MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 21. studenog 2023.

Zadatak 1. *(ukupno 13 bodova)*

(a) *(6 bodova)* Odredite prirodnu domenu funkcije zadane formulom

$$f(x) := 4^{\arcsin\left(\frac{1}{x^2-1}\right)}.$$

(b) *(7 bodova)* Postoji li surjekcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je

$$f\left(\operatorname{sh}(x)\right) - \operatorname{ch}(f(x)) \geq \operatorname{ch}(x)$$

za sve $x \in \mathbb{R}$?

Rješenje.

(a) Funkcija arcsin definirana je samo za argumente iz intervala $[-1, 1]$. Dakle, prirodna domena funkcije f je

$$x \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup \{0\} \cup [\sqrt{2}, \infty).$$

(b) Pretpostavimo da neka takva surjekcija f postoji. Budući da je f surjekcija, postoji neki $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $f\left(x_0\right) = -1$. Ako uzmemo da je $x_1 = \operatorname{Arsh}(x_0)$, tada iz $f\left(\operatorname{sh}(x_1)\right) = -1$ i $\operatorname{ch}(f\left(x_1\right)) \geq 0$ dobivamo da

$$-1 \geq f(\operatorname{sh}(x_1)) - \operatorname{ch}(f(x_1)) \geq \operatorname{ch}(x_1) \geq 0,$$

što je, naravno, kontradikcija. Dakle, takva surjekcija f ne postoji.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 21. studenog 2023.

Zadatak 2. *(ukupno 12 bodova)*

a) *(6 bodova)* Dana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ formulom

$$f(x) = |x^2 + 2x - 9|.$$

Odredite $f^{-1}([0, 6])$.

b) *(6 bodova)* Odredite sva rješenja jednadžbe

$$x + 3^x = 1.$$

Rješenje.

a) Rješavamo nejednadžbu:

$$\begin{aligned} & 0 \leq |x^2 + 2x - 9| \leq 6 \\ \iff & -6 \leq x^2 + 2x - 9 \leq 6 \\ \iff & x^2 + 2x - 3 \geq 0 \quad \text{i} \quad x^2 + 2x - 15 \leq 0 \\ \iff & x \in \langle -\infty, -3] \cup [1, +\infty\rangle \quad \text{i} \quad x \in [-5, 3]. \end{aligned}$$

Dakle, $f^{-1}([0, 6]) = [-5, -3] \cup [1, 3]$.

Može se lako vidjeti (ali nije nužno za rješenje) da je

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 9, & x \in [-1 - \sqrt{10}, -1 + \sqrt{10}], \\ x^2 + 2x - 9, & \text{inače.} \end{cases}$$

Drukčije rješenje je moguće pomoću rastava $f = f_2 \circ f_1$ te korištenjem

$$f^{-1}([0, 6]) = f_1^{-1}(f_2^{-1}([0, 6])).$$

Nadalje, zadatak je moguće riješiti skiciranjem grafa, pri čemu tada treba riješiti jednadžbe:
$x^2 + 2x - 9 = 6 \Rightarrow x = -5, 3$,
$-x^2 - 2x + 9 = 6 \Rightarrow x = -3, 1$.

b) Primijetimo da je $x = 0$ jedno rješenje jednadžbe zato što vrijedi

$$0 + 3^0 = 0 + 1 = 1.$$

Funkcija na lijevoj strani jednadžbe je strogo rastuća, jer je zbroj dvije strogo rastuće funkcije, pa je injekcija. Zato je $x = 0$ jedino rješenje jednadžbe.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 21. studenog 2023.

Zadatak 3. *(ukupno 13 bodova)* Zadana je funkcija $f(x) = 2^{\sin x + \sqrt{3}\cos x}$.

(a) *(6 bodova)* Odredite sliku $f(\mathbb{R})$.

(b) *(7 bodova)* Odredite najveći interval koji sadrži točku $\frac{98\pi}{3}$ na kojem je funkcija injekcija.

Rješenje.

