JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

KOMPLEKSNA ANALIZA

Ispit – 1. srpnja 2024.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje. Ostali predmeti (npr. mobiteli, pametni satovi, ...) ne smiju biti u blizini studenta.
- Sve odgovore detaljno obrazložite.
- $\mathcal{B}(a;r) := \{z \in \mathbf{C} : |z-a| < r\}$

Zadatak 1. Neka je $U \subset \mathbf{C}$ neka domena.

(i) (1 bod) Definirajte što znači da je funkcija $f\colon U \to \mathbf{C}$ kompleksno diferencijabilna u nekoj točki $z \in U$.

(ii) (8 bodova) Neka je $f\colon U \to \mathbf{C}$, $w = c + id \in U$, te $f = u + iv$ za neke $u, v\colon U \to \mathbf{R}$. Uz koje uvjete na funkcije u i v će funkcija f biti kompleksno diferencijabilna u w? Dokažite.

(iii) (5 bodova) Postoji li nekonstantna funkcija $f\colon U \to \mathbf{C}$ takva da su i f i $\overline{f}$ holomorfne?

(iv) (9 bodova) Pronađite cijelu funkciju f takvu da je za sve $x, y \in \mathbf{R}$

$$e^x \cos y = \operatorname{Im}\left(\int_{\partial\mathcal{B}(x+iy;3)} \frac{f(w)}{w-x-iy}\, dw\right),$$

pri čemu je $\partial\mathcal{B}(x+iy;3)$ orijentirano u smjeru obrnutom od smjera kazaljke na satu.

Rješenje.

(i) Za funkciju $f\colon U \to \mathbf{C}$ kažemo da je kompleksno diferencijabilna u $z \in \mathbf{C}$ ako postoji limes

$$\lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}.$$

(ii) f je kompleksno diferencijabilna u w ako i samo ako su u i v promatrane kao realne funkcije dvije realne varijable diferencijabilne u (c, d) te vrijede Cauchy–Riemannove jednadžbe

$$\partial_x u = \partial_y v,$$
$$\partial_y u = -\partial_x v.$$

Da bismo to dokazali, primjetimo najprije da je f kompleksno diferencijabilna u w s derivacijom $f'(w) = p + iq$ ako i samo ako je

$$\lim_{z\to w} \frac{f(z) - f(w) - (p + iq)(z - w)}{z - w} = 0. \tag{*}$$

Ako je $z = x + iy$, tada

$$(p + iq)(z - w) = p(x - c) - q(y - d) + i(q(x - c) + p(y - d)).$$

Razdvajanjem na realni i imaginrani dio dobivamo da (*) vrijedi ako i samo ako je

$$\lim_{(x,y)\to(c,d)} \frac{u(x, y) - u(c, d) - (p(x - c) - q(y - d))}{\sqrt{(x - c)^2 + (y - d)^2}} = 0$$

i

$$\lim_{(x,y)\to(c,d)} \frac{v(x, y) - v(c, d) - (q(x - c) + p(y - d))}{\sqrt{(x - c)^2 + (y - d)^2}} = 0.$$

Usporedbom s diferencijabilnošću realnih funkcija, zaključujemo da će ovo vrijediti ako i samo ako su u i v diferencijabilne u (c, d) i

$$Du|_{(c,d)} = (p, -q), \quad Dv|_{(c,d)} = (q, p).$$

Odavde jednostavno slijede Cauchy–Riemannove jednadžbe.

(iii) Neka je $f = u + iv$ za neke $u, v \colon U \to \mathbf{R}$. Tada je $\overline{f} = u - iv$, pa iz Cauchy-Riemannovih jednadžbi slijedi

$$\begin{aligned} \partial_x u &= \partial_y v, \\ \partial_y u &= -\partial_x v. \\ \partial_x u &= -\partial_y v, \\ \partial_y u &= \partial_x v. \end{aligned}$$

Dakle, $\partial_x u = \partial_y v = \partial_y u = \partial_x v = 0$, odakle slijedi da su u i v su konstantne, pa je takva i f konstantna, što je kontradikcija.

Alternativno, ako su f i $\overline{f}$ holomorfne, onda je holomorfan i njihov zbroj $f + \overline{f} = 2\operatorname{Re} f$. Međutim, ta funkcija poprima isključivo realne vrijednosti, a po zadatku s vježbi onda slijedi da je konstantna. Na sličan način, promatrajući razliku funkciju f i $\overline{f}$, zaključujemo da je i $\operatorname{Im} f$ konstantna funkcija.

