

Matematička analiza 2 - teorijski ispit

Teža varijanta

7.9.2020.

1 Derivacije funkcija

- a) Definirajte Taylorov red funkcije $f(x)$. "Zašto" se članovi tog reda definiraju tako kako se definiraju (a ne nekako drugačije)? Iskažite Taylorov teorem srednje vrijednosti. Koristeći Taylorov teorem srednje vrijednosti dokažite da Taylorov red funkcije $f(x) = \sin(2x)$ (oko točke $c = 0$) konvergira funkciji $f(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.
- b) Dokažite da Taylorov red funkcije $f(x) = \sqrt{1+x}$ oko $c = 0$ konvergira funkciji $f(x)$ na nekoj okolini točke $c = 0$.

2 Riemannov integral

- a) Definirajte pojam skupa mjere nula. Je li skup iracionalnih brojeva skup mjere nula? Obrazložite odgovor.
- b) Definirajte pojam uniformne neprekidnosti. Dokažite da je svaka neprekidna funkcija na segmentu uniformno neprekidna.

3 Redovi

- a) Iskažite Cauchyjev integralni kriterij. Je li red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n+1)^2}$ konvergentan?
- b) Koristeći ideju dokaza Cauchyjevog integralnog kriterija nađite neku (što bolju) gornju ogradu (kao funkciju od m) za sumu

$$\sum_{n=1}^m \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

- c) Neke je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergentan red čija je suma jednaka A i neka je $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentan red čija je suma jednaka B . Dokažite da je produkt redova $\sum a_n$ i $\sum b_n$ konvergentan sa sumom AB .

Matematička analiza 2 - teorijski ispit

Lakša varijanta

7.9.2020.

1 Derivacije funkcija

- a) Definirajte pojam lokalnog ekstrema funkcije. Navedite primjer funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ koja ima beskonačno mnogo strogo lokalnih minimuma. Navedite primjer funkcije $f : \langle 1, 2 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ koja ima beskonačno mnogo strogo lokalnih maksimuma.
- b) Neka je $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilna funkcija definirana na otvorenom intervalu I . Ako je $f'(x) = 0$ za svaki $x \in I$, dokažite da je $f(x)$ konstanta. Vrijedi li tvrdnja u slučaju kad je I unija dva otvorena intervala? Obrazložite odgovor.

2 Riemannov integral

- a) Iskažite definiciju gornjeg Riemannovog integrala. Navedite primjer funkcije koja nije integrabilna i čiji gornji Riemannov integral je jednak jedan.
- b) Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija koja je na segmentu $[a, c]$ (gdje je $a < c < b$) strogo rastuća, a na segmentu $[c, b]$ strogo padajuća. Je li $f(x)$ nužno integrabilna? Dokažite sve svoje tvrdnje.

3 Redovi

a) Definirajte Taylorov red funkcije $f(x)$ oko točke $c = 0$. Kako glasi Taylorov red funkcije $f(x) = e^{-2x}$ oko $c = 0$? Koliki je radijus konvergencije tog reda? Konvergira li taj red apsolutno? Obrazložite odgovor.

b) Je li red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n+1)^2}$$

konvergentan? Obrazložite odgovor.

c) Dokažite da ako niz neprekidnih funkcija $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergira uniformno funkciji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, da je onda funkcija $f(x)$ neprekidna.

Matematička analiza 2 - teorijski ispit

Lakša varijanta

7.9.2020.

1 Derivacije funkcija

- a) Definirajte pojam lokalnog ekstrema funkcije. Navedite primjer funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ koja ima beskonačno mnogo strogo lokalnih maksimuma. Navedite primjer funkcije $f : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ koja ima beskonačno mnogo strogo lokalnih minimuma.
- b) Neka je $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilna funkcija definirana na otvorenom intervalu I . Ako je $f'(x) = 0$ za svaki $x \in I$, dokažite da je $f(x)$ konstanta. Vrijedi li tvrdnja u slučaju kad je I unija tri otvorena intervala? Obrazložite odgovor.

2 Riemannov integral

- a) Iskažite definiciju donjeg Riemannovog integrala. Navedite primjer funkcije koja nije integrabilna i čiji donji Riemannov integral je jednak jedan.
- b) Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija koja je na segmentu $[a, c]$ (gdje je $a < c < b$) strogo padajuća, a na segmentu $[c, b]$ strogo rastuća. Je li $f(x)$ nužno integrabilna? Dokažite sve svoje tvrdnje.

3 Redovi

a) Definirajte Taylorov red funkcije $f(x)$ oko točke $c = 0$. Kako glasi Taylorov red funkcije $f(x) = e^{-3x}$ oko $c = 0$? Koliki je radijus konvergencije tog reda? Konvergira li taj red apsolutno? Obrazložite odgovor.

b) Je li red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n+2)}$$

konvergentan? Obrazložite odgovor.

c) Dokažite da ako niz neprekidnih funkcija $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergira uniformno funkciji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, da je onda funkcija $f(x)$ neprekidna.