JMBAG IME I PREZIME BROJ BODOVA

KOMPLEKSNA ANALIZA

Ispit – 17. lipnja 2024.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje. Ostali predmeti (npr. mobiteli, pametni satovi, ...) ne smiju biti u blizini studenta.
- Sve odgovore detaljno obrazložite.
- $\mathcal{B}(a;r) := \{z \in \mathbf{C} : |z-a| < r\}$

Zadatak 1.

(i) (1 bod) Definirajte pojam cijele funkcije.

(ii) (8 bodova) Neka je $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ holomorfna funkcija takva da je za neki $M > 0$

$$|f(z)| \leqslant M \quad \text{za sve } z \in \mathbf{C}.$$

Koristeći Cauchyjevu integralnu formulu dokažite da je f konstantna.

(iii) (5 bodova) Dokažite ili opovrgnite sljedeću tvrdnju: Svaka cijela funkcija je ili konstantna ili surjekcija.

(iv) (9 bodova) Postoji li cijela funkcija $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ takva da je $f(0) = 1$, $f(1) = 2024$ i

$$f(z) \notin \mathcal{B}(2024i; 1) \quad \text{za sve } z \in \mathbf{C}?$$

Rješenje.

(i) Za funkciju $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ kažemo da je cijela ako je holomorfna.

(ii) Dovoljno je pokazati da je za proizvoljne $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ nužno $f(z_1) = f(z_2)$. Ocijenimo $|f(z_1) - f(z_2)|$ pomoću Cauchyjeve integralne formule.

Neka je $R > 2\max\{|z_1|, |z_2|\}$. Iz Cauchyjeve integralne formule imamo

$$\begin{aligned} |f(z_1) - f(z_2)| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{B}(0,R)}\left(\frac{f(w)}{w-z_1} - \frac{f(w)}{w-z_2}\right)dw\right| \\ &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{B}(0,R)}\frac{f(w)(z_1-z_2)}{(w-z_1)(w-z_2)}\,dw\right|. \end{aligned}$$

Ocjenom integrala na desnoj strani dobivamo

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi R \cdot \frac{M|z_1 - z_2|}{(R/2)^2} = \frac{4M|z_1 - z_2|}{R},$$

pri čemu smo koristili da zbog odabira veličine R znamo da za $|w| = R$ nužno vrijedi $|w - z_i| > R/2$. Puštanjem $R \to \infty$ dobivamo da je doista $f(z_1) = f(z_2)$.

(iii) Na primjer, funkcija $f(z) = e^z$ je definirana na cijelom $\mathbf{C}$ te je holomorfna. Dakle, f je cijela. S druge strane, f očito nije ograničena, a nije niti surjekcija budući da je $f(z) \neq 0$ za sve $z \in \mathbf{C}$.

(iv) Pretpostavimo da takva funkcija f postoji. Neka je $g\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ definirana s

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - 2024i}.$$

Pretpostavili smo da za svaki $z \in \mathbf{C}$ vrijedi $|f(z) - 2024i| \geqslant 1$, a otuda slijedi da je g doista dobro definirana na cijelom $\mathbf{C}$ te da je $|g(z)| \leqslant 1$. Dakle, g je ograničena, a kako je očito i holomorfna, zaključujemo da je cijela. Iz Liouvilleovog teorema proizlazi da je g konstantna, pa isto vrijedi i za funkciju f. Međutim, to je u kontradikciji s pretpostavkom da je $f(0) \neq f(1)$.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

KOMPLEKSNA ANALIZA

Ispit – 17. lipnja 2024.

Zadatak 2.

(i) (2 boda) Definirajte uniformnu konvergenciju reda funkcija.

(ii) (10 bodova) Neka je $A \subset \mathbf{C}$ neki skup. Pretpostavimo da je $(f_n)_{n\geqslant 1}$ niz funkcija $A \to \mathbf{C}$ takav da za svaki $n \geqslant 1$ vrijedi $|f_n(z)| \leqslant M_n$ za sve $z \in A$, pri čemu su $M_n \geqslant 0$ takvi da red $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ konvergira. Dokažite da tada red funkcija $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergira uniformno na A.

(iii) (11 bodova) Dokažite da red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+1)e^{inz}$ definira holomorfnu funkciju na $\{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Im}(z) > 1\}$.

Rješenje.

