

# MATEMATIČKA ANALIZA 2

Druga popravna provjera znanja – 21. rujna 2020.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, te službene formule.
- Ukupan broj bodova: 100.
- Uvjet za prolaz: skupljeno barem 40 bodova na (a) i (b) dijelovima zadataka.
- Zadaci 1.(c) i 4.(c) nose ukupno 20 bodova i predviđeni su za studente koji žele višu ocjenu iz kolegija.

## Zadatak 1.

- (a) (10 bodova) Dokažite da limes  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sin x}}{e^{\frac{1}{x}}}$  ne postoji te odredite (ako postoji) limes

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\sin x}}{e^{\frac{1}{x}}}$$

- (b) (10 bodova) Neka je  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija zadana formulom

$$f(x) = e^{x^2}.$$

Odredite  $f^{(n)}(0)$ , za svaki nenegativni cijeli broj  $n$ .

- (c) (10 bodova) Dokažite ili opovrgnite: ako je funkcija  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna i surjektivna, tada postoji bar jedan  $y \in \mathbb{R}$  takav da je prasluka  $f^{-1}(\{y\})$  konačan skup.

# MATEMATIČKA ANALIZA 2

Druga popravna provjera znanja – 21. rujna 2020.

## Zadatak 2.

- (a) (10 bodova) Zadana je krivulja

$$y = \frac{x-4}{x-2}.$$

Pokažite da su tangente na tu krivulju u točkama presjeka s koordinatnim osima paralelne.

- (b) (10 bodova) Ispitajte neprekidnost i derivabilnost funkcije  $f$  definirane s

$$f(x) = \begin{cases} x + e^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ \sin x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Je li  $f$  klase  $C^1(\mathbb{R})$ ?

# MATEMATIČKA ANALIZA 2

Druga popravna provjera znanja – 21. rujna 2020.

## Zadatak 3.

- (a) (10 bodova) Neka je  $f: \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija s pravilom pridruživanja  $f(x) = x^x$ . Odredite njene intervale monotonosti, te intervale konveksnosti i konkavnosti. Dokažite da postoji neka konstanta  $C > 0$  takva da je  $f(x) \geq C$  za sve  $x > 0$ .
- (b) (10 bodova) Ispitajte konvergenciju integrala

$$\int_0^1 \frac{2 + \arcsin x}{e^{(1-x) \ln x}} dx.$$

# MATEMATIČKA ANALIZA 2

Druga popravna provjera znanja – 21. rujna 2020.

## Zadatak 4.

(a) (10 bodova) Izračunajte sumu reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^{n+2} (2n+1)!}.$$

(b) (10 bodova) Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{n^2+n}-n)}{n}.$$

(c) (10 bodova) Neka je  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  padajući niz pozitivnih realnih brojeva takav da red  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergira. Dokažite da je tada

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0.$$