MATEMATIČKA ANALIZA 1
Zadaća 3

1. Dokažite da je niz s općim članom

   (a) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\,,$

   (b) $\dfrac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n+3}+2n}$

   strogo padajući.

2. Ispitajte monotonost sljedećih nizova

   (a) $\left(\dfrac{n-8}{1-n}\right)^2 ; n \geq 2\,,$

   (b) $\dfrac{n^2+2n+1}{3n^2+n}\,,$

   (c) $\dfrac{1}{\operatorname{arctg}(-n)} \cdot \dfrac{3n-2}{n^2+n+10}\,,$

   (d) $a_1 = 10\,, \quad a_{n+1} = \dfrac{2+a_n^2}{2a_n}\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$

3. Ispitajte ograničenost sljedećih nizova

   (a) $\dfrac{n^2}{n^2+1}\,,$

   (b) $\dfrac{(-1)^n n^2}{n+4}\,,$

   (c) $\dfrac{n^3}{n+1}\,.$

4. Koji od sljedećih nizova imaju limes $+\infty$?

   (a) $2^{\sqrt{n}}$

   (b) $n^{(-1)^n}$

   (c) $n \sin \frac{n\pi}{2}$

   (d) $\log(\log n)$

5. Odredite gomilišta niza s općim članom

   (a) $a_n = (-1)^n(1+2^{-n})\,,$

   (b) $a_n = \dfrac{2n}{n^2+2} + \sin\dfrac{n\pi}{4}\,,$

   (c) $a_n = \dfrac{n\cos(n\pi)}{n+2}.$

6. Postoji li niz čiji je skup gomilišta skup $\mathbb{N}$? Dokažite svoje tvrdnje.

7. Izračunajte $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ i $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ za

(a) $a_n = \dfrac{n + \cos(n\pi)}{n+2}$,

(b) $a_n = \dfrac{n}{n+1} \cos \dfrac{n\pi}{3}$,

(c) $a_n = \dfrac{2 + (-1)^n}{2 - (-1)^n}$,

(d) $a_n = \arcsin \dfrac{(-1)^n}{2}$.

8. Izračunajte:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n^2 + 3n + 1}{5n^2 + 3n + 4}$,

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \sqrt[4]{n}}{5 + \sqrt[3]{n}}$,

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 + 1}{n + \sqrt{3n^3 + 7}}$,

   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n^2 - \dfrac{n^3 + n^2}{n+5} \right)$,

   (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n - \dfrac{(n-1)^3}{(n+1)^2} \right)$.

9. Izračunajte:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[4]{n^4 + n^3 + n^2 + n + 1} - n)$,

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n + 6^n}{2^n + 7^n}$,

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 \cos n}{(n^2+1)^2 - n + 1}$,

   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{\sqrt{n^4 + n^3 + n^2 + n + 1} - n^2}$.

10. Izračunajte:

    (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n + \sqrt{n^2 + n + 1}}$,

    (b) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt[3]{n^3 + n^2})$,

    (c) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt[4]{n^4 + n^2 + 1})$,

11. Izračunajte:

    (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n+1} \right)^{n+1}$,

    (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+1}{2n+5} \right)^{n}$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^2}$,

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-1}{3n+1}\right)^{n}$.

12. Izračunajte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln(n+1)-\ln n)$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{th}\sqrt{n}$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$, u ovisnosti o $x\in\mathbb{R}$.

13. Izračunajte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n^2}{n}$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2n}\cos 2n-\dfrac{3n}{6n+1}\right)$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos n!\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{2n}{3n+1}\cdot\dfrac{n}{1-3n}\right)$.

14. Izračunajte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!+10^n}{n^2+2^n+(n+1)!}$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n!+3^n+1}-\sqrt{n!+3^n-1})\sqrt{n!}$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{\operatorname{ch} n}-\sqrt{\operatorname{sh} n})e^{\frac{3n}{2}}$.

15. Izračunajte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n+1}-\dfrac{2n+1}{2}\right]$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1)}{n^3}\right]$.

16. Izračunajte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+3^2+\ldots+3^n}{3^n}$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+4+7+\ldots+(3n+1)}{n^2}$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}$,

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2^3+3^3+\ldots+n^3}{n^4}$.

