MATEMATIČKA ANALIZA 1
Zadaća 1

1. Riješite nejednadžbe:

   (a) $2x^2 - x - 1 < 0$,

   (b) $\dfrac{(x-1)(x^2-3x+2)^{2006}}{(x^2-7x+12)^{2001}(x-3)} > 0$.

2. Riješite nejednadžbe:

   (a) $\left|\dfrac{x}{x+1}\right| > \dfrac{x}{x+1}$,

   (b) $|x^2 - x| - |x| < 1$,

   (c) $\dfrac{1}{|x|} - x > 2$.

3. Riješite sustav nejednadžbi:

$$|3x+2| \geq 4|x-1|,$$
$$\frac{(x-1)(x+2)}{2+3x-2x^2} \leq 0.$$

4. Riješite jednadžbe

   (a) $|x+1| - |x| + 3|x-1| - 2|x-2| = x+2$,

   (b) $|x^2 - 2| = |x|$,

   (c) $|x^2 + x - 2| + |x^2 - x - 2| = 2$.

5. Neka je $P(x) = x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24$. Dokažite:

$$P(x) = |P(x)|.$$

6. Odredite $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi

$$-3 < \frac{x^2 + \lambda x - 2}{x^2 - x + 1} < 2, \quad \text{za sve } x \in \mathbb{R}.$$

7. Odredite $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da se sva rješenja jednadžbe

$$x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1 = 0$$

   nalaze u $\langle -2, 4 \rangle$.

8. (a) Ako je $f(x) = \dfrac{3x^3 - 7x^2 + 3x - 2}{3x^2 - x + 1}$, odredite $f(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$.

   (b) Dokažite da za polinom drugog stupnja $f(x) = ax^2 + bx + c$ vrijedi

$$f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x) = 0, \quad \text{za sve } x \in \mathbb{R}.$$

9. Dokažite da $\sqrt{3}$ nije racionalan broj.

10. Dokažite da $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ nije racionalan broj.

11. Dokažite da je $\sqrt{n+\sqrt{n}}$ iracionalan za svaki $n \in \mathbb{N}$.

12. Riješite nejednadžbe:

    (a) $\sin^4 x + \cos^4 x > a$, za $a \in [0,1]$,

    (b) $\dfrac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x - 1} > 0$.

13. Riješite nejednadžbe:

    (a) $\sin(\pi x) > \cos(\pi\sqrt{x})$,

    (b) $\sin(2\pi \cos x) > 0$,

    (c) $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} > \dfrac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x + 2}$.

14. Riješite nejednadžbe:

    (a) $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} > \sqrt{3}$,

    (b) $\sqrt{(x+2)(x-5)} < 8 - x$,

    (c) $\sqrt{25-x^2} - \sqrt{x^2+7x} > 3$.

15. Riješite jednadžbe:

    (a) $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{3x-2}$,

    (b) $\sqrt{x^2+2x+13} + \sqrt{x^2+2x+6} = 17$.

16. Riješite sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} \sqrt{x+y} + \sqrt{2x+y+2} &= 7 \\ 3x + 2y &= 23. \end{aligned}$$

17. Riješite nejednadžbe:

    (a) $\sqrt{x^2-8x+15} + \sqrt{x^2+2x-15} > \sqrt{4x^2-18x+18}$,

    (b) $\sqrt{12 - \dfrac{12}{x^2}} + \sqrt{x^2 - \dfrac{12}{x^2}} > \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}}$

18. Dokažite da za pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} &\geq \frac{9}{a+b+a}, \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &\geq \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} + \frac{1}{\sqrt{ab}}. \end{aligned}$$

§

19. Dokažite da je
$$\frac{|a+b|+|a-b|}{2ab}=\frac{\operatorname{sgn}(ab)}{\min\{|a|,|b|\}}.$$

20. Dokažite da za $a,b,c\in\mathbb{R}$ vrijedi
$$a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2)\geq 6abc.$$

21. Neka su $a_1,a_2,\ldots,a_n>-1$ takvi da su ili svi pozitivni ili svi negativni. Dokažite:
$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geq 1+a_1+a_2+\ldots+a_n.$$

22. Neka je $\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$. Dokažite:
$$\cos(\sin\varphi)>\sin(\cos\varphi).$$

23. Neka su $a,b\in\mathbb{R}$. Dokažite
$$|a\sin x+b\cos x|<\sqrt{a^2+b^2},\quad \text{za sve } x\in\mathbb{R}.$$

24. Neka su $a_1,\ldots,a_n\geq 0$. Definirajmo artimetičku, geometrijsku i kvadratnu sredinu brojeva $a_1,\ldots,a_n$ redom sa
$$\begin{aligned} A_n &= \frac{a_1+\ldots+a_n}{n},\\ G_n &= \sqrt[n]{a_1\cdots a_n},\\ H_n &= \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}}. \end{aligned}$$

Dokažite da je $A_n\geq G_n\geq H_n$.

25. Dokažite da za $n\in\mathbb{N}$ vrijedi:
   (a) $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\ldots+\dfrac{1}{2n}>\dfrac{2}{3}$,
   (b) $\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{3n+1}+\dfrac{1}{3n+2}+\ldots+\dfrac{1}{5n}+\dfrac{1}{5n+1}<\dfrac{2}{3}$.

26. Neka su $a_1,\ldots,a_n\geq 0$ takvi da je
$$\sum_{k=1}^{n}a_k\leq 1.$$

Dokažite da je
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\geq n^2.$$

27. Dokažite da za $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ takve da

$$a_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{2}, \quad \text{za } i = 2, \ldots, n-1$$

vrijedi

$$\sqrt{a_1\, a_n} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_n}{2}.$$

28. Dokažite da za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sqrt{n} \leq \sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2}.$$

29. Dokažite da za $x > 0$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{x^n}{1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{2n}} \leq \frac{1}{2n+1}.$$

30. Neka su $a_1, a_2 \ldots, a_n > 0$ takvi da je $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$. Dokažite:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq 2^n.$$

31. Dokažite Cauchy-Schwarzovu nejednakost, tj. da za $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots b_n \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Kada vrijedi jednakost?

(Uputa: Promatrajte $f(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2$.)

32. Neka su $a_1, \ldots, a_n > 0$. Dokažite da je

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \geq n^2,$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - a_k}{a_k} \geq n \sum_{k=1}^{n} (1 - a_k),$$

$$\sum_{k=1}^{n} (\log_a a_k)^2 \geq \frac{1}{n}, \text{ gdje je } a = a_1 \cdots a_n \neq 1.$$

33. Dokažite da za $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)^{\frac{1}{2}}.$$