(iv) Iz Cauchyjeve integralne formule znamo da je

$$f(x + iy) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{B}(x+iy;3)} \frac{f(w)}{w - x - iy}\, dw.$$

Uzimanjem realnog dijela dobivamo da je

$$\operatorname{Re} f(x+iy) = \operatorname{Re}\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{B}(x+iy;3)} \frac{f(w)}{w-x-iy}\,dw\Big) = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Im}\Big(\int_{\partial\mathcal{B}(x+iy;3)} \frac{f(w)}{w-x-iy}\,dw\Big).$$

Dakle, trebamo pronaći cijelu funkciju f takvu da je

$$e^x \cos y = 2\pi \operatorname{Re} f(x+iy).$$

To možemo učiniti koristeći Cauchy–Riemannove jednadžbe ili čak napamet budući da znamo da je $e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y$. Dakle, $f(z) = e^z/2\pi$.

JMBAG	IME I PREZIME	BROJ BODOVA

KOMPLEKSNA ANALIZA

Ispit – 1. srpnja 2024.

Zadatak 2.

(ii) (1 bod) Iskažite osnovni teorem algebre.

(i) (9 bodova) Neka je $f\colon \mathcal{B}(z;r) \to \mathbf{C}$ holomorfna funkcija takva da je $|f(w)| \leqslant |f(z)|$, za svaki $w \in \mathcal{B}(z;r)$. Dokažite da je tada $|f|$ konstantna funkcija.

(iii) (12 bodova) Neka je f cijela funkcija. Pretpostavite da postoji limes

$$\lim_{|z|\to\infty} e^{|z|} \operatorname{Re} f(z),$$

te uz tu pretpostavku odredite koje sve realne vrijednosti može poprimiti.

Rješenje.

(i) Svaki nekonstantni kompleksni polinom ima nultočku u $\mathbf{C}$.

(ii) Neka je $0 < \rho < r$. Iz Cauchyjeve integralne formule slijedi

$$|f(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\overline{\mathcal{B}(z;\rho)}} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \right|.$$

Uz $w = z + \rho e^{2\pi i\theta}$, dobijemo

$$\left| \int_0^1 f(z+\rho e^{2\pi i\theta})\, d\theta \right| \leqslant \sup_{|z-w|=\rho} |f(w)| \leqslant |f(z)|.$$

Dakle, mora vrijediti jednakost. Međutim, jednakost može vrijediti samo ako je podintegralna funkcija konstantna. Slijedi da je $|f(w)|$ konstantna na krugu $\{w \in \mathbf{C} : |z-w| = \rho\}$, te je jednaka $|f(z)|$.

Budući da je $\rho \in (0,r)$ bio proizvoljan, slijedi da je $|f|$ konstantna na $\mathcal{B}(z;r)$.

(iii) Pretpostavimo da je $\lim_{|z|\to\infty} e^{|z|} \operatorname{Re} f(z) = c \in \mathbf{R}$.

Tada postoji $R > 0$ takav da je za $|z| > R$

$$|\operatorname{Re} f(z) e^{|z|}| < |c| + 1.$$

Slijedi da je

$$|\operatorname{Re} f(z)| \leqslant \frac{|\operatorname{Re} f(z)e^{|z|}|}{R} < \frac{|c|+1}{R},$$

pa je $\operatorname{Re} f(z)$ ograničena na komplementu zatvorenog kruga $\overline{\mathcal{B}(0;R)}$.

Budući da je f holomorfna, njen realni dio je neprekidna funkcija, pa je ograničena na kompaktnom skupu $\overline{\mathcal{B}(0;R)}$. Dakle, $\operatorname{Re} f(z)$ je ograničena funkcija.

Budući da je $|e^{f(z)}| = e^{\operatorname{Re} f(z)}$, zaključujemo da je i $e^{f(z)}$ ograničena cijela funkcija te je po Liouvilleovu teoremu konstantna. Kako je eksponencijalna funkcija periodična s periodom $2\pi i$, slijedi da postoji neki $w \in \mathbf{C}$ takav da je

$$f(z) \in \{w + 2k\pi i : k \in \mathbf{Z}\} \quad \text{za sve } z \in \mathbf{C}.$$

Kako je f neprekidna, proizlazi da je f konstantna, pa onda isto vrijedi i za $\operatorname{Re} f$. Neka je stoga $\operatorname{Re} f(z) = d \in \mathbf{R}$ za sve $z \in \mathbf{C}$.

Ako je $d \neq 0$, tada je

$$c = \lim_{|z|\to\infty} e^{|z|} \operatorname{Re} f(z) = d \cdot \lim_{|z|\to\infty} e^{|z|} \notin \mathbf{R}$$

S druge strane, ako je $d = 0$ (npr. za $f \equiv 0$), tada trivijalno dobivamo da je $c = 0$.

