2

Integral

2.1 Neodređeni i određeni integral

Definicija. Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval i $f\colon I \to \mathbb{R}$ funkcija. **Primitivna funkcija** funkcije f je funkcija $F\colon I \to \mathbb{R}$ takva da je

$$F'(x) = f(x), \quad \text{za sve } x \in I.$$

Primjer. (a) Za $f(x) = 0$ npr. imamo $F(x) = 7$.
(b) Za $f(x) = x^5$ npr. imamo $F(x) = \frac{x^6}{6} + \pi$.
(c) Za $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ npr. imamo $F(x) = \operatorname{arctg} x$.

Napomena. (a) Ako je F primitivna funkcija od f, onda je i $F+C$ primitivna funkcija od f, za sve $C \in \mathbb{R}$, jer je

$$(F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x).$$

(b) Ako su F i G primitivne funkcije od f, onda je

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0, \text{ za sve } x \in I$$

pa postoji $C \in \mathbb{R}$ takav da je $G(x) - F(x) = C$, tj. $G(x) = F(x) + C$. Dakle, čim znamo jednu primitivnu funkciju F od f, onda znamo sve primitivne funkcije i one su oblika $F(x) + C$, za $C \in \mathbb{R}$

Definicija. Skup $\{F + C\colon C \in \mathbb{R}\}$ svih primitivnih funkcija od f zovemo **neodređeni integral** ili **antiderivacija** od f i taj skup označavamo s

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C.$$

Zadatak 2.1 Izračunajte neodređene integrale:

$$\text{(a)} \int x^2\,dx \qquad \text{(b)} \int \frac{dx}{x} \qquad \text{(c)} \int 5^x\,dx \qquad \text{(d)} \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}.$$

Rješenje.

(a) $\displaystyle\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

(c) $\displaystyle\int 5^x\,dx = \frac{5^x}{\ln 5} + C$

(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}} = \int x^{-\frac{1}{4}}\,dx = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + C$

△

Definicija. Neka je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija. Ako je f Riemann-integrabilna, onda realni broj $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,dx$ zovemo **određeni integral**.

Teorem. Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otoreni interval i $f\colon I \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Ako je $c \in I$ onda je s

$$F\colon I \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int\limits_c^x f(t)\,dt, \ x \in I$$

definirana primitivna funkcija od f.

Teorem. Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval i $f\colon I \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Ako je F primitivna funkcija od f, onda za svaki segment $[a,b] \subseteq I$ vrijedi **Newton-Leibnizova formula**:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b$$

Primjer.

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Zadatak 2.2 Izračunajte određene integrale:

$$\text{(a)} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (4\sin^2 x - 3\cos^2 x)\, dx \qquad \text{(b)} \int\limits_0^1 \frac{dx}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x} \qquad \text{(c)} \int\limits_1^8 \frac{x^4 - 4x^3 + 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x^4}}.$$

Rješenje.

(a) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\sin^2 x - 3\cos^2 x)\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (7\sin^2 x - 3)\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(7 \cdot \frac{1-\cos 2x}{2} - 3\Big)\ dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ dx - \frac{7}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\ dx = \tfrac{1}{2}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{7}{2}\cdot\frac{\sin 2x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - 0) - \frac{7}{2}(0-0) = \frac{\pi}{4}.$$

(b) $$\int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x} = \int_0^1 \frac{(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}\ dx = \int_0^1 (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)\ dx$$
$$= \int_0^1 e^{-x}\ dx = -e^{x}\Big|_0^1 = 1 - e^{-1}.$$

(c) $$\int_1^8 \frac{x^4 - 4x^3 + 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x^4}}\ dx = \int_1^8 \frac{x^4 - 4x^3 + 2x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{5}}}\ dx = \int_1^2 (x^{\frac{16}{5}} - 4x^{\frac{3}{5}} + 2x^{-\frac{7}{15}})\ dx =$$
$$\frac{5}{21}\cdot x^{\frac{21}{5}}\Big|_1^8 - 4\cdot\frac{5}{16}x^{\frac{16}{5}}\Big|_1^8 + 2\cdot\frac{15}{8}x^{\frac{8}{15}}\Big|_1^8 = \cdots = -\frac{115}{42} + \frac{14395}{21\cdot 2^{\frac{2}{5}}}.$$

△

Zadatak 2.3 Izračunajte integrale:

$$\text{(a)} \int \operatorname{tg}^2 x\, dx \qquad \text{(b)} \int\limits_{\prime}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\, dx \qquad \text{(c)} \int\limits_{-1}^{1} \frac{x}{x^2+1}\, dx \qquad \text{(d)} \int\limits_{-2}^{2} \lfloor x \rfloor \{x\}\, dx.$$

Rješenje.