(i) Neka je $A \subset \mathbf{C}$ neki skup i niz $(f_n)_{n\geqslant 1}$ neki niz funkcija $A \to \mathbf{C}$. Za red funkcija $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ kažemo da uniformno konvergira ako postoji funkcija $f\colon A \to \mathbf{C}$ takva da za svaki $\epsilon > 0$ postoji neki $n_0 = n_0(\epsilon)$ takav da za sve $n \geqslant n_0$ vrijedi

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(z) - f(z)\right| < \epsilon \quad \text{za sve } z \in A.$$

(ii) Prije svega, red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ po usporednom kriteriju očito konvergira apsolutno za svaki $z \in A$. Označimo njegovu sumu s $f(z)$. Tada je za svaki $z \in A$

$$\left|f(z) - \sum_{n=1}^{m} f_n(z)\right| = \left|\sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(z)\right| \leqslant \sum_{n=m+1}^{\infty} |f_n(z)| \leqslant \sum_{n=m+1}^{\infty} M_n.$$

Međutim, desna strana je rep reda za kojeg smo pretpostavili da je konvergentan. To znači da za svaki $\epsilon > 0$ odabirom dovoljno velikog m možemo postići da je taj rep manji od ϵ, odnosno da je

$$\left|f(z) - \sum_{n=1}^{m} f_n(z)\right| < \epsilon$$

za sve $z \in A$, a to smo i htjeli pokazati.

(iii) Koristit ćemo korolar s predavanja u kojem smo pokazali da je uniformni limes niza holomorfnih funkcija također holomorfna funkcija. Budući da su parcijalne sume $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}(n^2+1)e^{inz}$ holomorfne funkcije, zahvaljujući spomenutom korolaru dovoljno je pokazati da dani red konvergira uniformno na $\{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Im}(z) > 1\}$. Za to koristimo prethodni podzadatak.

Ako je $z \in \mathbf{C}$ takav da je $\mathrm{Im}\, z > 1$, imamo

$$\left|(n^2+1)e^{inz}\right| = (n^2+1)\left|e^{in(\mathrm{Re}(z)+i\,\mathrm{Im}(z))}\right| = (n^2+1)e^{-n\,\mathrm{Im}(z)} < (n^2+1)e^{-n}.$$

Definirajmo $M_n = (n^2+1)e^{-n}$, te pokažimo da red $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ konvergira. Doista, to slijedi iz d'Alembertovog kriterija budući da je limes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_{n+1}}{M_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2+1}{e^{n+1}}}{\frac{n^2+1}{e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+1}{n^2+1} \cdot e^{-1} = e^{-1}$$

strogo manji od 1. Time slijedi tvrdnja.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

KOMPLEKSNA ANALIZA

Ispit – 17. lipnja 2024.

Zadatak 3.

(i) (2 boda) Neka je $U \subset \mathbf{C}$ domena, $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$, a $\gamma\colon [a_0, a_n] \to U$ krivulja takva da je restrikcija $\gamma|_{[a_i,a_{i+1}]}$ glatka krivulja za svaki $i = 0, \dots, n-1$, Za neprekidnu funkciju $f\colon U \to \mathbf{C}$ definirajte $\int_\gamma f(z)\,dz$.

(ii) (10 bodova) Neka je $U \subset \mathbf{C}$ domena, a $f\colon U \to \mathbf{C}$ holomorfna funkcija. Pretpostavimo da je $\overline{\mathcal{B}(a;r)} \subset U$ za neki $a \in \mathbf{C}$ i $r > 0$. Dokažite da je za sve $z \in \mathcal{B}(a;r)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{B}(a;r)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw.$$

(iii) (10 bodova) Izračunajte integral

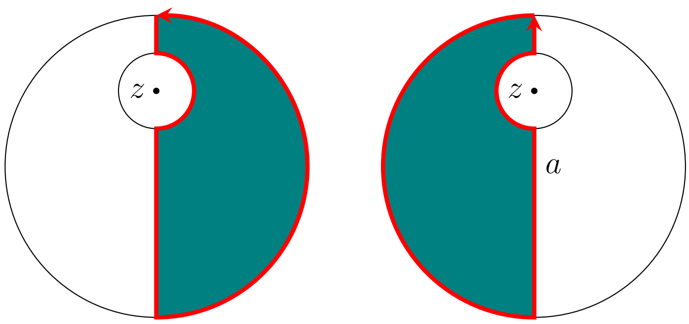
$$\int_0^{2\pi} \cos(\cos\theta)\cosh(\sin\theta)\,d\theta.$$

Uputa: Najprije zapišite $\cos(e^{i\theta})$ kao $g(\theta) + ih(\theta)$ za neke $g, h\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

Rješenje.