(a) Primijetimo da je

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = 2\left(\sin x \cos\frac{\pi}{3} + \cos x \sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

pa funkciju možemo zapisati kao $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$, gdje je

$$f_1(x) = x + \frac{\pi}{3}, \quad f_2(x) = 2\sin x, \quad f_3(x) = 2^x.$$

Dakle,

$$f(\mathbb{R}) = f_3(f_2(f_1(\mathbb{R}))) = f_3(f_2(\mathbb{R})) = f_3([-2,2]) = \left[\frac{1}{4}, 4\right].$$

(b) Funkcije f_1 i f_3 su injekcije na cijelom intervalu pa treba odrediti najveći interval na kojem je f_2 injekcija i koji sadrži $f_1(\frac{98\pi}{3}) = 33\pi$. Funkcija sin je strogo padajuća na $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ i kako je $\sin([\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]) = [-1,1]$, što je jednako slici cijelog $\mathbb{R}$, zaključujemo da je to najveći interval koji sadrži π na kojem je injekcija. Zbog toga što je funkcija sin i 2π-periodična, to je $16 \cdot 2\pi + [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, najveći interval koji sadrži 33π na kojem je injekcija. Naime, kad bi postojao veći, tada bismo od njega oduzeli 32π i dobili veći interval koji sadrži π. Konačno, zaključujemo da je najveći traženi interval jednak

$$32\pi + \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] - \frac{\pi}{3} = 32\pi + \left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right] = \left[\frac{193\pi}{6}, \frac{199\pi}{6}\right].$$

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 21. studenog 2023.

Zadatak 4. *(ukupno 12 bodova)* Dana je surjekcija $f : \langle -\frac{\pi}{2}, 0\rangle \to \langle -5, 0\rangle$ pravilom

$$f(x) = \sin^2 x - 4\sin x - 5.$$

a) *(6 bodova)* Pokažite da je f injekcija.

b) *(6 bodova)* Odredite f^{-1}.

Rješenje.

a) Funkcija $\sin|_{\langle -\frac{\pi}{2},0\rangle}$ je strogo padajuća, pa je injekcija.
Njena slika je $\sin|_{\langle -\frac{\pi}{2},0\rangle}(\langle -\frac{\pi}{2}, 0\rangle) = \sin(\langle -\frac{\pi}{2}, 0\rangle) = \langle \sin(0), \sin(-\frac{\pi}{2})\rangle = \langle -1, 0\rangle$.
Dobro je definirana funkcija $g_1 : \langle -\frac{\pi}{2}, 0\rangle \to \langle -1, 0\rangle$, koja ima pravilo $g_1(x) = \sin x$.
Funkcija g_1 je injekcija.
Neka je p kvadratna funkcija $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja ima pravilo $p(x) = x^2 - 4x - 5$.
Njeno tjeme je $x_T = 2$ pa je restrikcija $p|_{\langle -1,0\rangle}$ strogo padajuća funkcija. Zato je $p|_{\langle -1,0\rangle}$ injekcija.
Slika funkcije $p|_{\langle -1,0\rangle}$ je $p|_{\langle -1,0\rangle}(\langle -1, 0\rangle) = p(\langle -1, 0\rangle) = \langle p(0), p(-1)\rangle = \langle -5, 0\rangle$.
Dobro je definirana funkcija $g_2 : \langle -1, 0\rangle \to \langle -5, 0\rangle$, koja ima pravilo $g_2(x) = x^2 - 4x - 5$.
Vrijedi $f = g_2 \circ g_1$.
Funkcija f je injekcija jer je kompozicija injekcija.

b) g_1 i g_2 su surjekcije, odnosno bijekcije.
$g_1^{-1} : \langle -1, 0\rangle \to \langle -\frac{\pi}{2}, 0\rangle$,
$y = g_1(x) = \sin x \Rightarrow g_1^{-1}(y) = \arcsin y$.
$g_2^{-1} : \langle -5, 0\rangle \to \langle -1, 0\rangle$,
$y = g_2(x) = x^2 - 4x - 5 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 - y = 0 \Rightarrow x = \frac{4\pm\sqrt{16-4(-5-y)}}{2}$,
$g_2^{-1}(y) = 2 - \sqrt{9 + y}$.
Sada je
$f^{-1} : \langle -5, 0\rangle \to \langle -\frac{\pi}{2}, 0\rangle$,
$f^{-1}(y) = (g_2 \circ g_1)^{-1}(y) = (g_1^{-1} \circ g_2^{-1})(y) = g_1^{-1}(g_2^{-1}(y)) = \arcsin(2 - \sqrt{9 + y})$.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 21. studenog 2023.