(a) $$\int \operatorname{tg}^2 x\ dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\ dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\ dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\ dx - \int\ dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\ dx$ = (pogađamo primitivnu funkciju) = $\displaystyle -\ln(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -(\ln(\cos\frac{\pi}{4}) - \ln(\cos 0)) = -(\ln\frac{1}{\sqrt{2}} - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2.$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\ dx$ = (pogađamo primitivnu funkciju) = $\displaystyle\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2.$

(d) $\int_{-2}^{2}\lfloor x\rfloor\{x\}\,dx=\int_{-2}^{2}\lfloor x\rfloor(x-\lfloor x\rfloor)\,dx=\int_{-2}^{-1}\lfloor x\rfloor(x-\lfloor x\rfloor)\,dx+\int_{-1}^{0}\lfloor x\rfloor(x-\lfloor x\rfloor)\,dx+\int_{0}^{1}\lfloor x\rfloor(x-\lfloor x\rfloor)\,dx+\int_{1}^{2}\lfloor x\rfloor(x-\lfloor x\rfloor)\,dx=\int_{-2}^{-1}(-2)\cdot(x+2)\,dx+\int_{-1}^{0}(-1)\cdot(x+1)\,dx+\int_{0}^{1}0\cdot x\,dx+\int_{1}^{2}1\cdot(x-1)\,dx=-2(\frac{x^2}{2}+2x)\Big|_{-2}^{-1}-(\frac{x^2}{2}+x)\Big|_{-1}^{0}+(\frac{x^2}{2}-x)\Big|_{1}^{2}=\cdots=-1.$

$\triangle$

2.1.1 Integralne sume

Pretpostavimo da je $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ Riemann-integrabilna funkcija. Za svako $n\in\mathbb{N}$ neka je $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ pripadna ekvidistantna subdivizija segmenta $[a,b]$, tj. neka je

$$h:=\frac{b-a}{n}\quad\text{te}\quad x_i:=a+ih,\quad\text{za}\ \ 0\leq i\leq n.$$

Nadalje, za $n\in\mathbb{N}$ i $1\leq i\leq n$ neka su $\xi_{n,i}$ brojevi iz segmenta $[x_{i-1},x_i]$. Pripadna integralna suma S_n funkcije f je oblika

$$S_n=h\sum_{i=1}^{n}f(\xi_{n,i})=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_{n,i}).$$

Tada je niz integralnih suma $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ od f konvergentan i vrijedi

$$\lim_{n\to\infty}S_n(f)=\int_a^b f(x)\,dx. \tag{2.1}$$

Ponekad je koristan i obratni proces. Naime, pretpostavimo da trebamo izračunati limes nekog niza. Ukoliko uspijemo prepoznati da su članovi tog niza u stvari integralne sume neke (Riemann integrabilne) funkcije, tada možemo upotrijebiti formulu (2.1), kako bismo našli limes tog niza.

Kao ilustraciju navodimo sljedeći zadatak.

Zadatak 2.4 * Izračunajte limese:

(a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$

(b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right).$

Rješenje.

(a) Najprije primijetimo da je

$$S_n := \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right).$$

Uočimo da je S_n zapravo integralna suma funkcije $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definirane formulom $f(x) := \frac{1}{1+x}$, s obzirom na n-tu ekvidistantnu subdiviziju segmenta $[0,1]$

$$x_0 := 0 < x_1 := \frac{1}{n} < x_2 := \frac{2}{n} < \cdots < x_n := \frac{n}{n} = 1$$

i među-točke $\xi_{n,i} := \frac{i}{n} \in [x_{i-1}, x_i]$. Budući da je f neprekidna na $[0,1]$, ona je i Riemann integrabilna na $[0,1]$, pa je prema (2.1) niz $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan i vrijedi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2.$$

(b) Slično kao u (a) dijelu zadatka, najprije primijetimo da je

$$S_n := \frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{4-(\frac{1}{n})^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4-(\frac{n}{n})^2}}\right).$$

Nadalje, također uočimo da je S_n zapravo integralna suma funkcije $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definirane formulom $f(x) := \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$, s obzirom na n-tu ekvidistantnu subdiviziju segmenta $[0,1]$

$$x_0 := 0 < x_1 := \frac{1}{n} < x_2 := \frac{2}{n} < \cdots < x_n := \frac{n}{n} = 1$$

i među-točke $\xi_{n,i} := \frac{i}{n} \in [x_{i-1}, x_i]$. Istim argumentom kao i u (a) zaključujemo da je f Riemann integrabilna na $[0,1]$ i da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

$\triangle$

Zadaci za vježbu

2.5 Izračunajte integrale:

$$\text{(a)} \int \frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx \qquad \text{(b)} \int (2^x+5^x)^2\,dx \qquad \text{(c)} \int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx \qquad \text{(d)} \int \frac{dx}{1+\sin x}.$$

2.6 Izračunajte integrale:

$$\text{(a)} \int_0^8 (1+\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x})\,dx \qquad \text{(b)} \int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}\,dx \qquad \text{(c)} \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{(d)} \int_0^{100} \lfloor x \rfloor x\,dx.$$

2.7 Izračunajte limese:

$$\text{(a)} \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{(n+1)^2}+\ldots+\frac{n}{(2n)^2}\right] \qquad \text{(b)} \lim_{n\to\infty}\frac{1^\alpha+2^\alpha+\ldots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}}, \quad \text{za } \alpha \geq 0$$

2.8 Izračunajte limese:

$$\text{(a)} \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}\ldots+\frac{2n-1}{n^2}\right]$$

$$\text{(b)} \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2n^2+n-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{2n^2+2n-2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n^2+n\cdot n-n^2}}\right]$$

2.9 Izračunajte limese:

$$\text{(a)} \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^{\frac{1^2}{n^2}}(1+\frac{2}{n})^{\frac{2^2}{n^2}}\cdots(1+\frac{n}{n})^{\frac{n^2}{n^2}}}$$

$$\text{(b)} \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k^2+4kn+5n^2}$$

2.10 Izračunajte

$$\int_0^1 e^x\,dx$$

koristeći integralne sume.