(i) $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt.$

(ii) Neka je $\epsilon > 0$ i odaberimo $\delta > 0$ takav da je $\overline{\mathcal{B}(z,\delta)} \subset \mathcal{B}(a,r)$, te za $|w-z| < \delta$, vrijedi $|f(w) - f(z)| < \epsilon$. To možemo postići budući da je f uniformno neprekidna na okolini točke z. Sada podijelimo naše područje na dva dijela:



Znamo da je $\frac{f(w)}{w-z}$ holomorfna na dovoljno malim otvorenim okolina od danih dvaju kontura. Područje koje te konture zatvaraju nije nužno zvjezdasto, no možemo ga opet podijeliti tako da postane zvjezdasto. Iz Cauchyjevog teorema slijedi da integral $\frac{f(w)}{w-z}$ iščezava na danim konturama. Zato vrijedi:

$$\int_{\partial\overline{\mathcal{B}(a,r)}} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \int_{\partial\overline{\mathcal{B}(z,\delta)}} \frac{f(w)}{w-z}\,dw,$$

pri čemu integriramo u pozitivnom smjeru. Slijedi:

$$\left|f(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\overline{\mathcal{B}(a,r)}} \frac{f(w)}{w-z}\,dw\right| = \left|f(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\overline{\mathcal{B}(z,\delta)}} \frac{f(w)}{w-z}\,dw\right|.$$

Koristeći činjenicu da je

$$\int_{\partial\overline{\mathcal{B}(z,\delta)}} \frac{1}{w-z}\,dz = 2\pi i,$$

dobivamo da je

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\overline{\mathcal{B}(z,\delta)}} \frac{f(z)-f(w)}{w-z}\,dw\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\delta\cdot\frac{1}{\delta}\cdot\epsilon = \epsilon.$$

Puštajući $\epsilon \to 0$, dobivamo traženu tvrdnju.

(iii) Uočimo da je

$$\begin{aligned}
\cos(e^{i\theta}) &= \frac{1}{2}\Big(e^{ie^{i\theta}} + e^{-ie^{i\theta}}\Big)\\
&= \frac{1}{2}\Big(e^{i\cos\theta - \sin\theta} + e^{-i\cos\theta + \sin\theta}\Big)\\
&= \frac{e^{-\sin\theta}}{2}\Big(\cos(\cos\theta) + i\sin(\cos\theta)\Big) + \frac{e^{\sin\theta}}{2}\Big(\cos(\cos\theta) - i\sin(\cos\theta)\Big)\\
&= \cos(\cos\theta)\cosh(\sin\theta) - i\sin(\cos\theta)\sinh(\sin\theta).
\end{aligned}$$

Alternativno, isti je identitet moguće dokazati koristeći adicijsku formulu za kosinus (koja vrijedi u istom obliku kao i za uobičajeni *realni* kosinus):

$$\begin{aligned}
\cos(e^{i\theta}) &= \cos(\cos\theta + i\sin\theta)\\
&= \cos(\cos\theta)\cos(i\sin\theta) - \sin(\cos\theta)\sin(i\sin\theta)\\
&= \cos(\cos\theta)\cosh(\sin\theta) - \sin(\cos\theta)\cdot i\sinh(\sin\theta)
\end{aligned}$$

Uzmimo sada parametrizaciju $z = e^{i\theta}$, što daje $dz = ie^{i\theta}\,d\theta = iz\,d\theta$. Iz gore dokazanog identiteta slijedi da je traženi integral jednak

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\Big(\cos(e^{i\theta})\Big)\,d\theta = \mathrm{Re}\Big(\int_0^{2\pi}\cos(e^{i\theta})\,d\theta\Big) = \mathrm{Re}\Big(\int_{|z|=1}\frac{\cos(z)}{iz}\,dz\Big),$$

što je zahvaljujući Cauchyjevoj integralnoj formuli jednako

$$\mathrm{Re}\Big(2\pi i\cdot\frac{1}{i}\cos 0\Big) = 2\pi.$$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

KOMPLEKSNA ANALIZA

Ispit – 17. lipnja 2024.

Zadatak 4.

(i) (2 boda) Iskažite teorem o reziduumima.

