

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Zadaća 5

1. Izračunajte limese:

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x - 1}{\sqrt{x^2 + 2}},$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}),$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x^2 - 2x}.$$

2. Izračunajte limese:

$$(a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 4}{\sqrt{x^4 + 1}},$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+2)^3(x^2+x+1)^2}{x^7 - 50x + 5},$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2}}{x},$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)^3}{2x^3 - x + 2}.$$

3. Izračunajte limese:

$$(a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5x + 1}{3x + 7},$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x^2 + \sqrt{x + \sqrt{x}}}},$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1},$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15}.$$

4. Izračunajte limese:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} \quad (m, n \in \mathbb{N}),$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + \sqrt[5]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}},$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1},$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}.$$

5. Izračunajte limese:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin ax}{\sin bx} \quad (a, b \in \mathbb{N}),$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x^2},$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{1-x^3},$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+1)}{x+1}.$$

6. Izračunajte limese:

$$(a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a} \quad (a \in \mathbb{R}),$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{\pi}{x},$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1} - 1},$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}.$$

7. Odredite parametar a takav da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x < 0 \\ a, & x = 0 \\ 1 + x, & x > 0 \end{cases}$$

bude neprekidna.

8. Izračunajte limese:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\sqrt{x+1} - 1)}{x},$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x \sin x} - \cos x},$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{1 - 2 \cos x},$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{\cos \alpha x} - \sqrt[n]{\cos \beta x}}{x^2} \\ (m, n \in \mathbb{N}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

9. Izračunajte limese:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1 + \operatorname{ctg}^2 x},$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x + \sin x}},$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x \sin x}},$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}.$$

10. Izračunajte limese:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 2 \sin^2 x)}{x^2},$
 (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \pi x)}{x},$
 (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + 2) - \ln 2}{x},$
 (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 5^x}{4^x - 3^x}.$

11. Izračunajte limese:

- (a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x + \frac{2\pi}{3})}{\cos(x + \frac{\pi}{6})},$
 (b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt[3]{x+5}}{2 - \sqrt{x+1}},$
 (c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 3x}}{x - \sqrt[3]{x^3 + 2x^2}}.$

12. Je li moguće proširiti funkciju

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1}$$

do neprekidne funkcije na \mathbb{R} ?

13. Izračunajte limese:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - \cos x}{3^x - \operatorname{ch} x},$
 (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{tg} x - \sin x)^2}{x^2 \operatorname{tg}(x^2) \sin(x^2)},$
 (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 2x} \cdot e^{2x^2} - 1}{\ln(1 + 2x) \cdot \ln(1 + 2 \operatorname{arcsin} x)}.$

14. Izračunajte limese:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{arctg} x} - e^{\operatorname{arcsin} x}}{1 - \cos^3 x},$
 (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - e^{-x}} - \sqrt{1 - \cos x}}{\sqrt{\sin x}},$
 (c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} \sin x\right) \right)^{\operatorname{ctg}(\pi \sin x)},$
 (d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x^2 + 3x + 4)}{\ln(x^2 + 2x + 3)} \right)^{x \ln x}.$

15. Izračunajte limese:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(a+x) \operatorname{tg}(a-x) - \operatorname{tg}^2 a}{x^2}$
 $(a \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}),$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}},$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}.$$

16. Izračunajte limese:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a+x) + \ln(a-x) - 2 \ln a}{x^2}$$

$(a > 0),$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x^2} - 1)^2 + x^2}{\cos x - 1 - \frac{1}{2}x^2},$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + 5^x)}{\ln(1 + 3^x)}.$$

17. Može li se funkcija

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt[3]{x+1} - 1}$$

proširiti do neprekidne funkcije na $[-1, +\infty)$?



18. Neka je $f: \langle -a, a \rangle \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$. Koje su od sljedećih tvrdnji istinite:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow 0} f(\sin x) = l$;

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow 0} f(|x|) = l$?

Dokažite.

19. Dokažite da za $f: \langle -a, a \rangle \setminus \{0\} \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle$ takvu da je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) + \frac{1}{f(x)} \right) = 2$$

vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

20. Neka je $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ neprekidna funkcija. Dokažite da f ima **fiksnu točku**, tj. da postoji $x_0 \in [0, 1]$ takav da je $f(x_0) = x_0$.
(Uputa: Bolzano-Weierstrassov teorem)

21. Dokažite da svaki polinom neparnog stupnja ima barem jednu realnu nultočku.

22. Dokažite da jednačba $x^5 - 3x - 1 = 0$ ima barem jedno realno rješenje na segmentu $[1, 2]$.

23. Neka su $f, g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ funkcije takve da je $f \circ g = g \circ f$. Dokažite da postoji $x_0 \in [0, 1]$ takav da je $f(x_0) = g(x_0)$.

24. Neka je $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna i periodična s periodom $\tau > 0$. Dokažite da postoji $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da je

$$f\left(x_0 + \frac{\tau}{2}\right) = f(x_0).$$

25. Neka je $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Dokažite da postoje $x, y \in [0, 2]$ takvi da je

$$y - x = 1, \quad f(y) - f(x) = \frac{f(2) - f(0)}{2}.$$

26. Nađite sve neprekidne funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju Cauchyevu funkcionalnu jednačbu:

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \text{za sve } x, y \in \mathbb{R}.$$

27. Nađite sve neprekidne funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takve da je $f(1) > 0$ i

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y), \quad \text{za sve } x, y \in \mathbb{R}.$$

28. Nađite sve neprekidne funkcije koje zadovoljavaju **Jensenovu nejednakost**:

$$f\left(\frac{x + y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}, \quad \text{za sve } x, y \in \mathbb{R}.$$