Zadatak 1. *(ukupno 13 bodova)*

(a) *(6 bodova)* Odredite prirodnu domenu funkcije zadane formulom

$$g(x) := e^{\arccos\left(\frac{2}{x^2+1}\right)}.$$

(b) *(7 bodova)* Postoji li surjekcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je

$$g\left(x^5\right) - \operatorname{ch}(g(x)) \geq \operatorname{arctg}(x)$$

za sve $x \in \mathbb{R}$?

Rješenje.

(a) Funkcija arccos definirana je samo za argumente iz intervala $[-1, 1]$. Dakle, prirodna domena funkcije g je

$$x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty).$$

(b) Pretpostavimo da neka takva surjekcija g postoji. Budući da je g surjekcija, postoji neki $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $g\left(x_0\right) = -1$. Ako uzmemo da je $x_1 = \sqrt[5]{x_0}$, tada iz $g\left(x_1^5\right) = -1$ i $\operatorname{ch}(g\left(x_1\right)) \geq 0$ dobivamo da

$$-1 \geq g(x_1^5) - \operatorname{ch}(g(x_1)) \geq \operatorname{arctg}(x_1) \geq -\frac{\pi}{2},$$

što je, naravno, kontradikcija. Dakle, takva surjekcija g ne postoji.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 21. studenog 2023.

Zadatak 2. *(ukupno 12 bodova)*

a) *(6 bodova)* Dana je funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ formulom

$$g(x) = |x^2 - 4x - 6|.$$

Odredite $g^{-1}([0, 6])$.

b) *(6 bodova)* Odredite sva rješenja jednadžbe

$$2^{-x} - x = 3.$$

Rješenje.

a) Rješavamo nejednadžbu:

$$\begin{aligned} & 0 \leq |x^2 - 4x - 6| \leq 6 \\ \iff \quad & -6 \leq x^2 - 4x - 6 \leq 6 \\ \iff \quad & x^2 - 4x \geq 0 \quad \text{i} \quad x^2 - 4x - 12 \leq 0 \\ \iff \quad & x \in \langle -\infty, 0] \cup [4, +\infty\rangle \quad \text{i} \quad x \in [-2, 6]. \end{aligned}$$

Dakle, $g^{-1}([0, 6]) = [-2, 0] \cup [4, 6]$.

Može se lako vidjeti (ali nije nužno za rješenje) da je

$$g(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x + 6, & x \in [2 - \sqrt{10}, 2 + \sqrt{10}], \\ x^2 - 4x - 6, & \text{inače.} \end{cases}$$

Drukčije rješenje je moguće pomoću rastava $g = g_2 \circ g_1$ te korištenjem

$$g^{-1}([0, 6]) = g_1^{-1}(g_2^{-1}([0, 6])).$$

Nadalje, zadatak je moguće riješiti skiciranjem grafa, pri čemu tada treba riješiti jednadžbe:
$x^2 - 4x - 6 = 6 \Rightarrow x = -2, 6$,
$-x^2 + 4x + 6 = 6 \Rightarrow x = 0, 4$.

b) Primijetimo da je $x = -1$ jedno rješenje jednadžbe zato što vrijedi

$$2^{-(-1)} - (-1) = 2 + 1 = 3.$$

Funkcija na lijevoj strani jednadžbe je strogo padajuća, jer je zbroj dvije strogo padajuće funkcije, pa je injekcija. Zato je $x = -1$ jedino rješenje jednadžbe.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 21. studenog 2023.

Zadatak 3. *(ukupno 13 bodova)* Zadana je funkcija $f(x) = 2^{\sin x - \sqrt{3}\cos x}$.

(a) *(6 bodova)* Odredite sliku $f(\mathbb{R})$.

(b) *(7 bodova)* Odredite najveći interval koji sadrži točku $\frac{100\pi}{3}$ na kojem je funkcija injekcija.

Rješenje.

