MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

# LINEARNA ALGEBRA 2

2. kolokvij - 19. lipnja 2023.

## ZADATAK 1

(a) (3 boda) Na prostoru $\mathbb{R}^2$ je dan skalarni produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definiran s

$$\langle x, y\rangle = (Ax, y),$$

pri čemu je $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, a $(\cdot,\cdot)$ označava standardni skalarni produkt na $\mathbb{R}^2$. Zadana je točka $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$. Odredite krivulju $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ koja je dana s

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x - x_0|| = 2\},$$

gdje je $\|\cdot\|$ norma inducirana skalarnim produktom $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

(b) (2 boda) Neka je $A \in M_n(\mathbb{R})$ simetrična matrica takva da je $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ za svaki $x \in M_{n1}(\mathbb{R})$. Dokažite da postoji matrica $B \in M_n(\mathbb{R})$ takva da je $B^2 = A$.

*Rješenje:*

(a) Krivulja $\Gamma$ je dakle dana ekvivalentnom jednadžbom

$$4 = \|x - x_0\|^2 = \langle x - x_0, x - x_0\rangle = (A(x - x_0), x - x_0),$$

tj., nakon raspisivanja posljednjeg izraza, uz oznaku $x = (x_1, x_2)$

$$3x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 - 4\sqrt{2}x_1 - 4\sqrt{2}x_2 + 4 = 4.$$

Matricu $A$ dijagonaliziramo u obliku $A = QDQ^T$, pri čemu je

$$D = \operatorname{diag}(2, 4), \qquad Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uvodimo supstituciju $\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = Q^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, te izražavamo stare koordinate preko novih, tj. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} x_1' + x_2' \\ x_2' - x_1' \end{bmatrix}$. Uvrštavanjem u jednadžbu dobivamo te sređivanjem dobivamo

$$x_1'^2 + 2(x_2' - 1)^2 = 2.$$

pa drugom supstitucijom $\begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ dobivamo konačno jednadžbu elipse

$$x_1''^2 + 2x_2''^2 = 2$$

u koordinatnom sustavu koji je od početnog dobiven prvo rotacijom za kut $-\frac{\pi}{4}$, a zatim translacijom za vektor $(0, 1)$ u tom koordinatnom sustavu.

(b) Kako je $A$ realna simetrična matrica, posebno je i hermitska, pa se može dijagonalizirati, tj. postoji dijagonalna matrica $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ i ortogonalna matrica $U = \begin{bmatrix} f_1 & \dots & f_n \end{bmatrix}$ takva da je $A = UDU^T$. Tada je za $i = 1, \dots, n$

$$\lambda_i = \langle Df_i, f_i \rangle = \langle U^T AU f_i, f_i \rangle = \langle A(Uf_i), Uf_i \rangle \geq 0.$$

Stoga je dobro definirana matrica $\tilde{D} := \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$, te vrijedi

$$(U\tilde{D}U^T)^2 = U\tilde{D}^2U^T = UDU^T = A,$$

pa je $B = U\tilde{D}U^T$ tražena matrica.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

# LINEARNA ALGEBRA 2

2. kolokvij - 19. lipnja 2023.

## ZADATAK 2

(5 bodova) Na prostoru $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, polinoma s realnim koeficijentima stupnja manjeg ili jednako 2, sa skalarnim produktom

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt,$$

dan je funkcional $f$ formulom

$$f(p) = \frac{p(0) - 2p(1)}{3}, \quad p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}).$$

Odredite polinom $g \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tako da vrijedi $f(p) = \langle p, g\rangle$, za svaki $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

**Rješenje** Neka je traženi polinom oblika $g(t) = a + bt + ct^2$. Za polinom $p$ u formuli $f(p) = \langle p, g\rangle$, uvrstimo polinome $1, t, t^2$. Imamo

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{3} &= \int_0^1 (a + bt + ct^2)dt = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} \\
-\frac{2}{3} &= \int_0^1 (at + bt^2 + ct^3)dt = \frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4} \\
-\frac{2}{3} &= \int_0^1 (at^2 + bt^3 + ct^4)dt = \frac{a}{3} + \frac{b}{4} + \frac{c}{5}
\end{aligned}$$

Rješavanjem tog sustava imamo $a = 1, b = 4$ i $c = -10$.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

# LINEARNA ALGEBRA 2

2. kolokvij - 19. lipnja 2023.

