JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

KOMPLEKSNA ANALIZA

Ispit – 17. lipnja 2024.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje. Ostali predmeti (npr. mobiteli, pametni satovi, ...) ne smiju biti u blizini studenta.
- Sve odgovore detaljno obrazložite.
- $\mathcal{B}(a;r) := \{z \in \mathbf{C} : |z-a| < r\}$

Zadatak 1.

(i) (1 bod) Definirajte pojam cijele funkcije.

(ii) (8 bodova) Neka je $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ holomorfna funkcija takva da je za neki $M > 0$

$$|f(z)| \leqslant M \quad \text{za sve } z \in \mathbf{C}.$$

Koristeći Cauchyjevu integralnu formulu dokažite da je f konstantna.

(iii) (5 bodova) Dokažite ili opovrgnite sljedeću tvrdnju: Svaka cijela funkcija je ili konstantna ili surjekcija.

(iv) (9 bodova) Postoji li cijela funkcija $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ takva da je $f(0) = 1$, $f(1) = 2024$ i

$$f(z) \notin \mathcal{B}(2024i; 1) \quad \text{za sve } z \in \mathbf{C}?$$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

KOMPLEKSNA ANALIZA

Ispit – 17. lipnja 2024.

ZADATAK 2.

(i) (2 boda) Definirajte uniformnu konvergenciju reda funkcija.

(ii) (10 bodova) Neka je $A \subset \mathbf{C}$ neki skup. Pretpostavimo da je $(f_n)_{n\geqslant 1}$ niz funkcija $A \to \mathbf{C}$ takav da za svaki $n \geqslant 1$ vrijedi $|f_n(z)| \leqslant M_n$ za sve $z \in A$, pri čemu su $M_n \geqslant 0$ takvi da red $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ konvergira. Dokažite da tada red funkcija $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergira uniformno na A.

(iii) (11 bodova) Dokažite da red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+1)e^{inz}$ definira holomorfnu funkciju na $\{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Im}(z) > 1\}$.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

KOMPLEKSNA ANALIZA

Ispit – 17. lipnja 2024.

Zadatak 3.

(i) (2 boda) Neka je $U \subset \mathbf{C}$ domena, $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$, a $\gamma\colon [a_0, a_n] \to U$ krivulja takva da je restrikcija $\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]}$ glatka krivulja za svaki $i = 0, \dots, n-1$, Za neprekidnu funkciju $f\colon U \to \mathbf{C}$ definirajte $\int_\gamma f(z)\,dz$.

(ii) (10 bodova) Neka je $U \subset \mathbf{C}$ domena, a $f\colon U \to \mathbf{C}$ holomorfna funkcija. Pretpostavimo da je $\overline{\mathcal{B}(a;r)} \subset U$ za neki $a \in \mathbf{C}$ i $r > 0$. Dokažite da je za sve $z \in \mathcal{B}(a;r)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{B}(a;r)} \frac{f(w)}{w - z}\,dw.$$

(iii) (10 bodova) Izračunajte integral

$$\int_0^{2\pi} \cos(\cos\theta)\cosh(\sin\theta)\,d\theta.$$

Uputa: Najprije zapišite $\cos(e^{i\theta})$ kao $g(\theta) + ih(\theta)$ za neke $g, h\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

JMBAG	IME I PREZIME	BROJ BODOVA

KOMPLEKSNA ANALIZA

Ispit – 17. lipnja 2024.

ZADATAK 4.

(i) (2 boda) Iskažite teorem o reziduumima.

Neka je

$$f(z) = \frac{z^2 + 4iz + 4}{(z + 2i)^2}.$$

(ii) (4 boda) Odredite izolirane singularitete funkcije f te odredite njihov tip (polovima odredite i red).

(iii) (6 bodova) Izračunajte integral funkcije f po $\partial\mathcal{B}(1;3)$, to jest po kružnici u $\mathbf{C}$ sa središtem u 1 radijusa 3, orijentiranoj u pozitivnom smjeru.

(iv) (10 bodova) Neka je $z \mapsto \log z$ glavna grana kompleksnog logaritma. Odredite točke $z \in \mathbf{C}$ u kojima je

$$g(z) = \log f(z)$$

dobro definirano. Nadalje, odredite skup izoliranih singulariteta funkcije g.