17. Dokažite da za niz zadan rekurzivno s

$$a_1 = 1,\ a_n = 2a_{n-1} + 3\,,\ n \geq 2$$

vrijedi $a_n = 2^{n+1} - 3\,.$

18. Dokažite da za niz zadan rekurzivno s

$$a_{n+1} = \frac{3a_n - 1}{3 - a_n}\,,\ n \in \mathbb{N}$$

vrijedi $a_n = \dfrac{(2^{n-1}+1)a_1 - 2^{n-1} + 1}{2^{n-1} + 1 - (2^{n-1}-1)a_1}\,.$

19. Niz (a_n) je zadan rekurzivno s

$$a_1 = 2,\ a_{n+1} = \frac{3a_n - 1}{2a_n},\ n \in \mathbb{N}.$$

Dokažite da je (a_n) konvergentan i odredite mu limes.

20. Niz (a_n) je zadan rekurzivno s

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n + 2},\ n \in \mathbb{N}.$$

Dokažite da je (a_n) konvergentan i odredite mu limes.

21. Niz (a_n) je zadan rekurzivno s

$$a_1 = 0.5,\ a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 4}{5},\ n \in \mathbb{N}.$$

Dokažite da je (a_n) konvergentan i odredite mu limes.

22. Nađite rekurzivno zadan niz (a_n) takav da mu je limes jednak $\sqrt{7}$.

23. Koristeći rekurzivno zadani niz dokažite da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{(n+1)!} = 0.$$

24. Izračunajte

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{5 + \sqrt{5 + \ldots + \sqrt{5}}}}_{n \text{ korijena}}.$$

25. Izračunajte

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{3 \cdot \sqrt{3 \cdots \sqrt{3}}}}_{n \text{ korijena}}.$$

$\clubsuit \heartsuit \spadesuit \diamondsuit$

26. Izračunajte limes a niza (a_n) i za zadani $\varepsilon > 0$ odredite $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $|a_n - a| < \varepsilon$ za $n \geq n_0$:

    (a) $a_n = 0,\underbrace{33\ldots3}_{n}, \quad \varepsilon = 10^{-7}$,

    (b) $a_n = \dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}, \quad \varepsilon = 0,001$,

    (c) $a_n = \dfrac{5n^2+1}{7n^2-3}, \quad \varepsilon = 0,005$.

27. Dokažite koristeći *samo* definiciju limesa niza: Za niz (a_n) nenegativnih brojeva vrijedi

$$\lim_n a_n = a \quad \Rightarrow \quad \lim_n \sqrt{a_n} = \sqrt{a}\,.$$

28. Dokažite sljedeći

    Teorem (**Cesaro-Stolz**) Neka su (a_n) i (b_n) nizovi takvi da je (b_n) strogo rastući i neograničen. Ako postoji
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n},$$
    tada postoji i $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ i vrijedi
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}.$$

29. Koristeci Cesaro-Stolzov teorem izračunajte

    (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}} \; (p>1)$,

    (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n}$,

    (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$,

    (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{1}\right)^1\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\left(1+\frac{1}{3}\right)^3\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$.

30. Pretpostavite da postoji $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Vrijedi li

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} a_n \;?$$

31. Pretpostavite da postoji $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ i da je $a_n > 0$, za sve $n \in \mathbb{N}$. Vrijedi li

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \;?$$

32. Odredite $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ i $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, ako je:

(a) $a_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}}$,

(b) $a_n = \frac{2n^2}{7} - \lfloor \frac{2n^2}{7} \rfloor$,

(c) $a_n = \sqrt{3n} - \lfloor \sqrt{3n} \rfloor$.

33. Dokažite da za niz (a_n) takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = a$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = a.$$

34. Neka je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Izračunajte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(a_1 + \frac{a_2}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{a_n}{\sqrt{n}} \right).$$

35. Niz (a_n) je zadan rekurzivno s

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{n+1} = n(a_n + a_{n-1}),\ n \geq 2.$$

Nađite opću formulu za a_n.

36. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ i neka je (a_n) definiran rekurzivno

$$a_1 = a,\ a_2 = b,\ a_{n+1} = \frac{1}{2n} a_n + \frac{2n-1}{2n} a_{n-1},\ n \geq 2.$$

Izračunajte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

37. Izračunajte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}{\ln n}$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1}}{\ln n}$.

38. Niz (a_n) je zadan rekurzivno s

$$0 < a_1 < 1,\ a_{n+1} = a_n(1 - a_n),\ n \geq 1.$$

Dokažite:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = 1$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(1 - n a_n)}{\ln n} = 1$.