## ZADATAK 3

(a) (3 boda) Neka je $v \in \mathbb{R}^3$ jedinični vektor te $A \in L(\mathbb{R}^3)$ operator osne simetrije s obzirom na pravac kroz ishodište smjera $v$. Odredite $A^*$.

(b) (2 boda) Odredite sve $n \in \mathbb{N}$ za koje postoji $A \in L(\mathbb{R}^n)$ takav da je $A$ ortogonalni projektor te da vrijedi $\operatorname{tr} A = 2023$. Za one za koje postoji navedite jedan primjer takvog $A$, odnosno za one za koje ne postoji to dokažite.

*Rješenje:*

(a) Vektor $v$ možemo dopuniti do ONB za $\mathbb{R}^3$, te dobijemo ONB $(f) = \{v, f_1, f_2\}$. Kako su $f_1$ i $f_2$ okomiti na $v$, za njihove osne simetrije s obzirom na pravac smjera $v$ vrijedi

$$Af_1 = -f_1, \quad Af_2 = -f_2.$$

Tada je u ONB $(f)$ prikaz operatora $A$ dan s $[A]_f^f = \operatorname{diag}(1, -1, -1)$. Posebno, taj prikaz je hermitska matrica, pa zaključujemo da je operator $A$ hermitski, tj. $A^* = A$.

**Alternativna rješenja:** (1) Operator osne simetrije čuva normu, pa je onda i unitaran, tj. vrijedi $A^* = A^{-1}$. S druge strane, očito je $A^2 = I$, pa slijedi $A^* = A$.

(2) Skiciranjem se lako vidi da za svaki $x \in \mathbb{R}^3$ vrijedi

$$Ax = 2P_v x - x,$$

gdje je $P_v$ ortogonalni projektor na $[\{v\}]$. Stoga je $A = 2P_v - I$, pa je

$$A^* = (2P_v - I)^* = 2(P_v)^* - I^* = 2P_v - I = A.$$

(b) Za ortogonalni projektor postoji baza $(b)$ takva da je prikaz tog operatora u bazi $(b)$ dijagonalna matrica s jedinicama i nulama na dijagonali. Kako trag ne ovisi o odabiru baze u kojem prikazujemo operator, zaključujemo da za $n < 2023$ nikako ne može postojati takav operator. S druge strane, za $n \geq 2023$ možemo uzeti $M = [\{e_1, \ldots, e_{2023}\}]$ te $A$ ortogonalni projektor na $M$.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

# LINEARNA ALGEBRA 2

2. kolokvij - 19. lipnja 2023.

## ZADATAK 4

(5 bodova) Nađite neku ortogonalnu matricu $U$ takvu da je $U^TAU$ dijagonalna matrica ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

**Rješenje**: Iz činjenice da vrijedi $A^* = A^T = A$ slijedi da se $A$ može dijagonalizirati u ortonormiranoj bazi. Računamo:

$$0 = k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = (\lambda-3)^2(\lambda+1)^2.$$

Sada imamo $\lambda_{1,2} = 3$ te $\lambda_{3,4} = -1$.

Računamo:

$$V_A(3) \ldots \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Dakle, $V_A(3) = [\{v_1, v_2\}]$, gdje je $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ te $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Dalje računamo:

$$V_A(-1) \ldots \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dakle, $V_A(-1) = [\{v_3, v_3\}]$, gdje je $v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ te $v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Operator $A$ se dijagonalizira u bazi $(f) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, ali to nije ortonormirana baza.