(a) Primijetimo da je

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\left(\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = 2\left(\sin x \cos\frac{\pi}{3} - \cos x \sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

pa funkciju možemo zapisati kao $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$, gdje je

$$f_1(x) = x - \frac{\pi}{3}, \quad f_2(x) = 2\sin x, \quad f_3(x) = 2^x.$$

Dakle,

$$f(\mathbb{R}) = f_3(f_2(f_1(\mathbb{R}))) = f_3(f_2(\mathbb{R})) = f_3([-2,2]) = \left[\frac{1}{4}, 4\right].$$

(b) Funkcije f_1 i f_3 su injekcije na cijelom intervalu pa treba odrediti najveći interval na kojem je f_2 injekcija i koji sadrži $f_1(\frac{100\pi}{3}) = 33\pi$. Funkcija sin je strogo padajuća na $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ i kako je $\sin([\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]) = [-1,1]$, što je jednako slici cijelog $\mathbb{R}$, zaključujemo da je to najveći interval koji sadrži π na kojem je injekcija. Zbog toga što je funkcija sin i 2π-periodična, to je $16 \cdot 2\pi + [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, najveći interval koji sadrži 33π na kojem je injekcija. Naime, kad bi postojao veći, tada bismo od njega oduzeli 32π i dobili veći interval koji sadrži π. Konačno, zaključujemo da je najveći traženi interval jednak

$$32\pi + \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] + \frac{\pi}{3} = 32\pi + \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right] = \left[\frac{197\pi}{6}, \frac{203\pi}{6}\right].$$

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 21. studenog 2023.

Zadatak 4. *(ukupno 12 bodova)* Dana je surjekcija $g : \langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \rangle \to \langle -3, 0 \rangle$ pravilom

$$g(x) = \text{ctg}^2 x - 2\text{ctg} x - 3.$$

a) *(6 bodova)* Pokažite da je g injekcija.

b) *(6 bodova)* Odredite g^{-1}.

Rješenje.

a) Funkcija $\text{ctg}|_{\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \rangle}$ je strogo padajuća, pa je injekcija.
   Njena slika je $\text{ctg}|_{\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \rangle}(\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \rangle) = \text{ctg}(\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \rangle) = \langle \text{ctg}(\frac{3\pi}{4}), \text{ctg}(\frac{\pi}{2}) \rangle = \langle -1, 0 \rangle$.
   Dobro je definirana funkcija $g_1 : \langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \rangle \to \langle -1, 0 \rangle$, koja ima pravilo $g_1(x) = \text{ctg} x$.
   Funkcija g_1 je injekcija.
   Neka je p kvadratna funkcija $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja ima pravilo $p(x) = x^2 - 2x - 3$.
   Njeno tjeme je $x_T = 1$ pa je restrikcija $p|_{\langle -1,0 \rangle}$ strogo padajuća funkcija. Zato je $p|_{\langle -1,0 \rangle}$ injekcija.
   Slika funkcije $p|_{\langle -1,0 \rangle}$ je $p|_{\langle -1,0 \rangle}(\langle -1, 0 \rangle) = p(\langle -1, 0 \rangle) = \langle p(0), p(-1) \rangle = \langle -3, 0 \rangle$.
   Dobro je definirana funkcija $g_2 : \langle -1, 0 \rangle \to \langle -3, 0 \rangle$, koja ima pravilo $g_2(x) = x^2 - 2x - 3$.
   Vrijedi $g = g_2 \circ g_1$.
   Funkcija g je injekcija jer je kompozicija injekcija.

b) g_1 i g_2 su surjekcije, odnosno bijekcije.
   $g_1^{-1} : \langle -1, 0 \rangle \to \langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \rangle$,
   $y = g_1(x) = \text{ctg} x \Rightarrow g_1^{-1}(y) = \text{arcctg} y$.
   $g_2^{-1} : \langle -3, 0 \rangle \to \langle -1, 0 \rangle$,
   $y = g_2(x) = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 - y = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-3-y)}}{2}$,
   $g_2^{-1}(y) = 1 - \sqrt{4 + y}$.
   Sada je
   $g^{-1} : \langle -3, 0 \rangle \to \langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \rangle$,
   $g^{-1}(y) = (g_2 \circ g_1)^{-1}(y) = (g_1^{-1} \circ g_2^{-1})(y) = g_1^{-1}(g_2^{-1}(y)) = \text{arcctg}(1 - \sqrt{4 + y})$.