Dakle, 0 je jedina realna vrijednost koju dani limes može poprimiti.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

KOMPLEKSNA ANALIZA

Ispit – 1. srpnja 2024.

Zadatak 3.

(i) (2 boda) Iskažite teorem o razvoju u Laurentov red funkcije f koja je holomorfna na kružnom vijencu $\mathcal{V}(a;r,R) = \{z \in \mathbf{C} : r < |z-a| < R\}$, za $a \in \mathbf{C}$ i $0 \leqslant r < R \leqslant \infty$.

(ii) (8 bodova) Neka je $f\colon A \to \mathbf{C}$ holomorfna na $\mathcal{V}(a;r,R) = \{r < |z-a| < R\}$. Dokažite da su koeficijenti u razvoju od f u Laurentov red na $\mathcal{V}(a;r,R)$ jedinstveno određeni s f.

(iii) (12 bodova) Neka je

$$f(z) = \frac{1}{z-2} + \log(-z^2 + 6z - 5),$$

pri čemu je $z \mapsto \log z$ glavna grana kompleksnog logaritma. Funkciju f razvijte u Laurentov red na kružnom vijencu $\mathcal{V}(3;1,2)$.

Rješenje.

(i) Neka je $f\colon \mathcal{V}(a;r,R) \to \mathbf{C}$ holomorfna. Tada f ima razvoj u konvergentni red

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

pri čemu je

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathcal{B}(a;\rho)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz$$

za neki $r < \rho < R$. Dodatno, red konvergira uniformno na kompaktnim podskupovima kružnog vijenca.

(ii) Neka su $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ i $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-a)^n$ dva razvoja funkcije f u Laurentov red na $\mathcal{V}(a;r,R)$, pri čemu je prvi od njih upravo razvoj iz prethodnog podzadatka. Koristeći formulu za koeficijente c_k, znamo da vrijedi

$$\begin{aligned}
2\pi i c_k &= \int_{\partial\mathcal{B}(a;\rho)} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\, dz \\
&= \int_{\partial\mathcal{B}(a;\rho)} \left(\sum_n b_n (z-a)^{n-k-1} \right) dz \\
&= \sum_n b_n \int_{\partial\mathcal{B}(a;\rho)} (z-a)^{n-k-1}\, dz \\
&= 2\pi i b_k,
\end{aligned}$$

pri čemu je zamjena poretka integriranja i sumiranja opravdana uniformnom konvergencijom na kompaktu $\partial\mathcal{B}(a;\rho)$. Time slijedi $c_k = b_k$ za svaki $k \in \mathbb{Z}$.

(iii) Prvo primijetimo da argument logaritamske funkcije možemo faktorizirati tako da vrijedi

$$f(z) = \frac{\log(-z^2 + 6z - 5)}{z-2} = \frac{\log\big((5-z)(-1+z)\big)}{z-2}.$$

Nadalje, brojnik možemo pojednostaviti na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\log((5-z)(-1+z)) &= \log\Big((2-(z-3))(2+(z-3))\Big)\\ &= \log\Big(4\Big(1-\frac{z-3}{2}\Big)\Big(1+\frac{z-3}{2}\Big)\Big)\\ &= \log 4 + \log\Big(\Big(1-\frac{z-3}{2}\Big)\Big(1+\frac{z-3}{2}\Big)\Big).\end{aligned}$$

S predavanja znamo da vrijedi $\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$ za $|z| < 1$. Kako je $z \in \mathcal{V}(3;1,2)$ ako i samo ako $1 < |z-3| < 2$, vidimo da je $|\frac{z-3}{2}| < 1$ pa je na $\mathcal{V}(3;1,2)$ funkcija $\log((1-\frac{z-3}{2})(1+\frac{z-3}{2}))$ doista dobro definirana i holomorfna te je možemo razviti u Taylorov red oko 3, koji je jednak Laurentovom redu te funkcije prema teoremu o jedinstvenosti razvoja. Da bismo to učinili, uočimo najprije da vrijedi formula $\log(z_1 \cdot z_2) = \log(z_1) + \log(z_2)$, za $z_1 = 1 - \frac{z-3}{2}$ i $z_2 = 1 + \frac{z-3}{2}$ kada je $z \in \mathcal{V}(3;1,2)$. Razlog tome je što na tom kružnom vijencu vrijedi $|\frac{z-3}{2}| < 1$ pa je kut argumenta oba logaritma iz intervala $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Tada je

$$\log(-z^2+6z-5) = \log 4 + \log\Big(1-\frac{z-3}{2}\Big) + \log\Big(1+\frac{z-3}{2}\Big)$$

i vrijedi

$$\log(-z^2+6z-5) = \log 4 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n}(z-3)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n n}(z-3)^n = \log 4 - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n n}(z-3)^{2n}.$$

Nadalje, razvijmo $\frac{1}{z-2}$ u Laurentov red na $\mathcal{V}(3;1,2)$. Kako je $|\frac{1}{z-3}| < 1$ na $\mathcal{V}(3;1,2)$, imamo

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-3}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z-3}} = \frac{1}{z-3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-3)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-3)^{n+1}}.$$

Iz toga slijedi da je

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-3)^{n+1}} + \log 4 - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n n}(z-3)^{2n}$$

na $\mathcal{V}(3;1,2)$.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

KOMPLEKSNA ANALIZA

Ispit – 1. srpnja 2024.