Primijetimo da vrijedi $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ za $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3, 4$. Dakle, vektori $v_1, \ldots, v_4$ su međusobno ortogonalni, ali moramo ih normirati:

$$\hat{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; \hat{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; \hat{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; \hat{v}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Dakle, $A$ se dijagonalizira u ortonormiranoj bazi $(\hat{f}) = \{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3, \hat{v}_4\}$, tj. za matrice

$$D = A(\hat{f}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \; U = [\hat{v}_1 \; \hat{v}_2 \; \hat{v}_3 \; \hat{v}_4],$$

vrijedi da je $U^T A U$ dijagonalna matrica.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

# LINEARNA ALGEBRA 2

2. kolokvij - 19. lipnja 2023.

## ZADATAK 5

(5 bodova) Neka je $V$ konačnodimenzionalan unitarni prostor.

(a) Dokažite: ako su $x, y \in V$ međusobno ortogonalni vektori, tada je $\|x+y\| = \|x-y\|$.

(b) Ako je $V$ realni unitarni prostor, dokažite da tada vrijedi i obrat tvrdnje pod (a).

(c) Neka je $M \leq V$. Ako je $x \in V$ jedinični vektor te ako su $a$ i $b$ redom njegove ortogonalne projekcije na $M$ i $M^{\perp}$, odredite udaljenost vektora $a$ i $b$ .

*Rješenje:*

(a) Ako su $x$ i $y$ međusobno okomiti, tada su također okomiti i vektori $x$ i $-y$. Dvostrukom primjenom Pitagorinog teorema slijedi

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x-y\|^2.$$

(b) Iz $\|x+y\| = \|x-y\|$ kvadriranjem slijedi

$$\langle x+y, x+y\rangle = \langle x-y, x-y\rangle,$$

gdje korištenjem činjenice da je $V$ realan dobivamo

$$\|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2.$$

Odavde slijedi $\langle x, y\rangle = 0$.

(c) Primjenom tvrdnje (a) dijela zadatka na vektore $a, b$ slijedi

$$d(a, b) = \|a-b\| = \|a+b\| = \|x\| = 1.$$

MATIČNI BROJ STUDENTA IME I PREZIME BROJ BODOVA

# LINEARNA ALGEBRA 2

2. kolokvij - 19. lipnja 2023.

## ZADATAK 1

(a) (3 boda) Na prostoru $\mathbb{R}^2$ je dan skalarni produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definiran s

$$\langle x, y \rangle = (Ax, y),$$

pri čemu je $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, a $(\cdot, \cdot)$ označava standardni skalarni produkt na $\mathbb{R}^2$. Zadana je točka $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$. Odredite krivulju $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ koja je dana s

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x - x_0|| = 2\},$$

gdje je $\| \cdot \|$ norma inducirana skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

(b) (2 boda) Neka je $A \in M_n(\mathbb{R})$ simetrična matrica takva da je $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ za svaki $x \in M_{n1}(\mathbb{R})$. Dokažite da postoji matrica $B \in M_n(\mathbb{R})$ takva da je $B^2 = A$.

*Rješenje:* Isto kao prva grupa.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

# LINEARNA ALGEBRA 2

2. kolokvij - 19. lipnja 2023.

ZADATAK 2

(5 bodova) Na prostoru $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, polinoma s realnim koeficijentima stupnja manjeg ili jednako 2, sa skalarnim produktom

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{0} p(t)q(t)dt,$$

dan je funkcional $h$ formulom

$$h(p) = \frac{p(0) + p(-1)}{12}, \quad p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}).$$

Odredite polinom $r \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tako da vrijedi $h(p) = \langle p, r\rangle$, za svaki $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

