JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

KOMPLEKSNA ANALIZA

Ispit – 1. srpnja 2024.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje. Ostali predmeti (npr. mobiteli, pametni satovi, ...) ne smiju biti u blizini studenta.
- Sve odgovore detaljno obrazložite.
- $\mathcal{B}(a;r) := \{z \in \mathbf{C} : |z-a| < r\}$

ZADATAK 1. Neka je $U \subset \mathbf{C}$ neka domena.

(i) (1 bod) Definirajte što znači da je funkcija $f\colon U \to \mathbf{C}$ kompleksno diferencijabilna u nekoj točki $z \in U$.

(ii) (8 bodova) Neka je $f\colon U \to \mathbf{C}$, $w = c + id \in U$, te $f = u + iv$ za neke $u, v\colon U \to \mathbf{R}$. Uz koje uvjete na funkcije u i v će funkcija f biti kompleksno diferencijabilna u w? Dokažite.

(iii) (5 bodova) Postoji li nekonstantna funkcija $f\colon U \to \mathbf{C}$ takva da su i f i $\overline{f}$ holomorfne?

(iv) (9 bodova) Pronađite cijelu funkciju f takvu da je za sve $x, y \in \mathbf{R}$

$$e^x \cos y = \operatorname{Im}\left(\int_{\partial\mathcal{B}(x+iy;3)} \frac{f(w)}{w - x - iy}\, dw\right),$$

pri čemu je $\partial\mathcal{B}(x+iy;3)$ orijentirano u smjeru obrnutom od smjera kazaljke na satu.

JMBAG

IME I PREZIME

BROJ BODOVA

KOMPLEKSNA ANALIZA

Ispit – 1. srpnja 2024.

Zadatak 2.

(ii) (1 bod) Iskažite osnovni teorem algebre.

(i) (9 bodova) Neka je $f \colon \mathcal{B}(z;r) \to \mathbf{C}$ holomorfna funkcija takva da je $|f(w)| \leqslant |f(z)|$, za svaki $w \in \mathcal{B}(z;r)$. Dokažite da je tada $|f|$ konstantna funkcija.

(iii) (12 bodova) Neka je f cijela funkcija. Pretpostavite da postoji limes

$$\lim_{|z|\to\infty} e^{|z|} \operatorname{Re} f(z),$$

te uz tu pretpostavku odredite koje sve realne vrijednosti može poprimiti.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

KOMPLEKSNA ANALIZA

Ispit – 1. srpnja 2024.

Zadatak 3.

(i) (2 boda) Iskažite teorem o razvoju u Laurentov red funkcije f koja je holomorfna na kružnom vijencu $\mathcal{V}(a;r,R) = \{z \in \mathbf{C} : r < |z-a| < R\}$, za $a \in \mathbf{C}$ i $0 \leqslant r < R \leqslant \infty$.

(ii) (8 bodova) Neka je $f\colon A \to \mathbf{C}$ holomorfna na $\mathcal{V}(a;r,R) = \{r < |z-a| < R\}$. Dokažite da su koeficijenti u razvoju od f u Laurentov red na $\mathcal{V}(a;r,R)$ jedinstveno određeni s f.

(iii) (12 bodova) Neka je

$$f(z) = \frac{1}{z-2} + \log(-z^2 + 6z - 5),$$

pri čemu je $z \mapsto \log z$ glavna grana kompleksnog logaritma. Funkciju f razvijte u Laurentov red na kružnom vijencu $\mathcal{V}(3;1,2)$.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

KOMPLEKSNA ANALIZA

Ispit – 1. srpnja 2024.

Zadatak 4.

(i) (4 boda) Navedite parametrizaciju neke zatvorene glatke krivulje koja se oko točke $1+i$ namota točno tri puta u smjeru obrnutom od smjera kazaljke na satu.

(ii) (4 boda) Precizno iskažite princip argumenta.

(iii) (7 bodova) Neka je U domena, a γ jednostavna po dijelovima glatka zatvorena krivulja u U, orijentirana u smjeru obrnutom od smjera kazaljke na satu. Neka su f i g holomorfne na U, te pretpostavimo da je $|f(z)| > |g(z)|$ za sve z na krivulji γ. Dokažite da f i $f+g$ imaju jednak broj nultočaka u domeni koju okružuje γ, pri čemu svaku nultočku računamo s odgovarajućim redom (kratnosti).

(iv) (8 bodova) Neka su $z_1 \neq z_2$ dva kompleksna rješenja jednadžbe

$$z^7 + 5z^3 + 11z - 4 = 0.$$

Dokažite da je $|z_1| > 1$ ili $|z_2| > 1$.