \\ |:(4k-3)^4 \end{matrix}$$

$$= \frac{-1 + 10 + \frac{1}{(4k-3)^2}}{\left(1 - \frac{1}{(4k-3)^2}\right)\left(1 + \frac{1}{(4k-3)^2}\right)} \to \boxed{9}$$

$$a_{4k-1} = \frac{(4k-1)^4 \cos(-\pi) - 10\,(4k-1)^4 + (4k-1)^2}{((4k-1)^2 - 1)\,((4k-1)^2 + 1)^2} \quad |:(4k-1)^4$$

$$\to \frac{-1 - 10}{1} = \boxed{-11}$$

Gomilišta su 1, 9 i −11.

$$\liminf_{n} a_n = \inf\{1, 9, -11\} = -11$$

$$\limsup_{n} a_n = \sup\{1, 9, -11\} = 9$$

3. a)

$$a_n = \frac{n^3 \sin(\sin(n^{2023})) + 7n \cos(\cos(n^{2023}))}{(-n)^5 + (-n)^3}$$

$$-1 \leq \sin(\sin(n^{2023})) \leq 1 \quad / \cdot n^3$$

$$-n^3 \leq n^3 \sin(\sin(n^{2023})) \leq n^3$$

$$-7n \leq 7n \cos(\cos(n^{2023})) \leq 7n$$

$$-n^3 - 7n \leq \text{BROJNIK} \leq n^3 + 7n \quad /: -(n^5+n^3)$$

$$\frac{n^3+7n \;/:n^5}{n^5+n^3 \;/:n^5} \geq a_n \geq -\frac{n^3+7n \;/:n^5}{n^5+n^3 \;/:n^5}$$

$$-\frac{\frac{1}{n^2}+\frac{7}{n^4}}{1+1/n^2} \leq a_n \leq \frac{\frac{1}{n^2}+\frac{7}{n^4}}{1+\frac{1}{n^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}+\frac{7}{n^4}}{1+1/n^2} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{\frac{1}{n^2}+\frac{7}{n^4}}{1+\frac{1}{n^2}} = 0$$

Po tm-u o sendviču $\Rightarrow \boxed{\lim_n a_n = 0}$

4. a) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{3a_n+1}{a_n+7}$

$$a_2 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \qquad a_3 = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{15}{2}} = \frac{1}{3} \quad \dots$$

Kandidati za limes (ako postoji)

$$a_{n+1} = \frac{3a_n+1}{a_n+7} \quad /\lim_n \qquad (L+2)^2=5$$

$$L = \frac{3L+1}{L+7}$$

$$\Rightarrow \quad L^2+7L = 3L+1 \Rightarrow L^2+4L-1=0$$

$$\Rightarrow L_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}$$

Dokažimo indukcijom da je niz padajući

BAZA: $\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow a_2 < a_1$

PRETP: $a_n \geq a_{n+1}$ za neki n

KORAK: $$a_{n+1} = \frac{3a_n + 1}{a_n + 7} = \frac{3(a_n+7) - 20}{a_n + 7}$$

$$= 3 - \frac{20}{a_n + 7}$$

$$a_n \geq a_{n+1} \quad / + 7$$

$$a_n + 7 \geq a_{n+1} + 7$$

$$\frac{20}{a_n + 7} \leq \frac{20}{a_{n+1} + 7}$$ (svi a_n su poz. dokaz ind.)

$$3 - \frac{20}{a_n + 7} \geq 3 - \frac{20}{a_{n+1} + 7}$$

$$a_{n+1} \geq a_{n+2}$$

$\Rightarrow$ Niz je padajući

Dokažimo indukcijom $a_n \geq -2+\sqrt{5}$

BAZA: $a_1 = 1 > -2+\sqrt{5}$

PRETP: $a_n \geq -2+\sqrt{5}$ za neki n

KORAK: $a_{n+1} = 3 - \dfrac{20}{a_n+7}$

$$a_n \geq -2+\sqrt{5}$$

$$a_n+7 \geq 5+\sqrt{5}$$

$$\frac{20}{a_n+7} \leq \frac{20}{5+\sqrt{5}}$$

$$a_{n+1} \geq 3 - \frac{20}{5+\sqrt{5}}$$

$$= 3 - \frac{\cancel{20}(5-\sqrt{5})}{\cancel{20}} =$$

$$= 3-5+\sqrt{5} = -2+\sqrt{5}$$

$(a_n)_n$ je padajuć i ograničen odozdo s $-2+\sqrt{5}$ $\Rightarrow$ (a_n) je konvergentan.

Kako je $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ limes $\neq -2-\sqrt{5}$

$$\Rightarrow \lim_n a_n = -2+\sqrt{5}.$$

5.

$$\frac{2^{3n+5}+n^5+17}{n^8+2^{3n+1}} \Big| :2^{3n+5} = \frac{1+\frac{n^5}{2^{3n+5}}+\frac{17}{2^{3n+5}}}{\frac{n^8}{2^{3n+5}}+\frac{1}{2^4}}$$

$$\frac{17}{2^{3n+5}} \to 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3n+5} \to 0$$

$$0 \le \frac{n^8}{2^{3n+5}} \le \frac{n^8}{2^n} = \left(\frac{n}{\sqrt[8]{2}^{\,n}}\right)^8$$

$$\left(\sqrt[8]{2}\right)^n = \Big(\underbrace{(\sqrt[8]{2}-1)}_{>0}+1\Big)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\sqrt[8]{2}-1)^k$$

$$\geq \binom{n}{2}(\sqrt[8]{2}-1)^2$$

$$0 < \frac{n}{(\sqrt[8]{2})^n} \le \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[8]{2}-1)^2} = \frac{1}{\frac{n-1}{2}(\sqrt[8]{2}-1)^2} \to 0$$

$$\Rightarrow \lim_n \frac{n}{(\sqrt[8]{2})^n} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_n \frac{n^8}{2^n} = 0$$

tm. o sendviču $\Rightarrow \lim_n \frac{n^8}{2^{3n+5}} = 0$

$$0 \le \frac{n^5}{2^{3n+5}} \le \frac{n^8}{2^{3n+5}} \to 0$$

$$\Rightarrow \lim_n \frac{n^5}{2^{3n+5}} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_n \frac{2^{3n+5} + n^5 + 17}{n^8 + 2^{3n+1}} = \frac{1}{\frac{1}{2^4}} = 16$$

$$\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n = 2k-1 \\ 1, & n = 4k \\ -1 & n = 4k-2 \end{cases}$$

$$b_{2k-1} \to 16 + (b^2 - 9) \cdot 0 = 16$$

$$b_{4k} \to 16 + (b^2 - 9) = b^2 + 7$$

$$b_{4k-2} \to 16 - (b^2 - 9) = -b^2 + 25$$

Gomilišta su 16, b^2+7 i $-b^2+25$.

(b_n) je ograničen niz. (b_n) je konv.

$$\Leftrightarrow \quad 16 = b^2 + 7 = -b^2 + 25$$

$$\Leftrightarrow \quad b^2 = 9 \Leftrightarrow b = \pm 3$$