Neka je

$$f(z) = \frac{z^2 + 4iz + 4}{(z + 2i)^2}.$$

(ii) (4 boda) Odredite izolirane singularitete funkcije f te odredite njihov tip (polovima odredite i red).

(iii) (6 bodova) Izračunajte integral funkcije f po $\partial\mathcal{B}(1;3)$, to jest po kružnici u $\mathbf{C}$ sa središtem u 1 radijusa 3, orijentiranoj u pozitivnom smjeru.

(iv) (10 bodova) Neka je $z \mapsto \log z$ glavna grana kompleksnog logaritma. Odredite točke $z \in \mathbf{C}$ u kojima je

$$g(z) = \log f(z)$$

dobro definirano. Nadalje, odredite skup izoliranih singulariteta funkcije g.

Rješenje.

(i) Neka je U jednostavno povezana domena i $\{z_1, \cdots, z_k\} \subset U$. Ako je $f\colon U \setminus \{z_1, \cdots, z_k\} \to \mathbf{C}$ holomorfna funkcija i $\gamma\colon [a, b] \to U$ po dijelovima glatka zatvorena krivulja takva da $z_i \notin \mathrm{Im}(\gamma)$ za svaki $i = 1, \ldots, n$. Tada je

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{k} I(\gamma, z_i)\,\mathrm{res}(f; z_i).$$

(ii) Jedini izolirani singularitet funkcije f je $-2i$. Primijetimo da za funkciju $f(z)$ vrijedi

$$f(z) = \frac{z^2 + 4iz + 4}{(z + 2i)^2} = \frac{(z + 2i)^2 + 8}{(z + 2i)^2} = 1 + \frac{8}{(z + 2i)^2},$$

što je ujedno i njezin razvoj u Laurentov red oko $-2i$. Prema karakterizaciji sa predavanja zaključujemo da je $-2i$ pol drugog reda funkcije f.

(iii) Za račun integrala $\int_{\partial\mathcal{B}(1;3)} f(z)\,dz$ ćemo iskoristiti teorem o reziduumu. Naime, prvo primijetimo $-2i \in \mathcal{B}(1;3)$ jer je $|1 + 2i| = \sqrt{5} < 3$. Time dobivamo

$$\int_{\partial\mathcal{B}(1;3)} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \mathrm{res}(f, -2i).$$

Iz Laurentovog reda od f oko $-2i$ vidimo da je $\mathrm{res}(f, -2i) = 0$ pa je time i traženi integral jednak 0.

(iv) Zbog definicije glavne grane kompleksnog logaritma na $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_{\leqslant 0}$, za dobru definiranost funkcije g, iz $\mathbf{C}$ trebamo ukloniti sve kompleksne brojeve z takve da je $f(z) \in \mathbf{R}_{\leqslant 0}$. Dodatno, iz $\mathbf{C}$ trebamo ukloniti $-2i$ jer argument logaritma nije definiran u $-2i$. Da bismo odredili $z \in \mathbf{C}$ takve da je $f(z) \in \mathbf{R}_{\leqslant 0}$, prvo ćemo odrediti kada je $f(z)$ realan.

$$f(z) \in \mathbf{R} \Leftrightarrow f(z) = \overline{f(z)} \Leftrightarrow 1 + \frac{8}{(z+2i)^2} = \overline{1 + \frac{8}{(z+2i)^2}} = 1 + \frac{8}{(\overline{z}-2i)^2}.$$

Uvrštavajući $z = x+iy$ dobijemo da je zadnja jednakost ekvivalentna s $x(y+2) = 0$. Dakle, $f(z) \in \mathbf{R}$ ako i samo ako $z = iy$ ili $z = x - 2i$, za $x, y \in \mathbf{R}$. Prvo uočimo da je $f(x-2i) = 1 + \frac{8}{x^2} > 0$ pa njih ne trebamo ukloniti iz domene. Nadalje, $f(iy) = 1 - \frac{8}{(y+2)^2}$. Vrijedi da je $f(iy) \leqslant 0$ ako i samo ako $0 < |y+2| \leqslant 2\sqrt{2}$. Kako smo $-2i$ ranije uklonili iz $\mathbf{C}$, zaključujemo da je funkcija g dobro definirana na $\mathbf{C} \setminus [(-2-2\sqrt{2})i, (-2+2\sqrt{2})i]$. Time zaključujemo da funkcija g nema izoliranih singulariteta.