**Rješenje** Neka je traženi polinom oblika $r(t) = a + bt + ct^2$. Za polinom $p$ u formuli $h(p) = \langle p, g\rangle$, uvrstimo polinome $1, t, t^2$. Imamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6} &= \int_{-1}^{0} (a + bt + ct^2)dt = a - \frac{b}{2} + \frac{c}{3} \\
-\frac{1}{12} &= \int_{-1}^{0} (at + bt^2 + ct^3)dt = -\frac{a}{2} + \frac{b}{3} - \frac{c}{4} \\
\frac{1}{12} &= \int_{-1}^{0} (at^2 + bt^3 + ct^4)dt = \frac{a}{3} - \frac{b}{4} + \frac{c}{5}
\end{aligned}$$

Rješavanjem tog sustava imamo $a = 1, b = 5$ i $c = 5$.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

# LINEARNA ALGEBRA 2

2. kolokvij - 19. lipnja 2023.

## ZADATAK 3

(a) (3 boda) Neka je $v \in \mathbb{R}^3$ jedinični vektor te $A \in L(\mathbb{R}^3)$ operator osne simetrije s obzirom na pravac kroz ishodište smjera $v$. Odredite $A^*$.

(b) (2 boda) Odredite sve $n \in \mathbb{N}$ za koje postoji $A \in L(\mathbb{R}^n)$ takav da je $A$ ortogonalni projektor te da vrijedi $\operatorname{tr} A = 2023$. Za one za koje postoji navedite jedan primjer takvog $A$, odnosno za one za koje ne postoji to dokažite.

*Rješenje:* Isto kao prva grupa.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

# LINEARNA ALGEBRA 2

2. kolokvij - 19. lipnja 2023.

## $\boxed{\text{ZADATAK 4}}$

(5 bodova) Nađite neku ortogonalnu matricu $U$ takvu da je $U^T AU$ dijagonalna matrica ako je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

**Rješenje**: Iz činjenice da vrijedi $A^* = A^T = A$ slijedi da se $A$ može dijagonalizirati u ortonormiranoj bazi. Računamo:

$$0 = k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = (\lambda-3)^2(\lambda-1)^2.$$

Sada imamo $\lambda_{1,2} = 3$ te $\lambda_{3,4} = 1$.

Računamo:

$$V_A(3) \ldots \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dakle, $V_A(3) = [\{v_1, v_2\}]$, gdje je $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ te $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Dalje računamo:

$$V_A(1) \ldots \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dakle, $V_A(1) = [\{v_3, v_3\}]$, gdje je $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ te $v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Operator $A$ se dijagonalizira u bazi $(f) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, ali to nije ortonormirana baza.

Primijetimo da vrijedi $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ za $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3, 4$. Dakle, vektori $v_1, \ldots, v_4$ su međusobno ortogonalni, ali moramo ih normirati:

$$\hat{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \hat{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \hat{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \hat{v}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dakle, $A$ se dijagonalizira u ortonormiranoj bazi $(\hat{f}) = \{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3, \hat{v}_4\}$, tj. za matrice

$$D = A(\hat{f}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ U = [\hat{v}_1 \ \hat{v}_2 \ \hat{v}_3 \ \hat{v}_4],$$

vrijedi da je $U^T A U$ dijagonalna matrica.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

# LINEARNA ALGEBRA 2

2. kolokvij - 19. lipnja 2023.

ZADATAK 5

(5 bodova) Neka je $V$ konačnodimenzionalan unitarni prostor.

(a) Dokažite: ako su $x, y \in V$ međusobno ortogonalni vektori, tada je $\|x + y\| = \|x - y\|$.

(b) Ako je $V$ realni unitarni prostor, dokažite da tada vrijedi i obrat tvrdnje pod (a).

(c) Neka je $M \leq V$. Ako je $x \in V$ jedinični vektor te ako su $a$ i $b$ redom njegove ortogonalne projekcije na $M$ i $M^{\perp}$, odredite udaljenost vektora $a$ i $b$ .

*Rješenje:* Isto kao prva grupa.