## 1.2 Derivacija inverznih i implicitno zadanih funkcija

**Teorem.** Neka su $I, J \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni intervali i neka je $f\colon I \to J$ bijekcija, takva da je $f$ neprekidna na $I$ i $f^{-1}$ neprekidna na $J$. Ako je $f$ derivabilna u $c \in I$ i ako je $f'(c) \neq 0$, onda je $f^{-1}$ derivabilna u $d = f(c) \in J$ i

$$(f^{-1})'(d) = \frac{1}{f'(c)}.$$

■

U Lebnizovoj notaciji:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{\frac{d\,x}{d\,y}}.$$

**Zadatak 1.10** Koristeći teorem o deriviranju inverzne funckije, nađite derivaciju funkcija:

(a) $f(x) = \arcsin x$

(b) $f(x) = \operatorname{arctg} x$

(c) $f(x) = \ln x$

(d) $f(x) = \operatorname{Arsh} x$

**Rješenje.**

(a) Neka je
$$g\colon \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle \to \langle -1, 1\rangle,\ \ g(x) = \sin x.$$
Tada je
$$g^{-1}\colon \langle -1, 1\rangle \to \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle,\ \ g^{-1}(y) = \arcsin y$$
pa je po teoremu o derivaciji inverzne funkcije
$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\cos\left(\arcsin y\right)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin y\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

(b) Neka je
$$g\colon \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle \to \mathbb{R},\ \ g(x) = \operatorname{tg} x.$$
Tada je
$$g^{-1}\colon \mathbb{R} \to \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle,\ \ g^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$$
pa je po teoremu o derivaciji inverzne funkcije
$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2\left(\operatorname{arctg} y\right)}} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg} y\right)} = \frac{1}{1+y^2}.$$

(c) Neka je
$$g\colon \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle,\ g(x) = e^x.$$
Tada je
$$g^{-1}\colon 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R},\ g^{-1}(y) = \ln y$$
pa je po teoremu o derivaciji inverzne funkcije
$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}.$$

(d) Neka je
$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \operatorname{sh} x.$$
Tada je
$$g^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g^{-1}(y) = \operatorname{Arsh} y$$
pa je po teoremu o derivaciji inverzne funkcije
$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{Arsh} y)} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(\operatorname{Arsh} y)}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

△

**Zadatak 1.11** Zadana je funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + e^x$. Pokažite da je $f$ injekcija i izračunajte $(f^{-1})'(2 + \ln 2)$.

**Rješenje.** $f$ je zbroj dvije strogo rastuće funkcije pa je strogo rastuća iz čega slijedi da je injekcija. Ako je $x = \ln 2$, onda je $y = f(x) = \ln 2 + 2$ pa je po teoremu o derivaciji inverzne funkcije
$$(f^{-1})'(2+\ln 2) = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{\ln 2}} = \frac{1}{3}.$$

△

**Zadatak 1.12** Funkcija $y = y(x)$ je zadana implicitno s
$$x^2 + y^2 = 25.$$
Izračunajte:

(a) $y'(0)$,

(b) $y'(3)$, ako je $y(3) < 0$.

**Rješenje.**

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 && \Big/ \frac{d}{dx} \\ 2x + 2yy' &= 0 \\ y' &= \frac{-x}{y} \end{aligned}$$

(a) $x = 0 \implies 0^2 + y(0)^2 = 25 \implies y(0) = \pm 5$ pa je $y'(0) = \frac{-0}{y(0)} = 0$.

(b) $x = 3 \implies 3^2 + y(0)^2 = 25 \implies y(3) = \pm 4 \implies y(3) = -4$, zbog uvjeta $y(3) < 0$ pa je $y'(0) = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$.

△

**Zadatak 1.13** Funkcija $y = y(x)$ je zadana implicitno s

$$2y = x^2 + \sin y.$$

Izračunajte $y'$.

**Rješenje.**

$$\begin{aligned} 2y &= x^2 + \sin y && \Big/ \frac{d}{dx} \\ 2y' &= 2x + \cos y y' \\ y' &= \frac{2x}{2 - \cos y} \end{aligned}$$

△

**Zadatak 1.14** Funkcija $y = y(x)$ je zadana implicitno s

$$x^3 + 4x^2y + y^3 - 1 = 0.$$

Izračunajte $y'(0)$.

**Rješenje.**

$$\begin{aligned} x^3 + 4x^2y + y^3 - 1 &= 0 && \Big/ \frac{d}{dx} \\ 3x^2 + 4(2xy + x^2y) + 3y^2y' &= 0 \\ y' &= \frac{8xy - 3x^2}{3y^2 - 4x^2} \end{aligned}$$

Iz jednadžbe nađemo $y(0) = 1$ pa je $y'(0) = 0$.

$\triangle$

**Zadatak 1.15** Pokažite da funkcija $y = y(x)$ implicitno zadana s

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$$

zadovoljava jednakost

$$y'(x - y) = x + y.$$

**Rješenje.**

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg}\frac{y}{x} &= \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) \qquad\qquad / \frac{d}{dx} \\ \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{y'x - y}{x^2} &= \frac{1}{2}\frac{2x + 2yy'}{x^2 + y^2} \\ y'(x - y) &= x + y \end{aligned}$$

$\triangle$

## Zadaci za vježbu

**1.16** Ako je $x\ln y - y\ln x = 1$, izračunajte $y'(1)$.

**1.17** Ako je $y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = 1$, izračunajte $y'$.

**1.18** Izračunajte $y'(0)$ ako je funkcija $y = y(x)$ implicitno zadana jednadžbom

(a)

$$\ln y + \frac{x}{y} = 1.$$

(b)

$$x^3y^5 + \sin x \cdot y^4 + \cos x \cdot y^3 + \operatorname{ch} x \cdot y^2 + y - 3e^x = 0.$$

**1.19** Izračunajte derivaciju funkcije $y(x)$ implicitno zadane

(a) jednadžbom $ye^y = e^{x+1}$, u točki $x = 0$, $y = 1$,

(b) jednadžbom $y^2 = x + \ln\frac{y}{x}$, u točki $x = 1$, $y = 1$.

**1.20** Funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadovoljava

$$e^{f(x)} + x^2 f(x) - e^{-x} = 0 \qquad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

Izračunajte $f'$ i $f''$ (tj. izrazite ih pomoću $f$). Specijalno, koliko je $f'(0)$ i $f''(0)$?

**1.21** Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana je formulom

$$f(x) := x + x^3 + \mathrm{e}^{x^3}.$$

Pokažite da je $f$ injekcija i da je $10 + \mathrm{e}^8 \in \mathcal{R}_f$, te odredite $(f^{-1})'(e^8 + 10)$.