

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Zadaća 2

1. Neka je $f(x) = x^2 - 7x + 10$. Odredite \mathcal{R}_f , $f(\langle 0, 6 \rangle)$ i $f^{-1}(\langle 4, 10 \rangle)$.

2. Neka je

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x + 2}.$$

Odredite \mathcal{D}_f i \mathcal{R}_f . Je li f injekcija na \mathcal{D}_f ? Odredite $f(\langle -2, 0 \rangle)$ i $f^{-1}(\langle 0, 2 \rangle)$.

3. Neka je $f(x) = |x^2 + 6x + 8| - |x^2 + 4x + 3|$. Odredite $f(\langle -2, 2 \rangle)$ i $f^{-1}(\langle 1, 2 \rangle)$.

4. Odredite prirodnu domenu i sliku funkcija:

(a) $f(x) = \sqrt{3 - 2x}$

(b) $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$

(c) $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 4}$

5. Koje od sljedećih funkcija su surjekcije, a koje injekcije:

(a) $f: [0, +\infty) \rightarrow \langle -\infty, \frac{9}{4} \rangle$, $f(x) = -x^2 + x + 2$,

(b) $g: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $g(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2^{x+1}}\right)$,

(c) $h: \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 3^x + x^4 + \log_5 x$.

6. Neka je $f(x) = 2x - x^2$. Odredite $f(f(x))$.

7. Nacrtajte grafove funkcija:

(a) $f(x) = ||x - 2| - 1| + 2$,

(b) $f(x) = 2 \cdot e^{-x+1} - 7$.

8. Odredite prirodnu domenu funkcija:

(a) $f(x) = \frac{\sqrt{\ln(3 - |x|)}}{\ln|x|}$,

(b) $g(x) = \sqrt{\frac{3^{x-2} - 1}{9^x - 10 \cdot 3^{x-1} + 1}}$,

(c) $h(x) = \frac{\sqrt[4]{|x^2 + 9x - 1| - 9}}{\sqrt[5]{|x^2 + 9x - 1| - 21}}$.

9. Neka je $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija definirana sa

$$f(x) = \frac{1}{1 - x}.$$

Odredite $\mathcal{D}_{f \circ f \circ f}$ i $f \circ f \circ f$.

10. Odredite sliku funkcije $f(x) = -x^2 - 4x + 5$ i odredite joj inverznu funkciju na području strogog pada.

11. Odredite inverz funkcije $f(x) = \text{ch}(-x^2 + 4x - 3)$ na području strogog pada.
12. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Dokažite da su sljedeće funkcije strogo rastuće (pa i injekcije):
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{2n-1};$
 - $g: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty), g(x) = x^{2n}.$
13. Neka su $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ rastuće, a $g_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $g_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ padajuće funkcije. Dokažite sljedeće tvrdnje:
- $f_1 \circ f_2$ je rastuća funkcija,
 - $g_1 \circ g_2$ je rastuća funkcija,
 - $f_1 \circ g_1$ je padajuća funkcija.
14. Funkcija f je definirana formulom

$$f(x) = \frac{\sin x - 1}{2 - \sin x}.$$

Odredite $f([\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$.

15. Odredite prirodno područje definicije funkcije zadane formulom

$$f(x) = \sqrt{\frac{(2^x - 16)(\log_2 x - 1)^3}{4^x - 3 \cdot 2^x - 4}}.$$

16. Neka je $f(x) = \log_2(x - x^2)$.

- Odredite $f(\langle 0, 1 \rangle)$.
- Odredite $f^{-1}(\langle -3, 2 \rangle)$.

17. Neka je $f(x) = \frac{2^{\cos x} - 1}{2 + 2^{\cos x}}$.

- Pokažite daje f injekcija na $[0, \pi]$.
- Odredite inverz funkcije f na intervalu $[0, \pi]$.

18. Neka je $f: D \rightarrow K$ funkcija i $A \subseteq D, B \subseteq K$. Dokažite da je

$$A \subseteq f^{-1}(f(A)) \quad \text{i} \quad f(f^{-1}(B)) \subseteq B.$$

Vrijedi li jednakost?

19. Neka je $D \subseteq \mathbb{R}$. Ako je $f: D \rightarrow \mathcal{R}_f$ strogo rastuća (strogo padajuća) funkcija, dokažite da je tada i $f^{-1}: \mathcal{R}_f \rightarrow D$ strogo rastuća (strogo padajuća).
20. Neka je $f: D \rightarrow K$ funkcija. Dokažite da je f injekcija ako i samo ako postoji funkcija $g: K \rightarrow D$ takva da je

$$g \circ f = id_D.$$

21. Neka je $f: D \rightarrow K$ funkcija. Dokažite da je f surjekcija ako i samo ako postoji funkcija $g: K \rightarrow D$ takva da je

$$f \circ g = id_K.$$

22. Neka je $f: D \rightarrow K$ funkcija i $A \subseteq D$. Definiramo inkluziju skupa A u D , sa

$$i_A: A \rightarrow D, i_A(x) = x, x \in A.$$

Dokažite:

(a) $f|_A = f \circ i_A$;

(b) $(f|_A)^{-1}(B) = A \cap f^{-1}(B)$, za sve $B \subseteq K$.

23. Dokažite da je $f: D \rightarrow K$ injekcija ako i samo ako je $f^{-1}(f(A)) = A$, za sve $A \subseteq D$.

24. Dokažite da je $f: D \rightarrow K$ surjekcija ako i samo ako je $f(f^{-1}(B)) = B$, za sve $B \subseteq K$.

25. Neka je $f: D \rightarrow K$ funkcija. Dokažite da su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

(i) f je injekcija

(ii) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ za sve $A, B \subseteq D$

(iii) $f(B \setminus A) = f(B) \setminus f(A)$ za sve $A, B \subseteq D, A \subseteq B$.

26. Dokažite da za $x \in [-1, 1]$ vrijedi:

(a) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$

(b) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

27. Dokažite:

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x, \forall x > 0.$$

28. Dokažite:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

29. Funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je takva da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(x+1) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x - 2.$$

(a) Izvedite formulu za funkciju f .

(b) Odredite sliku funkcije f i skup $f^{-1}([-\frac{9}{4}, 0])$.

(c) Odredite intervale rasta i pada funkcije f i na svakom od njih nađite inverznu funkciju restrikcije od f na taj interval.

30. Postoji li surjekcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takva da je

$$f(x^3) - f(x^6)^6 \geq 3x^2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

31. Postoji li injekcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takva da je

$$f(4x^2) + f(-2x)^2 \leq -\frac{1}{4}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

32. Dokažite da funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadana s

$$f(x) = \sin(x^2)$$

nije periodična.

33. Dokažite da funkcija $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zadana s

$$f(x) = \sin(\sqrt{x})$$

nije periodična.