Zadatak 4.

(i) (4 boda) Navedite parametrizaciju neke zatvorene glatke krivulje koja se oko točke $1+i$ namota točno tri puta u smjeru obrnutom od smjera kazaljke na satu.

(ii) (4 boda) Precizno iskažite princip argumenta.

(iii) (7 bodova) Neka je U domena, a γ jednostavna po dijelovima glatka zatvorena krivulja u U, orijentirana u smjeru obrnutom od smjera kazaljke na satu. Neka su f i g holomorfne na U, te pretpostavimo da je $|f(z)| > |g(z)|$ za sve z na krivulji γ. Dokažite da f i $f+g$ imaju jednak broj nultočaka u domeni koju okružuje γ, pri čemu svaku nultočku računamo s odgovarajućim redom (kratnosti).

(iv) (8 bodova) Neka su $z_1 \neq z_2$ dva kompleksna rješenja jednadžbe

$$z^7 + 5z^3 + 11z - 4 = 0.$$

Dokažite da je $|z_1| > 1$ ili $|z_2| > 1$.

Rješenje.

(i) Neka je $\gamma\colon [0, 6\pi] \to \mathbf{C}$ krivulja $\gamma(t) = 10e^{it}$. Lako se vidi da γ napravi tri kruga po kružnici $\partial\mathcal{B}(0;10)$ u smjeru obrnutom od smjera kazaljke na satu, te da se točka $1+i$ nalazi u unutrašnjosti pripadnog kruga.

(ii) Neka je U jednostavno povezana domena, a f funkcija koja je meromorfna na U s nultočkama $z_1, \cdots, z_k$ i polovima $w_1, \cdots, w_\ell$. Neka je γ po dijelovima glatka zatvorena krivulja takva da je $z_i, w_j \notin \mathrm{Im}(\gamma)$ za sve i, j. Tada je

$$I(f\circ\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{ord}(f; z_i) I_\gamma(z_i) - \sum_{j=1}^{\ell} \mathrm{ord}(f, w_j) I(\gamma, w_j).$$

(iii) Budući da je $|f| > |g|$ na γ, iz nejednakosti trokuta lako vidimo da f i $f+g$ nemaju nultočaka na γ. Definirajmo

$$h(z) = \frac{f(z)+g(z)}{f(z)} = 1 + \frac{g(z)}{f(z)},$$

te uočimo da su nultočke od $f+g$ ujedno i nultočke od h, te da su polovi od h nultočke od f. Iz dane pretpostavke lako vidimo da je za sve $z \in \gamma$

$$h(z) \in \mathcal{B}(1;1) \subset \{z : \operatorname{Re} z > 0\}.$$

Dakle, $h \circ \gamma$ je zatvorena krivulja u desnoj poluravnini $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$, pa je samim time $I(h \circ \gamma; 0) = 0$. Iz principa argumenta slijedi da h ima jednak broj nultočaka i polova na D, ukoliko ih brojimo s pripadnim redovima (zbog pretpostavke za krivulju γ svi relevantni brojevi namotaja jednaki su $+1$).

Dokaz je gotov nakon što iskoristimo prethodno spomenutu vezu između nultočaka i polova funkcije h i nultočaka funkcija $f+g$ i f.

(iv) Neka je

$$f(z) = z^7 + 5z^3 + 11z - 4.$$

Odredimo broj nultočaka od f na u krugu $\mathcal{B}(0;1)$. Neka je $g(z) = 11z$ i $h(z) = z^7 + 5z^3 - 4$. Tada za $z \in \partial\mathcal{B}(0;1)$, tj. $|z| = 1$, imamo

$$|h(z)| = |z^7 + 5z^3 - 4| < 10 < |11z| = |g(z)|.$$

Iz Rouchéovog teorema zaključujemo da u $\mathcal{B}(0;1)$ funkcije g i $g+h = f$ imaju jednako mnogo nultočaka, dakle jednu. Budući da smo pretpostavili da su z_1 i z_2 dvije različite nultočke, bar jedna mora biti izvan kruga.